21世纪大学数学导学丛书

丛书主编 邹庭荣

线性代数
名师导学与习题全解

曹殿立 李全忠 主编

科学出版社

21 世纪大学数学导学丛书

丛书主编　邹庭荣

线性代数名师导学与习题全解

曹殿立　李全忠　主编

科学出版社

北　京

内 容 提 要

本书是与高等农林院校大学数学系列教材《大学数学——线性代数》(李仁所、张洪谦主编)配套的学习指导书，内容包括：行列式、向量与矩阵、线性方程组、矩阵的对角化与二次型的化简.

本书依照教材内容按章编写，每章分五个部分：学习要点、知识结构、范例解析、同步测试及参考答案、习题及补充题全解.

本书是教育部“高等理工教育数学基础课程教学改革与实践项目(教高司函[2007]143号)”之“农林院校大学数学教学规范的研究与实践”项目研究成果. 教材根据“农林院校大学数学——线性代数基本要求”，以系统把握知识脉络、增强综合应用能力、提高学习效果为目标，由具有丰富教学经验尤其是研究生入学考试辅导经验的教师集体编写而成.

本书的编写参考了最新的全国硕士研究生入学考试数学考试大纲和历年全国硕士研究生入学试题，借鉴了当前同类学习指导书的成功编写经验，选题广泛，体系合理，重点突出，方法多样，可作为理、工、农、经各专业线性代数学习的指导书、教学参考书和考研复习用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数名师导学与习题全解/曹殿立，李全忠主编. —北京：科学出版社，2012.1

(21世纪大学数学导学丛书/邹庭荣主编)

ISBN 978-7-03-033266-0

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①曹… ②李… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第280992号

责任编辑：曾　莉 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超 / 封面设计：苏　波

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1 000)

2012年1月第　一　版　　印张：12 3/4

2012年1月第一次印刷　　字数：247 000

定价：22.50元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《线性代数名师导学与习题全解》
编委会

前　言

本书是高等农林院校大学数学系列教材《大学数学——线性代数》(李仁所、张洪谦主编)的配套学习指导书，是教育部“高等理工教育数学基础课程教学改革与实践项目(教高司函[2007]143号)”之“农林院校大学数学教学规范的研究与实践”项目的研究成果.

本书依据“农林院校大学数学——线性代数基本要求”之精神，按照配套教材的要求，以系统把握知识脉络、增强综合应用能力、提高学习效果为目标，从结构到内容都进行了精心的安排. 内容按章编写，每章结构如下：

一、学习要点——本章的学习目标及需要掌握的重点.

二、知识结构——以本章内容的逻辑关系和知识体系为依据，从全局的角度给出知识的系统结构，便于学生把握知识脉络.

三、范例解析——以原教材内容顺序为编排次序，对每章题型进行分类解析，对每种题型的解题思路、技巧进行归纳总结. 突出一题多解，对容易出错的地方以及重点概念和方法作详尽注解. 范例选题广泛，涉及概念的理解、简单应用及综合运用.

四、同步测试及参考答案——配置了难易适中的习题并给出了详尽解答，供读者检查知识掌握的程度. 题型包括填空、单项选择、计算和证明四类，与全国研究生考试题型接轨.

五、习题及补充题全解——对原教材的习题及补充题进行了详细的解答. 保留了题目，以便于自学.

本书集编者长期课堂教学及研究生考试辅导教学心得之大成，编写时借鉴了同类学习指导书的编写经验，紧扣教学大纲与最新全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲，所选题目涵盖了包括2010年在内的历年全国硕士研究生统一考试线性代数试题. 我们期望本书不仅是广大学生的学习指导书、教师教学参考书，而且也是一本适宜的考研复习用书，更期望通过本书的使用，能使读者在思维方法与解决问题能力等方面有相当程度的提高.

虽然我们十分努力，但由于水平所限，定有错误与不妥之处，恳请广大师生和读者批评指正.

编　者

2011年3月11日

目　　录

第1章　行　列　式

学　习　要　点

1. 行列式的定义；
2. 主(副)对角行列式、上(下)三角行列式；
3. 行列式的性质及行列式按行(列)展开的法则；
4. 综合运用行列式的定义、性质及按行(列)展开的法则计算行列式；
5. 代数余子式与行列式的关系；
6. 克拉默法则.

知　识　结　构

行列式
- 行列式的定义
- 特殊行列式(对角和三角行列式)
- 行列式的性质(转置、行(列)交换、数乘、消元)
- 行列式按行(列)展开的法则
- 行列式的计算
- 行列式的应用——克拉默法则

范　例　解　析

一、行列式的概念

例1　已知 $a_{23}a_{31}a_{ij}a_{64}a_{56}a_{15}$ 是六阶行列式中的一项，试确定 i，j 的值及此项应带的符号.

