



北京工业大学研究生创新教育系列教材

工程传热学

—— 基础理论与专题应用

苑中显 陈永昌 编著



科学出版社

北京工业大学研究生创新教育系列教材

工程传热学

——基础理论与专题应用

苑中显 陈永昌 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

热量传递是工程技术领域常见现象,传热学因此成为许多工程类学科专业的重要技术基础课程.本书是在大学本科传热学基础上的深入与拓展,除介绍高等传热学的主要内容外,重点对某些代表性的传热学的工程应用进行分析讨论.全书共分为8章,前3章为基础理论部分,内容涉及导热问题分析求解的基本方法,对流换热过程的特点与规律性,以及辐射传热原理与计算方法.第4~8章为传热学的专题应用部分,包括建筑环境传热与建筑节能技术,相变传热与蓄热,航天器热控制基础知识,多孔介质中的传热与传质,以及微/纳米尺度下的传热问题等内容.整体编排上既考虑在本科基础上专业知识面的拓宽,同时也尽量兼顾到对学科前沿技术理论的认知.

本书可作为能源动力、化工、冶金等相关专业的硕士生教材,也可作为相关领域工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

工程传热学:基础理论与专题应用/苑中显,陈永昌编著. —北京:科学出版社,2012

北京工业大学研究生创新教育系列教材

ISBN 978-7-03-035609-3

I. ①工… II. ①苑… ②陈… III. ①工程传热学-研究生-教材
IV. ①TK124

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第223464号

责任编辑:钱俊/责任校对:刘小梅

责任印制:钱玉芬/封面设计:陈敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新科印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012年9月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2012年9月第一次印刷 印张: 14 3/4

字数: 281 000

定价: 56.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

序

热量传递现象广泛地发生在我们的日常生活、各种工程领域及各门类的科学问题中。可以说在各种物理现象中热量传递是与人类关系最为密切的基本现象。在笔者协助杨世铭教授编著的《传热学》的绪论中曾经这样描述热传递现象的普遍性：“从现代楼宇的暖通空调到自然界的风霜雨雪的形成，从航天飞机重返大气层时壳体的热防护到电子器件的有效冷却，从一年四季人们穿着的变化到人类器官的冷冻储存，都无不与热量的传递过程密切相关。”由于传热现象及传热学应用如此之广泛，关于传热学的教学和教材编著也就引起国内外学者的高度关注。

随着近十余年来世界范围内科学技术的不断进步和我国经济的快速发展，传热学的研究范围不断扩大，研究深度不断更新，先后出版了一批传热学的新教材。但纵观国内外的传热学教材，可以发现对本科教材的关注度显著高于对研究生教材的关注度。国外适用于本科的教材，如 Holmann 的传热学已经出版了第 10 版，出版较晚的 Cengel 传热学教材也不断更新，而适用于研究生的教材的发展、更新则没有那样迅速。国内针对研究生层次的传热学教材，虽然已经出版了几种，但还不能适应各类专业面的需要。毋庸置疑，近年来我国学者在传热学的研究深度和广度上都远非以前的情况可比，但由于本科生的教材需要保持相对的稳定性与基础性，不少新的研究成果无法在其中得到及时反映。然而，研究生教材除了在介绍热量传递的基本规律方面做进一步深化外，还可在反映传热学的最新研究成果以及其在高新技术等诸多领域中的应用方面发挥作用。在这种情况下北京工业大学的两任中青年教师，在多年教授研究生传热学课程的基础上写出了这本书，这是值得称道的。

本书区别于常见教材的一大特色是其涉及面特别广，除了常见教材中的导热、对流与辐射三大部分外，作者还更根据自己的研究实践增加了诸如建筑环境传热、蓄热及航天器热控制中的传热问题等内容，同时作者也对传热学的近代重要发展——微/纳米尺度传热方面进行了简要的介绍。笔者相信这样的努力会对传热学更加结合实际应用起到促进作用，同时也为教材适应不同工程技术类型的专业选用提供了条件。

看到我国传热学领域的广大中青年学者在积极进行科学研究的同时, 也对传热学的教学方法和教材编著进行有益的尝试, 感到十分高兴, 于是写下了以上这些话, 爰为之序.

