

数学控制论基础

杨晓松 编著



科学出版社

数学控制论基础

杨晓松 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书以有限维线性系统为核心,围绕着系统的可控性和可观测性、系统的稳定性及反馈镇定,以及有界控制和 Bang-Bang 原理,系统地阐述了控制理论的基本概念和数学理论,并对几何控制理论的要点给出了简洁介绍.

本书不仅具有数学的严谨性和相当的理论深度,也兼顾到控制概念的物理意义和工程背景,因此既适合数学专业高年级本科生及低年级研究生阅读,也适于为加强控制理论数学基础的其他学科的研究生和科技人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

数学控制论基础/杨晓松编著. —北京: 科学出版社, 2012

ISBN 978-7-03-033672-9

I. ①数… II. ①杨… III. ①控制论-数学理论-高等学校-教材

IV. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 032560 号

责任编辑: 李 欣 赵彦超 / 责任校对: 张怡君

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

装 订 厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012年3月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2012年3月第一次印刷 印张: 10 1/2

字数: 197 000

定价: 39.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

随着计算机技术和通信技术的发展和应用,自动控制理论和技术不仅在航天航空、机器人控制、导弹制导及核动力等高新技术领域应用愈来愈深入,而且在生命科学、医学、环境控制、经济管理等其他许多社会生活领域中也有着广泛的应用,从而在相当程度上成为现代社会生活不可或缺的一部分.可以说,随着科技进步和人们生活水平的提高,在建设高度文明和发达社会的进程中,自动控制理论和技术必将进一步发挥更加重要的作用.一个愿意从事应用数学研究的学生,将自动控制的有关数学理论作为自己的研究领域不失为一个上佳的选择.

由于现代科技特别是信息科技的飞速发展,人们日益认识到数学的重要性和丰富性,特别是有了信息数学的说法.控制理论是一门如何运用信息来调节系统(自然系统或人工系统)行为的数学理论,因此是一门名副其实的信息数学.

令人有些遗憾的是,虽然国内很多高校数学系为本科生设立了信息与计算专业,但开设的课程大多不包括控制理论.另一方面,当许多数学专业的本科生或硕士生转到控制理论研究领域的时候,要么是控制理论的科学与工程背景不足,要么是数学理论基础不到位,这可能就是为什么学数学出身的控制论研究者大多集中在做系统的稳定性分析的缘故.作者在数学本科生的教学过程中发现一个现象:当学生首次接触控制论的时候,认为这不过是工程技术学科,是工科学生学的,没什么数学含金量;当逐步了解后又觉得其中的数学太多太难.因此作者感觉到有必要为数学专业的学生们介绍一下控制理论,希望让学生们在短时间内知晓控制理论既是应用背景明确的技术理论,也是理论严谨和结论优美的数学理论.

《数学控制论基础》这本书就是对此作一个尝试.本书主要讨论的是控制理论最为基础的部分,即线性系统的控制理论.一个想要真正对现代控制理论有透彻了解的人首先应该好好研究一下线性系统的控制理论.从数学角度讲,即使线性控制系统理论也会涉及到数学的许多深刻领域.

为了使读者首先对控制理论有个概观性了解,本书先对控制理论的基本概念和控制理论技术的发展历史作了简单阐述,并对控制理论所涉及的数学理论给出了简要说明,然后阐述了线性控制系统的基本理论.线性控制系统的基本理论主要包括系统的可控性、系统的可观测性、系统的稳定性、系统的状态反馈控制和系统的输出反馈控制.鉴于有界控制系统的实际意义很强而数学理论缺乏,与通常的入门书不同,本书还特意介绍了有界控制系统,即输入有界的线性系统的控制理论,为那些欲尽早进入研究领域的读者提供一个有趣的课题.此外,本书最后还开辟一章

对非线性系统的几何控制论作一入门介绍, 因为该理论不仅自身优美, 而且对航天器、机器人以及其他机械系统控制原理的研究非常有用.

