大專用書

機率論

黃提源著

協進圖書有限公司 印行

機　率　論

民國六十五年八月初版
民國七十二年九月七版

著作者：黃　提　源

發行人：柯　水　源

發行者：協 進 圖 書 有 限 公 司
台北市羅斯福路三段316巷9弄4號
電話：(02) 393－8837

郵政劃撥：帳 戶 協 進 圖 書 有 限 公 司
帳號 19089

行政院新聞局登記證局版台業字第0045號

定價新台幣　　元

序　　言

這是一本機率理論導引書，適合於大學各學院機率論課程。爲彌補拙作“機率入門”的缺陷，特別將隨機變數的連續情況補充進去，使整個機率理論體系更趨完備，這就是本書出版的用意。

本書在清華大學數學系試敎過二年，工業工程系試敎過一年，學生對本書取材並不覺艱深，只要有微積分的數學程度即可應付。每星期三個鐘頭大概一個學期可敎完。

本書前五章是由拙作“機率入門”改編，最主要的是加進去一些需用微積分處理的例子，及相關係數（第四章第七節）。本書第四章的大部份定理，當隨機變數爲連續時，他們也照樣成立；將那些定理放在第四章的用意，爲給與最簡單的證明，即隨機變數爲離散情形時的證明，這也就是該章長達87 頁的原因。第六、第七章討論連續隨機變數所對應的各種情形。第八章簡單討論機率理論的應用；本章僅提及在作業研究及在可靠理論方面的應用，應用機率論最多的統計學本書反而不加提及，請讀者另行採用統計學專書。

本書的特點爲理論與應用兼備，相輔相成，尤其例子特別多，且解釋得特別詳盡。因此，採用本書爲敎本的敎授們，就有更多時間闡釋主要的觀念，而不必將所有的例子敎完，大部份的例子可留下來讓學生自己了解、揣摩，使他們自行領悟到理論與實際問題的密切關係，這是著者的用意，也是導引書籍應有的安排。本書的另一特點是着重在學習統計學所應具備的機率理論，尤其在抽樣理論及無母數統計學方面。

本書的一些例子、習題是由應用數學研究所蔡劍峰、林瑞泉、及陳景堂等研究生，從很多著名的機率論書籍中收集供給的。校對工作則由王迪聖、樊國貞二位研究生擔任。對以上諸君所給與的幫助，著者藉此表示十二萬分謝意。

著者才疏學淺，謬誤或疏漏的地方一定難免，祈望國內外專家、學者、讀者批評指正，只有這樣才能使這本書再版時更理想。

黃提源

謹識於國立清華大學應用數學研究所

目 錄

第一章　古典機率

§1-1　樣本空間

觀察某一現象，若已知其支配此現象的法則，則在某些條件限制下，其試驗結果完全可以預測，是為具有決定性者。如眞空中的自由落體運動，只要高度一定，不管物體重量的大小，其到達地面的時間一定。可是有些現象，雖然在某些條件限制下，其試驗結果並不能事先加以預測，是為非決定性者。例如丟一個銅板，並不能事先加以預測其出現結果為正面或背面，或既不是正面也不是背面，即使在同樣條件下（如同一高度）各投擲一百次，其結果也不一定一樣。求出一個現象的結果之過程，稱為**試驗**或**觀察**。為了有別於決定性現象的試驗，我們特將非決定性現象的試驗，稱之為**隨機試驗**，亦即實驗之結果具有隨機性或機遇性者。隨機試驗出現的結果，既然具有隨機性，因之似乎不能對這種隨機現象，獲得任何有價值的結論，其實不然，經驗告訴我們，很多隨機現象常具有某些**統計規則性**，使之便於研究。丟銅板的例子，就可以說明這一事實。當投擲銅板的次數夠大時，則出現正面的比例非常接近某一大於0，小於1的定數。若是構造均勻的銅板，且不考慮既不是正面也不是背面的可能性，則這一定數即為½，這就是我們認為銅板的正面、背面出現機會均等直覺之來由。為了使隨機試驗具有某些統計的規則性，我們規定隨機試驗有下列四個共通性：