解　根据行列式的定义，行列式是不同行不同列元素乘积的代数和，因此行下标 2，3，i，6，5，1 应取自 1 至 6 的排列，故 $i = 4$. 同理可知 $j = 2$.

或者调换项 $a_{23}a_{31}a_{ij}a_{64}a_{56}a_{15}$ 中元素的位置，使行下标为自然排列，得 $a_{23}a_{31}a_{ij}a_{64}a_{56}a_{15} = a_{15}a_{23}a_{31}a_{ij}a_{56}a_{64}$，显然 $i = 4$. 同理，若使列下标为自然排列，则知 $j = 2$.

关于此项所带的符号，有两种思路：

(1) 使行下标为自然排列，$a_{23}a_{31}a_{42}a_{64}a_{56}a_{15} = a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{64}$，此时右端列

下标排列为 531264. 因 $\tau(531264)=4+2+0+0+1=7$，即列的逆序数为奇数，所以该项应带负号.

(2) 直接计算行的逆序数和列的逆序数，$\tau(234651)+\tau(312465)=6+3=9$，即行、列逆序数之和为奇数，所以该项的符号为负号.

例 2 一个 n 阶行列式中等于零的元素的个数如果多于 n^2-n 个，则此行列式的值等于零. 为什么?

解 根据行列式的定义，行列式的每一项都是位于不同行不同列 n 个元素的乘积，而 n 阶行列式共有 n^2 个元素. 若等于零的元素个数大于 n^2-n，那么不等于零的元素个数就小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个，因而该行列式的每一项至少含有一个零元素，所以每一项都等于零. 故此行列式等于零.

例 3 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x-a_{44} \end{vmatrix}$，求：

(1) x^4 的系数； (2) x^3 的系数； (3) 常数项.

解 (1) 由行列式定义，$f(x)$中含 x^4 的项只能由行列式主对角线上的 4 个含 x 的一次因式的乘积 $(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})$ 得到，可见 x^4 的系数为 1.

(2) 同理，$f(x)$中含 x^3 的项也只能由行列式主对角线上的 4 个含 x 的一次因式得到，与(1)不同的是，x^3 的项是由其中的 3 个因式与另外一个因式中的常数项的乘积而得到的，即

$$(-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})+(x-a_{11})(-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})$$
$$+(x-a_{11})(x-a_{22})(-a_{33})(x-a_{44})+(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(-a_{44}),$$

可见 x^3 的系数为 $-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$.

(3) $f(x)$是 x 的一元四次多项式，$f(x)$的常数项即为当 $x=0$ 时 $f(x)$的值：

$$f(0)=\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

二、余子式和代数余子式

例 4 已知行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=27$，求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+$

A_{45}，其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4,5)$ 为 D_5 中第四行第 j 列元素的代数余子式.

解 由已知条件得

$$\begin{cases}(1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43})+(2\cdot A_{44}+2\cdot A_{45})=27,\\(2\cdot A_{41}+2\cdot A_{42}+2\cdot A_{43})+(1\cdot A_{44}+1\cdot A_{45})=0.\end{cases}$$

解方程得 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9$，$A_{44}+A_{45}=18$.

三、行列式的计算

例 5 （1999 年 4*）n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b\\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}=$ ________.

解 按第一列展开，有

$$D=a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a & b\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}+b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a & b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b & 0\\ 0 & 0 & \cdots & a & b\end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

例 6 已知 $D=\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1\\ 1 & x-5 & 1\\ -1 & 1 & x-3\end{vmatrix}=0$，求 x.

解 $$D\xlongequal{r_1+(-1)r_3}\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 2-x\\ 1 & x-5 & 1\\ -1 & 1 & x-3\end{vmatrix}=(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1\\ 1 & x-5 & 1\\ -1 & 1 & x-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+c_1}(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & x-5 & 2\\ -1 & 1 & x-4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一行展开}}(x-2)\begin{vmatrix} x-5 & 2\\ 1 & x-4\end{vmatrix}=(x-2)(x^2-9x+18).$$

所以 $x=2$，$x=3$，$x=6$.

注 对于这一类行列式，通常是将某行(列)的 k 倍加到另一行(列)，以期行列

---

* （1999 年 4）表示该例是 1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学试卷四的考题. 下同.

式的一行(列)出现公因式. 本题也可以将第二、三行加到第一行,则第一行有公因式 $x-3$.