以作者的经验, 如果要对线性系统的控制理论有个首尾一贯的理解, 学习者应对常微分方程的基础理论有比较深入的了解. 此外, 对常微分方程中线性系统的一般解的结构或状态转移矩阵应有透彻的理解. 从某种意义上讲, 状态转移矩阵的基本理论是线性控制系统理论的基石.

本书在写作过程中, 熊山山同学帮助整理了书稿, 并和宦颂梅同学一起对书稿做了校对, 作者对二位同学深表感谢, 同时也感谢参加数学控制论讨论班的其他老师和同学. 此外, 作者还要感谢华中科技大学研究生教改基金对本书的资助.

由于作者才疏学浅, 又是首次撰写教科书, 书中的不足和错误在所难免, 读者若能将其中的不足和错误反馈给作者, 将不胜感激.

杨晓松

于华中科技大学瑜园

目 录

前言

第 1 章 引言	1
1.1 什么是数学控制论	1
1.1.1 什么是控制系统	1
1.1.2 控制理论的基本要素和数学基础	2
1.1.3 控制理论与其他学科的比较	3
1.2 控制理论的历史和发展前景	4
1.2.1 控制理论诞生前的一点历史	4
1.2.2 控制理论的诞生	6
1.2.3 控制理论发展进程	7
1.2.4 控制理论发展前景	8
1.3 一个实例	9
1.4 推荐几本书	12
1.5 评注	12
第 2 章 线性系统的可控性	13
2.1 线性常微分方程的几个基本事实	13
2.2 可控性定义与判定: 基于 Gram 矩阵的可控性	16
2.3 可控性的 Kalman 秩条件	21
2.4 时不变系统 Kalman 秩条件补充讨论	25
2.5 时不变线性控制系统的若干性质	30
2.6 控制系统的标准形与 Kalman 分解	34
2.7 时变线性控制系统的秩条件	40
2.8 可达集与 Hilbert 唯一性方法	43
2.9 非线性系统局部可控性的线性化判别法	48
2.10 可控性的例子	52
2.11 评注	58
习题	59
第 3 章 线性系统的可观性	63
3.1 可观性 Gram 矩阵	63
3.2 线性控制系统的对偶原理	64

3.3 系统可观测的秩条件	66
3.4 可观测标准型	69
3.5 不完全可观测系统的标准分解	72
3.6 反馈对系统可控性与可观测性的影响	74
3.7 评注	76
习题	76
第 4 章 线性系统的稳定性	79
4.1 控制系统稳定性的基本概念	79
4.2 控制系统的内稳定性	80
4.3 基于 Liapunov 方法判断控制系统的稳定性	82
4.3.1 稳定性的一般定义与 Liapunov 稳定性判别方法	82
4.3.2 定常线性系统的 Liapunov 方法	89
4.4 控制系统输入输出稳定性	92
4.5 控制系统的可探测性	96
4.6 评注	99
习题	100
第 5 章 线性系统的镇定性	103
5.1 线性系统的稳定与镇定	103
5.1.1 极点配置问题	103
5.1.2 Gram 矩阵与镇定	107
5.2 控制系统的反馈镇定	111
5.3 评注	123
习题	123
第 6 章 有界控制和 Bang-Bang 原理	126
6.1 有界控制	126
6.2 Bang-Bang 控制	128
6.3 评注	134
习题	135
第 7 章 几何控制论初步	136
7.1 非线性控制系统	136
7.2 可控性与可接近性	139
7.3 向量场的 Lie 括号	140
7.4 仿射系统可控性与可接近性的 Lie 代数判定	143
7.5 小车和刚体航天器的可控性	147
7.6 镇定问题的 Brockett 定理	149

7.7 评注	151
习题	151
附录 反函数定理	153
参考文献	157

第 1 章 引 言

1.1 什么是数学控制论

控制理论是指用来分析和综合控制系统的数学体系, 因此数学控制论是面向应用的一门数学分支——应用数学或工程数学. 具体来说, 数学控制论是研究控制系统的分析 (稳定性、可观测性和可控性等) 与设计 (综合、控制器、观测器设计) 的基本原理的数学理论.