陶文铨

西安交通大学能源与动力工程学院

热流科学与工程教育部重点实验室

2012 年 9 月 10 日

前 言

在工程技术领域中经常会遇到热量的传递、存储与转换问题, 这些问题的解决, 依赖于工程热物理学科的专门知识, 其中包括传热学. 传热学所涉及的内容, 涵盖各种不同的传热方式及其相应的规律性. 学习传热学的目的在于掌握解决相关工程问题的基本理论知识. 因此, 作为能源动力类各学科的主干课程之一, 从本科生到研究生, 不同深度的传热学通常都作为必修课程讲授. 与本科生的学习内容不同, 研究生阶段所教授的“高等传热学”, 是在普通传热学基础上的拓宽和深入, 以满足培养“系统而深入”地掌握专门知识人才的要求.

进入 21 世纪以来, 科学技术的发展日新月异, 人类对未知世界的探索以及自身发展需求所导致的技术革新都为知识的更新注入了新的活力. 从以深空探索为代表的航天工程, 到高密度超大规模的电子模块的集成技术, 再到太阳能利用中的小空间内高能流光热转换等, 都使人类的知识能力面临新的挑战. 新的工程领域的兴起, 客观上对同时具备坚实的理论知识和高超的应用能力的专业人员提出了要求. 相应地, 高级专门人才的培养模式也需要作出适当的调整. 近年来, 我国教育部启动“卓越工程师计划”, 更加注重高级应用型人才的培养. 我国各高校开始执行“学术型”和“专业型”硕士研究生分流培养计划, 其中在专业型硕士生的培养方面, 更强调解决具体工程实际问题的能力.

多年以来, 本书作者为北京工业大学动力工程及工程热物理学科的硕士生讲授“高等传热学”、“强化传热”和“相变传热”等课程. 随着研究生培养计划的调整, 迫切需要一种针对专业型硕士生的特种教材, 它既和以往强调基础理论的“高等传热学”相联系, 又能够兼顾到学科前沿的工程应用, 从而起到从基础理论到工程实践的桥梁作用. 基于此目的, 作者在汇总以往的教案材料, 并广泛参阅各主要工程应用分支的最新进展的基础上, 着手编撰本“工程传热学”教材. 内容架构上, 既考虑到比较系统的传热学基础理论知识, 也充分兼顾到较多的工程应用. 书中所涉及的内容大致可满足 40~60 学时的“工程传热学”课程的教学要求.

全书共分为 8 章, 第 1~3 章为基础理论部分, 是在本科传热学基础上的深入与拓展, 属于“高等传热学”的主体内容. 这一部分内容, 涉及导热理论基础、分离变量法、格林函数法和杜哈美尔定理法等导热问题的常用分析解法, 和对流换热微分方程、边界层换热、通道内流动换热、自然对流换热、高速流动换热, 以及辐射传热中的黑体辐射、表面辐射特性和封闭腔内诸表面之间的辐射换热计算等内容. 从第 4 章开始, 分别讨论不同工程领域中的传热学应用, 是从基础传热学向专门问

题的拓展和深入. 这些专题应用涉及建筑环境传热与建筑节能技术、相变传热与蓄热、航天器热控制基础知识、多孔介质中的传热与传质, 以及微/纳米尺度下的传热问题等内容. 专题应用各部分内容的选择, 一方面考虑了学生专业知识面的拓宽, 同时也考虑了难度的适度性, 整体上处于从基础知识向专业前沿知识过渡的水平. 希冀在修完本门课程之后, 学生能够较顺利地进入下一个针对学位论文的专题研究阶段.

涉及基础理论的第 1~3 章, 以及第 4 章 (建筑环境传热)、第 5 章 (相变传热与蓄热)、第 6 章 (航天器热控制基础) 由苑中显编写, 第 7 章 (多孔介质中的传热与传质) 和第 8 章 (微/纳米尺度传热简介) 由陈永昌编写, 最后由苑中显进行统稿.

本书除作为能源动力类专业硕士生教材外, 也可作为建筑环境设备工程、化学工程、冶金工程、航天器热控制以及材料科学与工程等专业的高年级本科生、研究生或相关领域工程技术人员的参考书.