例 7 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

解一 根据行列式的定义,行列式是取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和. 该行列式只有 $12\cdots(n-1)n$ 这一项非零,且这一项 n 个元素的行下标按自然顺序排列,列下标的排列为 $(n-1)(n-2)\cdots21n$, 所以

$$D_n=(-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots21n)}n!=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.$$

解二 第一行只有一个元素非零. 按第一行展开,得

$$D_n=1\cdot(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}_{(n-1)},$$

继续按第一行展开,得

$$D_n=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}_{(n-1)}=(-1)^n2(-1)^{1+(n-2)}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 3 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}_{(n-2)}$$

$$=\cdots=(-1)^n(-1)^{n-1}\cdots(-1)^3[2\times3\times\cdots\times(n-1)]\begin{vmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{(n+3)(n-2)}{2}}n!.$$

注 $\dfrac{(n+3)(n-2)}{2}$与$\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$具有相同的奇偶性.

例 8 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

解一 将第一行的 -1 倍加到其余各行,化成上三角行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot2\cdot\cdots\cdot n-1=(n-1)!.$$

同理,也可以将第一列的-1倍加到其余各列,化成下三角行列式(略).

解二 D_n 中第一行元素相同,将其他各行改写成两个分行之和,去掉与第一行成比例的分行,得

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1+0&1+1&1+0&\cdots&1+0\\1+0&1+0&1+2&\cdots&1+0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1+0&1+0&1+0&\cdots&1+(n-1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\end{vmatrix}$$
$$=1\cdot1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n-1)=(n-1)!.$$

例 9 (1989 年 5) 计算 $D_4=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}$.

解一 D_4 各行元素之和相等,将各列加到第一列,得

$$D_4=\begin{vmatrix}x&-1&1&x-1\\x&-1&x+1&-1\\x&x-1&1&-1\\x&-1&1&-1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}.$$

再将第一列的 1 倍、-1 倍、1 倍分别加到第二列、第三列、第四列,有

$$D_4=x\begin{vmatrix}1&0&0&x\\1&0&x&0\\1&x&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}=x(-1)^{\frac{4(4-1)}{2}}x\cdot x\cdot x\cdot1=x^4.$$

注 最后一个等式利用了以下结论:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n-1}&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2n-1}&\\\vdots&\iddots&&\\a_{n1}&&&\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}&&&a_{1n}\\&&a_{2n-1}&a_{2n}\\&\iddots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn-1}&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}&&a_{1n}\\&a_{2n-1}&\\\iddots&&\\a_{n1}&&\end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

上述三个行列式分别称为关于副对角线的上、下三角行列式和副对角行列式. 利用行列式的定义容易得到以上结果.

解二 $D_4 \xlongequal{r_1+(-1)r_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -x & x \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & -1 & x & -1 \\ 1 & x-1 & 0 & -1 \\ x+1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第一行展开}} (-1)^{1+4}x\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & x-1 & 0 \\ x+1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第三列展开}} (-1)^{1+3}x(-x)\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ x+1 & -1 \end{vmatrix} = x^4.$$

例 10 证明 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$,

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不为零.

证一 （加边法）将行列式添加一行一列，得 $n+1$ 阶行列式，然后将第一行的 -1 倍依次加到其余各行，得一爪型行列式，进而化为上三角行列式：

$$\text{左边} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,3,\cdots,n+1)]{r_i+(-1)r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \quad \text{（爪型）}$$

$$\xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{c_1+\frac{1}{a_{i-1}}c_i}\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)=\text{右边}.$$

证二 （拆行(列)法）将第一列拆为两个子列，则

$$\text{左边}=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1+0 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1+0 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1+0 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,3,\cdots,n+1)]{r_i+(-1)r_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ -a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$=a_2a_3\cdots a_n+a_1\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$=a_2a_3\cdots a_n+a_1\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_2a_3\cdots a_n + a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\right) = a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) = \text{右边}.$$

证三 （直接化成爪型行列式）各行都减去第 n 行，化为爪型行列式，然后把第 i 行的 $-1/a_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 倍加到第 n 行得到上三角行列式，即

$$\text{左边} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & -a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & -a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+a_n+a_n\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i} \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) = \text{右边}.$$

例 11 （1996 年 4）五阶行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

解 把各列均加至第一列，并按第一列展开，得到递推公式.

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} + (-a)(-1)^{5+1}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \end{vmatrix}.$$

$$= D_4 + (-a)(-1)^{5+1}a^4.$$

即 $D_5 = D_4 + (-a)(-1)^{5+1}a^4$.