1.1.1 什么是控制系统?

对一个自然的或人工的系统施加一定的影响使其动态行为满足既定的要求或达到给定的目标, 就是控制, 相应的系统就是控制系统.

控制理论和技术 (或自动控制) 的核心是反馈, 现代控制把反馈看做处理不确定性的工具. 即使不知道系统准确的动态响应或者外部干扰引起系统产生的错误响应, 只要通过测量系统的输出, 与参照量相比较, 并依据输出量和参照量的差值调整容许的控制输入, 也能够使系统有正确的响应和动态行为. 这是工程系统的一个基本特性, 因为工程系统必须在各种条件下可靠和高效地运行. 反馈控制作为一种手段可以保证系统在不确定性环境下的鲁棒性, 因此在现代技术社会里, 反馈控制系统广泛地存在于人们的周围和实际生活中. 比如, 反馈控制系统存在于汽车和家用电器中, 存在于工厂和通讯系统中, 存在于运输系统、军事装备及太空系统中.

控制理论和技术的应用极其广泛, 并涉及大量不同领域. 如机电系统的控制是利用计算机控制的执行器和传感器来调节系统的动态; 电子系统的控制是利用反馈来补偿元件或参数变化, 以保证可靠的、可重复的特性; 信息和决策系统的控制, 则是根据对未来需求的估计完成有限资源的动态分配. 此外, 在诸如生物、医药和经济学等领域也能发现控制规律的应用, 其中随处可见反馈机制. 值得注意的是, 反

馈控制 (调节) 也普遍存在于科学和自然界中. 比如生物系统通过反馈来保持热、化学和生物条件的动态平衡; 全球气候的动态取决于大气、海洋、陆地和太阳间的相互反馈; 生态学中也充满了反馈的例子, 生态平衡源于动物和植物间的多层次的相互作用, 这是一种复杂的反馈机制. 在市场经济中, 通过市场以及商品与服务的交换, 经济活动是建立在反馈调节之上的. 补充一点, 控制理论的思想也 (有意或无意地) 广泛地出现在各级行政管理模式中, 计划经济和市场经济的利弊也可以用控制理论得到合理解释.

1.1.2 控制理论的基本要素和数学基础

控制理论的研究主要有两大主线:

1. 优化系统的行为 —— 最优控制.
2. 调节系统的行为、克服系统行为的不确定性 —— 反馈控制.

控制理论的不同研究领域需要的数学理论不尽相同, 甚至需要多方面的数学基础, 不过依据研究对象和数学描述的工具, 大致还是可以做如下说明的.

1. 线性系统控制: 线性代数、常微分方程.
2. 随机控制系统: 概率论、随机过程和随机微分方程.
3. 集中参数控制系统: 变分法、常微分方程、泛函分析.
4. 分布参数控制系统: 偏微分方程、泛函分析、线性算子半群理论等.
5. 非线性控制系统: 微分几何的现代理论、微分拓扑、常微分方程、Lie 群及 Lie 代数.
6. 离散事件动态系统: 线性代数、图论、极大代数.
7. $H-\infty$ 控制: 泛函分析、算子理论.
8. 自适应估计与控制: 概率论、随机过程等.

1.1.3 控制理论与其他学科的比较

除了各类数学分支外, 控制理论主要依赖于物理学 (动力学和建模)、计算机科学 (信息和软件) 和运筹学 (优化和博弈理论) 等方面的研究成果, 但在角度和算法上却存在不同之处.