在本书的编撰与出版过程中, 作者得到了许多人的关心、支持和帮助, 我们在此表示真心的感谢. 需要特别提及的是, 北京工业大学环境与能源工程学院院长刘中良教授在书稿编撰过程中给予了鼓励与帮助, 并提供了部分资料. 本书能够顺利出版, 得益于北京工业大学研究生院常务副院长乔俊飞教授、副院长刘赵淼教授的鼎力支持, 他们曾经给予作者热诚的关心与指导, 表达了对环境与能源工程学院能源动力学科研究生培养工作发展的鼓励与希望. 研究生院负责教材出版工作的纪登梅老师为本书的出版做了大量的对外协调工作, 作者的同事王焱工程师在相关图表的编辑过程中付出了艰辛的劳动, 作者在此一并表示深深的谢意. 最后, 感谢科学出版社钱俊编辑对本书出版的大力支持.

由于作者水平所限, 尽管在编撰过程中力争做到严谨与完善, 但是也深知书中的不妥之处仍然在所难免. 如能承蒙读者提出中肯的批评与指正, 我们将不胜感激.

作 者

2012 年 3 月 28 日

目 录

序

前言

第 1 章 热传导理论分析	1
1.1 导热理论基础	1
1.1.1 傅里叶定律	1
1.1.2 导热微分方程	1
1.1.3 不同正交坐标系中的热传导方程	2
1.1.4 边界条件	3
1.1.5 齐次与非齐次问题	4
1.2 分离变量法	4
1.2.1 直角坐标系中的分离变量法	4
1.2.2 一维问题的分离变量法	6
1.2.3 半无限大物体的导热	9
1.2.4 乘积解	13
1.2.5 圆柱坐标系中的分离变量法	14
1.3 格林函数法	18
1.3.1 求解非齐次非稳态热传导问题的格林函数	18
1.3.2 格林函数的确定	20
1.3.3 格林函数法在直角坐标系中的应用	20
1.4 杜哈美尔定理法	24
1.4.1 杜哈美尔定理的表述	24
1.4.2 杜哈美尔定理的应用	25
参考文献	27
第 2 章 对流换热分析	29
2.1 对流换热微分方程	29
2.1.1 连续性方程	29
2.1.2 动量方程	30
2.1.3 能量方程	31
2.1.4 紊流换热方程	33

2.2 边界层方程	35
2.2.1 二维直角坐标下的层流边界层方程	35
2.2.2 边界层方程的数学和物理性质	38
2.2.3 圆管内的边界层方程	39
2.3 非耦合外部层流边界层换热	40
2.3.1 纵向绕流平壁换热	40
2.3.2 纵向绕流楔形物体换热	45
2.3.3 轴对称流动滞止区域换热	49
2.4 通道内非耦合层流换热	52
2.4.1 流动起始段和充分发展段	52
2.4.2 热起始段和充分发展段	55
2.4.3 圆管内层流充分发展段的换热	57
2.4.4 非圆形通道内层流充分发展段的换热	59
2.4.5 圆管起始段的换热	60
2.5 高速流动换热与自然对流换热	62
2.5.1 考虑黏性耗散的泊肃叶流动	62
2.5.2 自然对流换热边界层方程	64
2.5.3 竖平壁上常物性层流自然对流换热的相似解	66
参考文献	70
第 3 章 辐射传热分析与计算	72
3.1 黑体辐射	72
3.1.1 黑体的基本特性	72
3.1.2 黑体总辐射力 —— Stefan-Boltzmann 定律	72
3.1.3 黑体的方向辐射力 —— Lambert 余弦定律	73
3.1.4 黑体辐射的光谱分布 —— Planck 定律	74
3.1.5 黑体辐射的最大光谱强度的波长 —— Wien 位移定律	74
3.2 非黑表面辐射性质的定义	75
3.2.1 发射率	75
3.2.2 吸收率	77
3.2.3 反射率	79
3.2.4 反射率、吸收率和发射率之间的关系	80
3.3 温度均匀的黑体表面间的辐射换热	81
3.3.1 两个微元黑表面间的辐射换热	81
3.3.2 角系数及其计算方法	82
3.3.3 由宏观黑表面构成的封闭腔内的辐射换热	87