(A)在隨機試驗未發生前，不能預測出現某一特別結果，但確知有一些可能的結果會出現：例如不能判定未出生嬰兒的性別，但確知不是女孩就是男孩（不考慮陰陽人的可能性）。

(B)在相同條件下，隨機試驗可重覆舉行：例如銅板可以投擲任意多的次數。

(C)隨機試驗具有某種機率型態：例如銅板的正面與背面出現機會均等的假設。機率測度（正式定義參看下節之定義1-8）數值的確定，通常以過去經驗的估計值為基礎，或純粹以假設為基礎。

(D)隨機試驗為理想的觀察過程：亦即假設(A)中吾人所能列出的結果為所有的可能結果，其他結果被假設為不可能；例如嬰兒的出生，假設非男非女的可能性為零。若已經確知其為可能出現的所有結果，則自然具備此特性。但人的智慧有時不能事先預知所有可能結果，故本特性假設在(A)中所知的結果即為所有可能的結果。其他結果不可能出現，有時這純粹是一種假設。

有了以上四個假定，我們得以定義樣本空間。

《 **定義1-1** 》隨機試驗 ε 之所有可能結果所組成的集合，稱為此隨機試驗的**樣本空間**，以S表示。樣本空間的每一元素（即每一可能結果）均稱為**樣本點**，或簡稱**樣本**，以 s 表示。

根據以上的定義，在決定一隨機試驗 ε 的樣本空間時，須知道一切“可能出現的結果”。對某一隨機試驗，什麼是我們所關心的結果呢？此常與隨機試驗的目的有關。例如投擲一枚骰子，若我們只對出現數字是奇數或偶數有興趣，而只記錄其結果是奇數或偶數，則可能出現的結果便只有奇數或偶數，即 S＝｛奇數，偶數｝；若只記錄出現的點數，則可能出現的結果為1點，2點，3點，…，6點，而 S＝｛1，2，3，4，5，6｝。由此可知，同樣的隨機試驗可有不同的樣本空間，這完全依照該隨機試驗的目的而定。

〔例1-1〕投擲一個銅板三次，順次觀察其出現正面和背面的結果，

試寫出其樣本空間。

解：　以H，T分別表正面、背面。若有序字列中的第 i 字（$i=1,2,3$），分別表第 i 次投擲的結果，則所求之樣本空間為 S＝{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT }

〔例1-2〕 投擲二枚相同骰子，試求出現點數所成的樣本空間為何？

解：　以數列 (a,b) 表二骰子出現點數為 a,b；如 (2,3) 表投擲二枚骰子，出現點數為 2，3，注意 (2,3) 與 (3,2) 同。則所求之樣本空間為

S＝{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5),
(1,6), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5),
(2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
(4,4), (4,5), (4,6), (5,5), (5,6),
(6,6) }

〔例1-3〕投擲二枚不相同骰子，試求出現點數所成之樣本空間為何？

解：　我們以 (a,b) 表第一枚，第二枚出現點數分別為 a,b；注意 (2,3)，(3,2) 乃不同的結果，則所求的樣本空間為

S＝{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }

〔例1-4〕電視機內有K個電線接頭，為明瞭故障原因，一一檢驗每

一個接頭以便查出故障的接頭，試寫出接頭故障數目的樣本空間。

解：檢驗的結果，可能沒有壞，也可能有一個，二個，三個，…，或K個壞，故所求之樣本空間爲

$S=\{0,1,2,\cdots,K\}$

〔例1-5〕停車場有N輛汽車，已知其中D輛汽車有毛病（$D\leq N$），檢查人員一輛一輛抽查，至最後一輛有毛病的車被發現爲止。若檢驗後不再放入停車場，試求所需抽出車輛數的樣本空間爲何？

解：若每次都抽中有毛病的車，則只需抽D輛車，就可把所有有毛病的車找出來；若有一次沒有抽中，則需抽D＋1輛車，…；若有N－D次抽中沒有毛病的汽車，則需抽N輛車才可發現那D輛車有毛病；故所需抽出的車輛數的樣本空間爲 $S=\{D,\ D+1,\ D+2,\ \cdots,\ N\}$