和其他科学理论的关键区别是, 控制理论基本上是一门面向工程的科学. 与理解自然的自然科学不同, 工程科学的目的在于理解和发展造福于人类的人工系统. 典型的例子是对人类生活作出重大贡献的交通、电子、通讯和娱乐系统. 控制工程最早以矿山采矿、民用建设、机械工程、电子和计算等传统学科形式出现, 作为系统学科的控制则出现在 1950 年前后, 其发展速度却远远超出了这些传统学科.

控制科学的最高成就是发现能够作为分析复杂合成系统新的基本理论, 而反馈显然是这样的一种理论, 它对工程系统产生了深远的影响. 控制和其他学科之间的最大重叠区应该是物理系统的建模, 而建模是所有工程和科学领域的交叉点. 面向控制的建模和基于其他学科的建模之间的基本区别之一体现在各子系统间相互作用的表示方式不同. 控制依赖于输入输出建模, 这允许人们从各种全新的角度考虑系统行为, 如抑制干扰并加强稳定性的内部连接. 此外, 模型降阶, 即从高精度模型推导出一个简化的低精度模型, 使得人们自然地需要一个输入/输出模型框架. 需要强调的是, 控制意义上的建模允许设计子系统间的鲁棒连接, 这是保证所有大型工程系统正常运行的重要因素.

控制和运筹学领域也共享了许多概念和工具, 而优化和微分博弈在控制和运筹学中也都有十分重要的作用. 当存在不确定性时, 两者都可解决资源分配问题. 在控制领域, 动力学和互联 (反馈) 的作用以及稳定性和动态性能的概念是最基本的. 控制, 特别是现代控制, 与计算机科学技术的发展也是密不可分的. 实际上, 所有的现代控制算法都是用软件来实现的. 但控制算法和软件与传统的计算机软件有着极大的区别. 系统的物理特性 (动态) 在分析和设计系统时是十分重要的. (硬的) 实时性是实现的核心问题. 从软件的角度看, 现代汽车或飞机只是一个外围设备. 然而从控制汽车和飞机的角度看, 计算机只是实现反馈的载体.

1.2 控制理论的历史和发展前景

控制理论 (或自动控制) 的核心概念是反馈, 反馈控制是控制工程和技术的核心问题, 其进展同人类社会发展过程中需要解决的各种实际问题密切相关。

1.2.1 控制理论诞生前的一点历史

控制思想与技术的存在已有数千年的历史, “控制” 这一概念本身即反映出人们对驾驭自然的需求与渴望, 因此控制理论与技术也自然而然地在人们认识自然与改造自然的历史进程中发展和进化。下面列举几个具有时代特征的典型例子。

1. 公元前 300 年到公元 1200 年, 古希腊人和阿拉伯人为精准计时发展了水钟 (water clock)。大约公元前 270 年, 希腊人 Ktesbios 为水钟发明了浮子调节器 (float regulator), 其功能是使水钟的第一级水箱的水位保持常值: 如果水箱水位下降, 浮子的作用使得水龙头的阀门打开, 以补充水箱失去的水量, 其调节方式同现在马桶水箱中的浮球和塞子差不多。

公元 800 年到公元 1200 年, 一些阿拉伯工程师将浮子调节器应用于其他方面, 这期间最重要的改进是运用了 “开/关” 反馈原理。不过当 1258 年巴格达沦陷于蒙古人之手的时候, 这类反馈思想也随之走到尽头。特别是 14 世纪的机械钟表的诞生使得水钟及其反馈控制系统寿终正寝。值得一提的是, 发明于西周时代和三国时期流行的指南车 (图 1.1) 也蕴涵了反馈控制思想, 虽不是一个严格意义上的自动控制系统, 至少也可以叫做准反馈控制系统。