3.4 由漫-灰表面构成的封闭腔内的辐射换热	90
3.4.1 由有限大面积构成的封闭腔	90
3.4.2 由无限小面积构成的封闭腔	94
参考文献	97
第 4 章 建筑环境传热	99
4.1 建筑环境参数	99
4.1.1 室内参数	99
4.1.2 室外参数	100
4.2 建筑稳态传热	103
4.2.1 维护结构的导热	103
4.2.2 附加耗热量	103
4.2.3 门窗缝隙冷风渗透耗热量	103
4.2.4 室内外对流换热系数	104
4.3 建筑瞬态传热	104
4.3.1 土壤内的温度波动	104
4.3.2 墙体的温度波动	105
4.3.3 蓄热系数与热惰性指标	107
4.3.4 夏季空调负荷计算简介	108
4.4 建筑节能技术概述	110
4.4.1 保温隔热技术	110
4.4.2 热泵技术	110
4.4.3 蓄冷技术	112
4.4.4 热电冷联供系统	112
4.4.5 太阳能采暖与空调	113
参考文献	114
第 5 章 相变传热与蓄热	116
5.1 概述	116
5.2 沸腾传热	118
5.2.1 沸腾工况	118
5.2.2 沸腾成核理论	119
5.2.3 池内沸腾	122
5.2.4 池沸腾的临界热流密度	124
5.2.5 流动沸腾	125
5.3 凝结传热	127
5.3.1 凝结成核理论	127

5.3.2 单一工质的膜状凝结	129
5.3.3 蒸气混合物的膜状凝结	130
5.3.4 珠状凝结简介	132
5.4 凝固和熔解传热	133
5.4.1 液体的凝固	133
5.4.2 固体的熔解 —— 给定壁面温度	136
5.4.3 固体的熔解 —— 给定壁面热流密度	137
5.5 蔡升华及其传热应用	138
5.5.1 蔡的物理性质	138
5.5.2 用蔡升华模拟对流传热的实验原理	138
5.5.3 几个相关问题的讨论	139
5.6 蓄热技术简介	140
5.6.1 显热蓄热	141
5.6.2 相变蓄热	142
5.6.3 冰蓄冷技术	143
参考文献	144
第 6 章 航天器热控制基础	146
6.1 航天器热控制概述	146
6.1.1 航天器的分类	146
6.1.2 航天器轨道	147
6.1.3 航天器热控制内容	148
6.1.4 航天器热控制的任务	149
6.2 空间热环境	149
6.2.1 地球轨道的空间热环境	149
6.2.2 地球轨道的空间外热流	153
6.2.3 月球的热环境	154
6.2.4 发射和上升阶段的热环境	155
6.3 航天器热分析计算	157
6.3.1 航天器的空间热平衡	157
6.3.2 航天器温度计算	159
6.4 被动热控技术	160
6.4.1 热控涂层	160
6.4.2 多层隔热组件	162
6.4.3 热管	163
6.4.4 相变材料热控	166

6.5 主动热控技术	169
6.5.1 热控百叶窗	169
6.5.2 热开关	171
6.5.3 热二极管	171
6.5.4 流体循环热控系统	173
6.5.5 电加热控制技术	174
6.5.6 航天器中的低温制冷方法	175
6.6 空间热辐射器	179
6.6.1 热管辐射器	179
6.6.2 肋片管循环式辐射器	181
6.6.3 可展开式辐射器	182
6.6.4 液滴式辐射器	183
参考文献	184
第 7 章 多孔介质中的传热与传质	186
7.1 多孔介质的孔隙度与渗透率	186
7.1.1 多孔介质的基本概念	186
7.1.2 孔隙度	187
7.1.3 渗透率与达西渗流模型	188
7.2 多孔介质中流动与传热的数学模型	189
7.2.1 达西定律	189
7.2.2 达西定律的修正 —— Brinkman 方程	189
7.2.3 能量方程	190
7.3 多孔介质传热的工程应用	190
7.3.1 沿水平板强制对流换热的比较	190
7.3.2 土壤内的热湿迁移	191
7.3.3 生物组织中的热质传输	192
7.4 分形理论及其应用简介	193
7.4.1 分形维数的概念	194
7.4.2 多孔介质结构的分形描述	195
7.4.3 多孔介质渗透率的分形研究	196
参考文献	197
第 8 章 微/纳米尺度传热简介	199
8.1 微尺度传热的一些典型问题	199
8.2 微尺度传热的分析方法	201
8.2.1 玻尔兹曼输运理论	201

8.2.2	分子动力学理论	204
8.2.3	直接蒙特卡罗模拟方法	206
8.3	微/纳米介质中的热传导	208
8.3.1	傅里叶定律的适用性问题	208
8.3.2	热传导的边界散射效应	209
8.3.3	导热率的尺寸效应	211
8.3.4	薄膜比热容的尺寸效应	212
8.3.5	微/纳尺度导热的非傅里叶效应	214
8.4	微尺度对流传热	215
8.4.1	微槽内的单相对流传热	215
8.4.2	微尺度下气体可压缩性及稀薄效应	218
8.4.3	关于边界速度滑移与温度跃变	219
	参考文献	219
附录	高斯误差函数及其性质	222

第 1 章 热传导理论分析

导热是依靠物体内部微观粒子的热运动, 包括原子、分子、电子的平动和转动, 以及晶格的振动等来传递热量的物理现象, 它是自然界中热量传递的基本方式之一. 导热可发生在固体、液体或气体中, 与物体有没有宏观运动无关. 导热问题往往归结为求解物体内部的温度场以及相应的热流分布.