《**定義1-2**》有限樣本空間的每一部份集合（包括S及空集合ϕ）皆稱爲對此空間之一**事件**。S稱爲**必然事件**，ϕ稱爲**不可能事件**。一樣本點所成的集合稱爲**單一事件**。

例1-1中之{HHH，TTT} 表出現相同面事件。例1-2中之{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)} 表出現相同點事件。例1-3中之{(5,6),(6,5),(6,6)} 表出現點數和大於10之事件。例1-4中之{K} 表所有接頭皆壞之事件。例1-5中之{N} 表必須檢查所有車輛的事件。

請讀者注意：樣本空間之元素若僅有與自然數一一對應之無限多個即可數之無限多時，定義1-2仍然合適。不過當樣本空間爲不可數之無限多時，其每個眞子集合就不一定都是事件。這種情形超過本書

範圍，不擬加以討論。在實際應用方面，那種特別例子很少發生，在本書內姑且把定義 1-2 當眞。事件的嚴格定義請參看定義 3-3 。

因事件以集合表示，故若隨機試驗結果爲 s ，則以 $s\varepsilon A$ 表事件 A 發生。又依照定義，事件的聯集、交集、餘集仍爲事件。因爲若 $s\varepsilon A\cup B$ ，則或者 $s\varepsilon A$ 或者 $s\varepsilon B$ 或者 $s\varepsilon A$ 且 $s\varepsilon B$ ，故 $s\varepsilon A\cup B$ 表至少有一事件發生。若不產生誤會，今後用 $A\cup B$ 表至少有一事件發生的事件。$A\cap B$ 表兩事件同時發生的事件；$\overline{A}$ 表 A 不發生的事件。

《 **定義1-3** 》若 $A\cap B=\phi$ ，則稱 A ， B 爲二**互斥事件**，亦即事件 A ， B 不能同時發生。

〔例 1-6 〕設 A,B,C 表同一隨機試驗的三事件，試以集合符號表下列各事件：(a)至少一個事件發生的事件；(b)恰有一個事件發生的事件；(c)恰有兩個事件發生的事件；(d)不超過二個事件同時發生的事件。

解： (a)依聯集的定義， $s\varepsilon A\cup B\cup C$ 卽爲 s 至少屬於其中之一集合，故 $A\cup B\cup C$ 表 A ， B ， C 三事件中至少一個事件發生的事件。

(b)依交集定義， $s\varepsilon A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ 表 $s\varepsilon A$ 且 $s\varepsilon\overline{B}$ 且 $s\varepsilon\overline{C}$, 亦卽 A 發生而 B, C 不發生的事件，同理 $\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$ 表 B 發生，但 A ， C 不發生的事件。（很顯然地 $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ ，$\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$ 和 $A\cap\overline{B}\cap C$ 爲三互斥事件）故三個事件中只有一事件發生的事件可如下表示：

$$(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$$

(c)依(b)之討論，三事件中恰有二事件發生的事件，可以 $(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)$ 表示之。

(d)依聯集定義， $s\varepsilon\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 表 $s\varepsilon\overline{A}$, $s\varepsilon\overline{B}$ 和 $s\varepsilon\overline{C}$ 中至少有一成立，亦卽至少有一個事件不發生。故 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 表不超

過二個事件同時發生的事件。

〔例1-7〕袋中有重 5,10,15,…,30 磅的東西，每種不同重量的東西至少有兩個。從袋中順次取出二物，以X表第一次所取物之重量，Y表第二次所取物之重量，因之有序數對 (x, y) 爲該隨機試驗的樣本點。利用XY平面表示其樣本空間及下列各事件所含之元素。