2. 反馈控制的发展契机当属 18 世纪的工业革命时代。大约 1769 年, 英国人瓦特发明了蒸汽机, 开启了工业革命的时代。蒸汽机的主要工作原理是运用蒸汽引擎产生旋转输出, 而蒸汽机能够投入实际使用要得益于离心调速器的发明。当时的主要问题是蒸汽机产生的旋转输出不稳定, 使得对应的机械系统旋转速度时快时慢, 因此亟待解决的问题是旋转速度的调节。为此瓦特于 1788 年左右完成了如图 1.2 的离心飞轮调节器 (centrifugal flyball governor), 运用这种调节器人们就可以有效地调节蒸汽引擎的旋转速度。

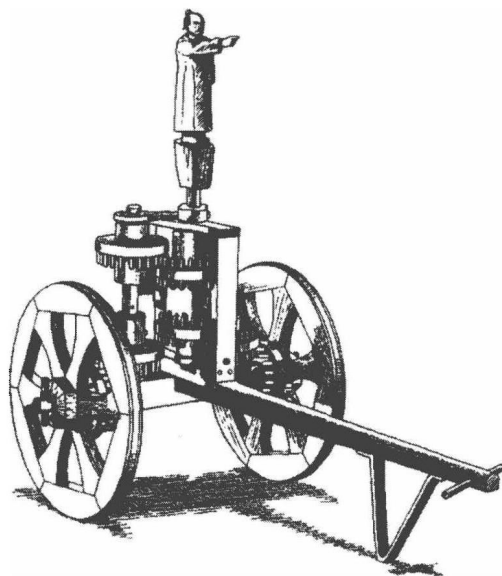


图 1.1 指南车

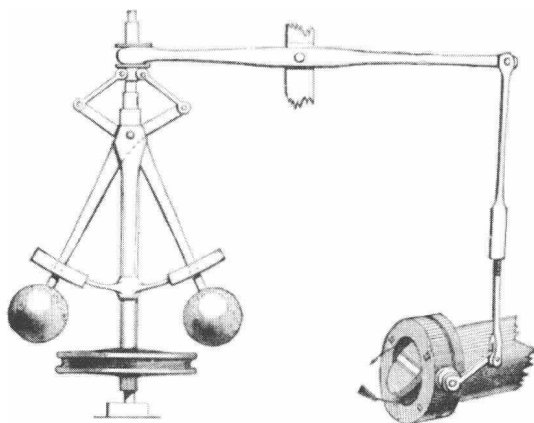


图 1.2 离心飞轮调节器

离心飞轮调节器的速度调节原理大致如下：当蒸汽机旋转过快时，飞轮在离心力的作用下就飞摆起来，由此带动连杆导致蒸汽阀门变小。驱动蒸汽机的蒸汽变少自然导致蒸汽机旋转变慢，这又使得飞轮下摆，从而又导致蒸汽阀门变大，使得蒸汽机得到更多的蒸汽从而提高转速，于是最终使得蒸汽机自动地达到设定的速度。

需要说明的是, 瓦特的离心飞轮调节器的设计在一定程度上得益于此前 18 世纪 40 年代英国水车工匠们在研制水车时发展的旋转速度传感技术和控制技术。

顺便说明一下, 由于区域供水分布系统和蒸汽机中水位调节的需要, 浮子调节器在 18 世纪又获得新生, 现在这种东西还陪伴着你我, 只要打开马桶水箱盖就知道。

1.2.2 控制理论的诞生

直到工业革命时期, 反馈控制系统的设计基本上是基于工程直觉和尝试方法, 因此当时的反馈控制与其说是科学不如说是手艺。到了 19 世纪中叶, 数学首次被用来分析反馈系统的稳定性。因此不妨说, 19 世纪才是控制理论的开始。当时英国皇家天文台的天文学家 Airy 为使天文望远镜有效地克服地球旋转对其瞄准稳定性的影响, 开发了一套反馈装置。不幸的是, 当他把这套反馈控制装置用于望远镜时, 发现如果设计不当就会造成望远镜的抖动。为弄清原因, Airy 首次运用当时发展的微分方程理论对由此得到的闭环系统的不稳定性进行了数学研究。20 多年后, 英国著名科学家麦克斯韦 (James Clerk Maxwell) 为研究瓦特飞轮离心调节器的稳定性, 运用微分方程线性化技术对此系统进行研究, 发现了对应于线性化方程的特征方程的根的分佈同稳定性的关系, 由此开控制系统理论研究的先河。