1.1 导热理论基础

1.1.1 傅里叶定律

傅里叶 (Fourier) 定律是对热量以传导方式进行传递时的基本规律的描述, 它表述为: 物体在导热过程中其内部某处的热流密度 q 与该处的温度降度 $-\partial\vec{T}/\partial n$ 成正比. 比例系数 k 称为导热系数, 单位 $W/(m\cdot K)$, 它是材料的基本热物性之一. 温度降度是一个矢量, 它表示该处温度变化率的最大值, 但指向是温度降低的方向. 傅里叶定律的数学表达式为

$$q(x, y, z, t) = -k \frac{\partial \vec{T}}{\partial n} \quad (W/m^2) \quad (1-1)$$

傅里叶定律将某一点的热流密度和其温度变化率联系起来, 一旦温度场求得, 热流密度就可确定. 另外, 从傅里叶定律也可了解导热系数 k 的物理含义, 其含义是: 单位厚度的平板材料, 当它两侧温差保持 $1^\circ C$ 时, 稳态下所能传递的热流密度值. 事实上, 根据这种原理所设计的测试方法, 正是实验测定材料导热系数的最常用方法. 不同材料的导热系数差别很大, 常温下空气的 k 值约为 $0.024 W/(m\cdot K)$, 水的 k 值约为 $0.6 W/(m\cdot K)$, 纯铜的 k 值约为 $398 W/(m\cdot K)$.

1.1.2 导热微分方程

处于静止状态各向同性的均匀物体, 内部含有热源, 单位时间单位体积内的产热量用 $g(\vec{r}, t)$ 表示, 则描述其内部各点温度随时间 t 变化规律的热传导微分方程为

$$\nabla [k \nabla T(\vec{r}, t)] + g(\vec{r}, t) = \rho c_p \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1-2)$$

式中, ρ 代表材料密度, c_p 为材料的定压比热. 导热微分方程是能量守恒与转换定律在导热问题中的具体体现. 它所代表的含义是: 物体内部在单位时间内传入和传出某微元体的热量之差, 加上微元体自身的产热量, 等于其内能随时间的变化率.

导热微分方程在不同情况下可以得到简化, 下面给出一些常用的简化形式.

当导热系数 k 为常数, 也即物体是各向同性时, 导热系数 k 可以提到梯度算子符号外, 方程化为

$$\nabla^2 T(\vec{r}, t) + \frac{1}{k} g(\vec{r}, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1-3)$$

式中, $\alpha = k/(\rho c_p)$, 称为材料的导温系数, 单位 m^2/s .

k 为常数, 又无内热源时, 方程化为傅里叶方程

$$\nabla^2 T(\vec{r}, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (1-4)$$

稳态条件下, 温度场与时间无关, 式 (1-4) 进一步简化成 Laplace 方程

$$\nabla^2 T(\vec{r}, t) = 0 \quad (1-5)$$

如果所涉及的问题是含有内热源的稳态导热问题, 则式 (1-3) 转化成泊松方程

$$\nabla^2 T(\vec{r}, t) + \frac{1}{k} g(\vec{r}, t) = 0 \quad (1-6)$$

1.1.3 不同正交坐标系中的热传导方程

现在进一步讨论在不同正交坐标系中热传导方程的展开形式. 在直角坐标系中, $k \neq \text{常数}$ 和 $k = \text{常数}$ 时热传导方程分别为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g(\vec{r}, t) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1-7)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{k} g = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1-8)$$

在圆柱坐标系内, $k \neq \text{常数}$ 和 $k = \text{常数}$ 时方程的形式为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1-9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{k} g = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1-10)$$

工程上有时会遇到另外两类圆柱坐标系中的特殊问题, 一类称为轴对称问题, 温度场不随轴向角变化, $\partial T / \partial \phi = 0$, 则方程化为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{k} g = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1-11)$$