(a) $A = \{(x, y) : X = Y\}$

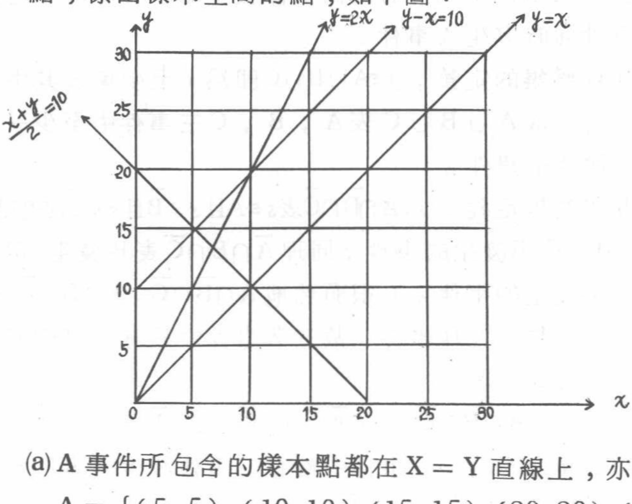
(b) $B = \{(x, y) : Y > X\}$

(c) $C = \{(x, y) : Y = 2X\}$

(d) $D = \{(x, y) : Y - X < 10\}$

(e) $E = \{(x, y) : (X + Y)/2 < 10\}$

解：在X，Y軸上分別取離原點爲 5,10,15,20,25,30 單位的點，標出樣本空間的點，如下圖：



(a) A 事件所包含的樣本點都在 X = Y 直線上，亦即

$A = \{(5,5), (10,10), (15,15), (20,20), (25,25), (30,30)\}$

(b) B 事件所包含的樣本點都在 X = Y 直線上方，即

$B=\{(5,10),(5,15),(5,20),(5,25),(5,30),$
$(10,15),(10,20),(10,25),(10,30),(15,20)$
$(15,25),(15,30),(20,25),(20,30),(25,30)\}$

(c) C事件所包含的樣本點都在 $Y=2X$ 直線上，即

$C=\{(5,10),(10,20),(15,30)\}$

(d) D事件所包含的樣本點都在 $Y-X=10$ 直線之下方，即

$D=\{(5,5),(5,10),(10,5),(10,10),(10,15),$
$(15,5),(15,10),(15,15),(15,20),(20,5),$
$(20,10),(20,15),(20,20),(20,25),(25,5),$
$(25,10),(25,15),(25,20),(25,25),(25,30),$
$(30,5),(30,10),(30,15),(30,20),(30,25),$
$(30,30)\}$

(e) E事件所包含的樣本點都在 $X+Y=20$ 直線之左下側，即

$E=\{(5,5),(5,10),(10,5)\}$

以上所討論的樣本空間都是有限集合，事實上有許多隨機試驗的樣本空間為無限集合，譬如平面上的點爲無限個，無法去數。若我們的隨機試驗爲“在平面上任取一點”，則該隨機試驗所成的樣本空間爲整個平面。在此特別提醒**讀者注意**，所謂集合之元素有無限多個，有兩種不同的情況：例如自然數及實數的集合爲兩種不同狀況的無限集合。一般言之，若可以和自然數成一一對應的無限集合稱爲**可數的無限集合**；反之，若不能和自然數成一一對應者稱爲**不可數的無限集合**。以下三個例子其樣本空間皆爲無限集合。

〔例 1-8〕袋中有三黑球，一白球，每次選取一球，取後再放回，此種動作一直作到抽中白球爲止。試求抽中白球所需選取之次數所成的樣本空間爲何？

解：　一抽可能就抽中白球；也可能第二次才抽中白球；也許第三次抽中，…，也許永遠抽不中白球。因之抽中白球所需

選取之次數所成的樣本空間爲：

$$S = \{ 1, 2, 3, \cdots \}$$

其中…表示一直到可數的無限多次。

〔例 1-9 〕從區間〔0,4〕及〔3,6〕各任選一數組成一有序數對，試求有序數對所成之樣本空間爲何？

解： 從閉區間〔0,4〕中任選一數，可選閉區間〔3,6〕中任一數與之配合。若以有序數對第一坐標表從〔0,4〕任選之數，第二坐標表從〔3,6〕任選之數，則所求之樣本空間爲：

$$S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, 3 \leq y \leq 6\}$$

〔例 1-10〕一對情人相約 12 時到 12 時 20 分之間在車站見面。若每人在約定時間內任意選擇適當的時間到達車站，試求他們在相約時間內到達車站所成之樣本空間爲何？