接下来反馈控制的又一发展激励同两次世界大战有密切关系。这期间, 反馈控制系统的发展已经是一个生存攸关的问题。战争期间, 舰船的控制和导航是一个重要的问题, 1910 年, Sperry 发明了回转器陀螺仪 (gyroscope) 用来帮助镇定和驾驶船舶, 该技术后来用于飞机的控制和导航。

1922 年, 为了有效地控制和驾驶轮船, Minorsky 提出了所谓的三项控制器即现在所称的 PID-控制器 (proportional-integral-derivative controller)。这可能是人们首次将 PID-控制器方法运用于实际问题。

舰载和机载武器的瞄准的技术问题促成了伺服机构的数学理论研究, 二战时期的雷达技术的产生和发展同美国麻省理工学院的辐射实验室 (M.I.T. Radiation Laboratory) 开展的大量控制理论研究密切相关。

随着二战的结束,以单输入单输出反馈控制系统为研究对象的、建立在频域方法基础上的经典控制理论得以形成,并于 50 年代发展成熟。

1.2.3 控制理论发展进程

20 世纪初期,控制理论和技术在新兴的电子领域中得到了广泛的应用。例如,虽然真空电子管器件运行时相关参数变化很大,反馈控制却能使这些系统自动保持恒定的性能。随着单输入单输出反馈控制系统方法的发展,20 世纪 40 年代已建立了控制理论的理论基础。这些方法包括用于建立模型和分析频率响应和稳定性的传递函数法和 Bode 图法,以及研究反馈系统稳定性的 Nyquist 图和增益/幅值裕度。通过设计反馈回路,减少干扰对闭环系统的影响,保证系统的稳定性和具有抗干扰能力。所以这一阶段的控制技术发展所形成的理论被定义为经典控制理论,现在仍是全世界工科学生控制课程的基础。

20 世纪 50 年代,在蓬勃兴起的航空航天技术的推动和计算机技术飞速发展的支持下,控制理论主要研究如何针对多变量系统的控制建立方法与工具。其中必须同时设计众多的强耦合回路,由此控制理论在 60 年代前后有了重大的突破和创新。这是控制理论发展的第二阶段。其研究方法和工具广泛地使用了控制系统的状态空间表示法,并与数值优化和最优控制相结合。这些早期的状态空间方法主要是利用线性常微分方程来研究系统的响应,同时通过配置闭环系统的特征根来保证稳定性。在此期间,理查德·贝尔曼 (Richard Bellman) 提出寻求最优控制的动态规划法,庞特里亚金 (L. Pontryagin) 证明了极大值原理,使得最优控制理论得到极大的发展。最优控制理论给出了使某种代价函数最小的控制器的精确条件,其解或以开环输入,或以闭环反馈律的形式给出。卡尔曼 (Rudolf Kalman) 系统地把状态空间法引入到系统与控制理论中来,并提出了能控性、能观测性的概念和新的滤波理论。估计理论也受益于最优控制的研究成果,开发了卡尔曼滤波器 (卡尔曼滤波器可以根据 (少) 部分可测信号估计系统的内部状态),并很快使之成为在许多领域里应用的标准工具。这些都构成了后来被称为现代控制理论的发展起点和基础。

现代控制理论以线性代数和微分方程为主要的数学工具,以状态空间法为基础,分析与设计控制系统。状态空间法本质上是一种时域的方法,它不仅描述了系统的外部特性,而且描述和揭示了系统的内部状态和性能。它分析和综合的目标是