类似地，$D_4 = D_3 + (-a)(-1)^{4+1}a^3$，$D_3 = D_2 + (-a)(-1)^{3+1}a^2$.

将这三个等式相加得 $D_5 = D_2 - a^3 + a^4 - a^5$，而 $D_2 = \begin{vmatrix} 1-a & a \\ -1 & 1-a \end{vmatrix} = 1 - a + a^2$，所以 $D = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5$.

注 对于三对角型 $\begin{vmatrix} a & b & & \\ c & a & b & \\ & c & a & b \\ & & c & a \end{vmatrix}$ 行列式，主要用递推法.

例 12 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c & a & b & \cdots & b & b \\ c & c & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a & b \\ c & c & c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$

解一 先把 D_n 拆成两个行列式，再找出递推关系.

$$D_n = \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & b & b \\ c & c & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a & b \\ c & c & c & \cdots & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & b & \cdots & b & b \\ c & a & b & \cdots & b & b \\ c & c & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a & b \\ c & c & c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)D_{n-1} + b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ c & a & b & \cdots & b & b \\ c & c & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a & b \\ c & c & c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)D_{n-1} + b(a-c)^{n-1}. \tag{1}$$

将 D_n 转置，按照上述做法，可得

$$D_n = (a-c)D_{n-1} + c(a-b)^{n-1}. \tag{2}$$

在式(1)和式(2)两边分别同乘以$(a-c)$和$(a-b)$，得

$$(a-c)D_n = (a-b)(a-c)D_{n-1} + b(a-c)^n, \tag{3}$$

$$(a-b)D_n = (a-b)(a-c)D_{n-1} + c(a-b)^n. \tag{4}$$

(4)－(3)得 $(c-b)D_n = c(a-b)^n - b(a-c)^n$.

当 $c \neq b$ 时，$D_n = \dfrac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{(c-b)}$.

当 $c = b$ 时，式(1)为 $D_n = (a-b)[D_{n-1} + b(a-b)^{n-2}]$，逐次递推得

$$
\begin{aligned}
D_n &= (a-b)[D_{n-1}+b(a-b)^{n-2}] = (a-b)^2[D_{n-2}+2b(a-b)^{n-3}] \\
&= (a-b)^3[D_{n-3}+3b(a-b)^{n-4}] = \cdots \\
&= (a-b)^{n-2}[D_2+(n-2)b(a-b)] = (a-b)^{n-1}[a+(n-1)b].
\end{aligned}
$$

解二 直接利用 D_n 的特点，将 D_n 的第一列减去第二列，第二列减去第三列，…，第 $n-1$ 列减去第 n 列，得

$$
D_n = \begin{vmatrix}
a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\
c-a & a-b & 0 & \cdots & 0 & b \\
0 & c-a & a-b & \cdots & 0 & b \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a-b & b \\
0 & 0 & 0 & \cdots & c-a & a
\end{vmatrix}.
$$

按第一行展开，得

$$
\begin{aligned}
D_n &= (a-b)\begin{vmatrix}
a-b & 0 & \cdots & 0 & b \\
c-a & a-b & \cdots & 0 & b \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a-b & b \\
0 & 0 & \cdots & c-a & a
\end{vmatrix}_{(n-1)} + (-1)^{1+n}b(c-a)^{n-1} \\
&= (a-b)D_{n-1}+(-1)^{n+1}b(-1)^{n-1}(a-c)^{n-1} = (a-b)D_{n-1}+b(a-c)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

由此递推关系式，同解一，可求得 D_n（以下略）.

例 13 计算 $2n$ 阶行列式 $D_{2n} = \begin{vmatrix}
a_n & & & & & & & b_n \\
& a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & \\
& & \ddots & & & \iddots & & \\
& & & a_1 & b_1 & & & \\
& & & c_1 & d_1 & & & \\
& & \iddots & & & \ddots & & \\
& c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & \\
c_n & & & & & & & d_n
\end{vmatrix}$.

解 利用递推方法. 按第一行展开，有

$$
D_{2n} = a_n\begin{vmatrix}
a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & 0 \\
& \ddots & & & \iddots & & \\
& & a_1 & b_1 & & & \\
& & c_1 & d_1 & & & \\
& \iddots & & & \ddots & & \\
c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & \\
0 & & & & & & d_n
\end{vmatrix} + b_n(-1)^{1+2n}\begin{vmatrix}
0 & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\
& & \ddots & & & \iddots & \\
& & & a_1 & b_1 & & \\
& & & c_1 & d_1 & & \\
& & \iddots & & & \ddots & \\
& c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \\
c_n & & & & & & 0
\end{vmatrix}
$$