解： 以有序數對 (t_1, t_2) 表男方在 t_1 時間到達車站，女方在 t_2 時間到達，則樣本空間爲

$$S = \{(t_1, t_2) \mid 12\text{ 時} \leq t_1 \leq 12\text{ 時 }20\text{ 分}, \; 12\text{ 時} \leq t_2 \leq 12\text{ 時 }20\text{ 分}\}$$

§1-2 機率定義

機率（又稱概率，或然率，機會）理論今日已成爲數學中重要的一支，其理論且爲統計學之基礎。雖其應用已廣及自然科學與社會科學各部門，但其發展初期不甚引人注意，因此某些隨機現象的數字化只得成形於賭桌上。一六五〇年左右，法國賭博甚爲流行，且法律對此並不十分限制，擲骰子、樸克牌等賭博興起後，越賭越大，遂有賭

徒與當時的著名數學家巴斯噶（B. Pascal）在巴黎商討賭博獲勝的機會問題，而後巴斯噶又與友人飛馬（P. Fermat）討論，因此機率的理論基礎大致完成。因早期的機率問題是以玩樸克牌、擲銅板、丟骰子爲中心，故欲探討某一隨機現象中某一事件發生機率的大小，我們必須先介紹一個最早的機率定義。

《**定義1-4**》設一個樣本空間由 n 個元素組成，又設每一元素出現的機會相等，則定義事件A發生的**機率**爲A之元素個數與 n 之比，記爲

$$P(A) = n(A)/n$$

其中 $n(A)$ 表A之元素個數。

這個定義是拉普拉斯（P.S. de Laplace）於一八〇〇年左右所提出的機率定義。此一定義就是說在隨機試驗中，某事件發生之機率乃是某事件可能發生的個數與該隨機試驗所有可能發生的總個數之比。此一定義不但適用於機遇性遊戲，而且符合直覺觀念。但每一元素出現的機會相等這一假設有時是不切實際的。例如，我們不能假設一個銅板正面、背面出現機會相等，也未見得可以假設骰子之每面出現機會相等。不過爲了易於求機率起見，拉普拉斯不得不事先作了如是牽强的假設。因此，拉普拉斯的機率定義有時稱爲**事前機率**，或**古典機率**，或**先天機率**。

〔例1-11〕試求在例1-5中，檢查人員須檢查到最後一輛車的機率爲何？假設樣本點出現的機會相等。

解：由例1-5知S中共有 $N-D+1$ 個元素，而檢查到最後一輛車爲其中的一種情形，故依定義1-4知，檢查到最後一輛車之機率爲 $\dfrac{1}{N-D+1}$。

〔例1-12〕從一付52張橋牌中，任抽一張。若每一張被抽中的機會相等，試求抽中A之機率為何？

解：52張牌的每一張均有可能被抽中，故樣本空間中共有52個元素。又每付牌共有4張A，依定義1-4知抽中牌A之機率為 $\dfrac{4}{52}=\dfrac{1}{13}$。

〔例1-13〕六張牌分別寫上A、B、C、D、E、F六個字，經過充分洗牌後，試求上面四張牌的英文字上下次序為DEAF的機會為何？假設六張牌出現各種不同次序的機會相等。

解：因為經過充分洗牌後，出現各種不同次序的機會相等，故最上面一張可能有六種不同英文字母出現。但第一張出現後，已知某一英文字母，第二張僅可能有五種不同英文字母出現，故總共可能出現 $6\times 5=30$ 種。同理，第三張僅可能有四種不同英文字母出現，而第四張可能有三種不同英文字母。因之，第四張出現時（樣本空間）總共有 $30\times 4\times 3=360$ 種。但是第一張D，第二張為E，第三張為A，第四張為F僅是其中的一種，故依定義1-4，抽中上面四張為DEAF的機率為 $\dfrac{1}{360}$。

計算事件A可能發生結果的個數及樣本空間所含元素之個數，將在第二章詳細討論。

〔例1-14〕設S為由滿足 $|x|+|y|\leqslant 100$ 之整數解 (x,y) 所構成之樣本空間。從S中任選一有序數對，若機會均等，試求被選中的有序數對滿足不等式 $|x|+|y|<100$ 之機率為何？其中若 $a\neq b$ 則 (a,b) 與 (b,a) 是不同的整數解。