在揭示系统内在规律的基础上实现系统在一定意义下的最优化。

最后, 有一种观点认为, 20 世纪 80 年代控制理论进入了第三发展阶段, 即所谓的“鲁棒多变量控制”。在系统存在不确定性时, 鲁棒多变量控制能够为期望的闭环系统的动力学特性提供强有力而严格的方法。在许多方面, 鲁棒控制从早期的控制理论中借鉴了一些关键思想, 其中不确定性是设计方法的重要因素。从数学角度看, 算子理论大有用武之地。

1.2.4 控制理论发展前景

随着控制系统与理论的发展, 新的应用机遇将不断涌现, 这主要体现在如下几个方面:

控制的影响体现在广泛的应用中, 如航空航天和交通运输、信息和网络、机器人和智能机械、材料和加工、生物和医药。它将使人们能够构建更复杂的系统, 并保证所构建的系统是可靠、高效和鲁棒的。

在新兴领域如纳米技术、量子力学、电磁学、生物学和环境科学, 探索控制技术的高风险和潜在应用, 特别是从整体的系统相互作用和耦合的角度上认识生命, 为控制理论发展带来诸多挑战和机遇。在这个意义上, 具有扎实的数学控制理论理论基础和应用学科背景的双重身份的研究者在进行多学科间的交叉研究时就容易抓住发展机遇, 进行卓有成效的研究。

控制是国防系统的关键技术, 控制使人们能够利用自主或半自主系统实施困难和危险的任务, 也可以利用先进成熟的指挥和控制系统构成鲁棒的、可重构的决策系统。在微系统和传感器网中, 控制技术的应用将大大提高检测威胁的能力, 避免造成损失。在通讯系统中, 反馈的应用将在动态不确定和敌对的环境中提供可靠、灵活、安全的网络。为了在新的应用中实现控制, 需要发展新的方法和算法。

控制理论与数学各个分支的联系日益密切, 相互合作日趋广泛, 而控制学科的强大之处正在于它与严格数学理论间的紧密联系。因此, 数学控制理论的进步对现代生活也将越来越重要。

1.3 一个实例

为使读者对反馈控制有个初步认识,下面以倒摆为例对此作一简单说明. 杂技演员的顶杆技术是个典型关于倒摆的反馈控制,表演时杂技演员根据杆的晃动位置和速度及时调整自己的平衡策略,使得杆子竖立不倒,并尽量保持直立,用专业术语来说就是反馈镇定.

由于杂技演员顶杆的控制原理分析起来稍嫌复杂,为方便起见,以小车倒摆(见图 1.3)的平衡控制为例来说明反馈控制原理是如何应用于倒摆平衡控制的. 当人们只关心倒摆是否直立而忽略小车的位置时,倒摆的简化模型可以描述如下

$$\ddot{\theta} = a \sin \theta - b \dot{\theta} + cu \cos \theta, \quad (1.3.1)$$

其中 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ 是倒摆物理参数所决定的常数, u 是对倒摆施加的控制力(实际上 u 是对小车施加的力,但是运用非惯性坐标系变换,可以等价地将 u 视为直接对倒摆施加的力).

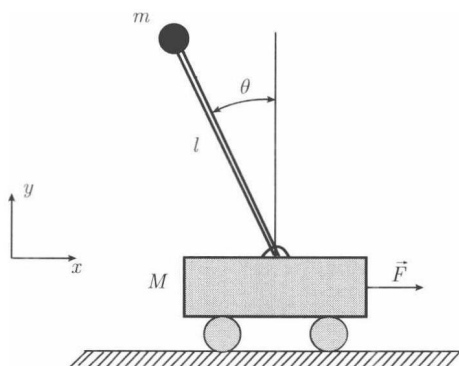


图 1.3 小车倒摆

命 $x = \theta$, $y = \dot{\theta}$, 有

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= a \sin x - by + cu \cos x. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$