第二类特殊问题称为极坐标问题, 温度场沿轴向无变化, $\partial T / \partial z = 0$, 方程化为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{1}{k} g = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1-12)$$

常物性物体在球坐标系中的热传导微分方程式为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{k} g = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1-13)$$

1.1.4 边界条件

热传导微分方程式是描述物体内部导热共性规律的数学表达式, 要能够求解还必须配合以对问题的特殊性进行描述的内容, 这就是“边界条件”。边界条件的物理含义是指, 在时刻大于零之后, 作用在求解区域边界上的、从而引起区域内部热响应的边界热状况。边界条件划分为三类, 分别表述被求解的区域边界上温度分布情况、热流密度分布情况以及边界与相邻流体之间的对流换热情况。

第一类边界条件是已知边界处的温度分布。设被求解区域有 m 个边界, 在边界 S_i 处 ($i=1, 2, \dots, m$), 已知的温度分布表示为

$$T = f_i(\vec{r}, t) \quad (1-14)$$

若边界上的温度为零, 即在边界 S_i 处, 有

$$T = 0 \quad (1-15)$$

则称为该边界有“第一类齐次边界条件”。此外, 边界温度保持恒定温度 T_0 的边界也满足第一类齐次边界条件, 只不过此时被求解的温度场需要以对 T_0 的过剩温度来表示。

第二类边界条件是已知边界面上温度的法向导数。由于热流密度与法向导数直接相关, 所以第二类边界条件就相当于给定了边界上热流密度的分布情况。在边界面 S_i 处第二类边界条件的表达式为

$$\frac{\partial T}{\partial n_i} = f_i(\vec{r}, t) \quad (1-16)$$

这里的法向导数的取向以求解区域向外为正, 向内为负; 相应地, 从边界处流入求解区域的热流为正, 流出为负。如果某个边界处的导数为零, 即

$$\frac{\partial T}{\partial n_i} = 0 \quad (1-17)$$

则称为“第二类齐次边界条件”, 即通常所说的绝热边界条件。

第三类边界条件是边界上的温度和它的法向导数的线性组合等于某一已知函数, 即

$$k_i \frac{\partial T}{\partial n_i} + h_i T = f_i(\vec{r}, t) \quad (1-18)$$

这里 k_i 和 h_i 都是已知的常数, 且二者不能同时为零. 式 (1-18) 本质上反映了温度随时间变化的流体与固体边界之间的对流换热关系, 流体通过对流方式传给边界的热量边界再以导热的方式传给物体内部. 如果

$$k_i \frac{\partial T}{\partial n_i} + h_i T = 0 \quad (1-19)$$

则称为“第三类齐次边界条件”, 相当于壁面以对流形式向温度为零的流体环境放热.

对于非稳态导热问题, 除了需要知道边界条件之外, 还需要知道“初始条件”. 初始条件是指在问题开始算起的零时刻, 整个求解区域内的温度分布情况, 也即

$$T(\vec{r}, t = 0) = f(\vec{r}) \quad (1-20)$$

1.1.5 齐次与非齐次问题

在正式讨论导热微分方程的求解方法之前, 有必要先明确一下非稳态导热边值问题的齐次性与非齐次性, 因为下面将要讨论的基本求解方法是建立在齐次问题之上的. 首先介绍导热微分方程的齐次性. 微分方程齐次是指方程本身由温度 T 及其各阶导数的线性组合构成, 对于非稳态导热, 齐次方程形式为

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1-21)$$

而带热源项的完整导热微分方程式 (1-3) 则是非齐次的. 如果热物性是随温度变化的, 则线性组合的条件不能满足, 方程也是非齐次的.

若微分方程和边界条件都是齐次的, 则该问题属于齐次问题. 齐次边界条件不论是第一类、第二类、第三类均可.

若微分方程和边界条件都是非齐次的, 或者两者中有一方是非齐次的, 则这类问题称为非齐次问题. 非齐次问题构成非线性的导热问题.

1.2 分离变量法

1.2.1 直角坐标系中的分离变量法

分离变量法是求解偏微分方程的一种有效方法, 其基本思路是将求解的多元函数表示成多个单元函数的乘积形式, 从而将一个多元函数的求解问题化为多个有相互联系的单元函数问题的求解. 所得到的最终解通常是级数求和形式. 对于直角坐标系中三维齐次热传导方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1-22)$$