全国大学生数学竞赛辅导教程

National Mathematical Contest Tutorial for College Students

■ 尹逊波 杨国俫 主编

哈爾濱工業大學出版社
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书依据近三年全国大学生数学竞赛非数学专业的竞赛内容，将高等数学分为极限与连续、一元微分、一元积分、多元微分、多元积分、常微分方程、无穷级数七个专题，对竞赛所涉及知识点和考点进行分类整合.全书分为基础篇与提高篇两部分:基础篇部分主要包含基本知识的总结及配套练习;提高篇部分则涉及一些综合面广、技巧性强的题目，书后还给出了近三年全国大学生数学竞赛的试题及近些年全国各省市及高校的竞赛试题作为学生备考的试题参考.

本书可供准备参加全国大学生数学竞赛的非数学专业的学生和老师作应试教程，也可作为各类高等学校学习高等数学和考研的参考书，由于书中题目均有解答，它也适合学生作自学使用.

图书在版编目(CIP)数据

全国大学生数学竞赛辅导教程/尹逊波，杨国俅主编.——哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社，2012.7
ISBN 978-7-5603-3605-3

Ⅰ.①全… Ⅱ.①尹… ②杨… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 124764 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 14 字数 271 千字
版　　次 2012 年 7 月第 1 版 2012 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3605-3
定　　价 28.00 元

前　　言

2009 年 10 月，全国大学生数学竞赛首届比赛开始举办，到现在已经是第三届了. 作为一项面向本科生的全国性高水平学科竞赛，全国大学生数学竞赛为青年学子提供了一个展示数学基本功和数学思维的舞台，为发现和选拔优秀数学人才并促进高等学校数学课程建设的改革和发展积累了调研素材.

本书是针对非数学专业的全国大学生数学竞赛编写的，书中很多例题选自国内、外大学生数学竞赛的一些特色试题，基于数学竞赛复习备考的特点，全书共分为基础篇与提高篇两大部分. 考虑到参加竞赛的学生多为大二、大三的学生，对大一所学高等数学的内容很多有所遗忘，故本书前一部分的基础篇分为知识点及自测试题，知识点旨在帮助学生将所学高等数学知识做一个复习和总结，而自测题则是测试学生对基础知识的掌握. 对基础知识非常熟悉的同学，可以跳过第一部分，直接进入提高篇. 本书这一部分列有大量的例题，我们依据内容将例题分为极限与连续、一元微分、一元积分、微分方程、多元微分与空间解析几何、多元积分及无穷级数七个部分. 这里所举的例题构思绝妙，方法灵活，技巧性强，易于学生掌握竞赛试题的难度及竞赛考察的知识点. 在提高篇内，我们还给出了近十套国内省市或高校竞赛的全真试题，可供学生备考练习. 本书最后还给出了近三届全国大学生数学竞赛的试题及解答，供学生参考.

本书可供准备参加数学竞赛的老师和学生作为应试教程，也可供各类高等学校的大学生作为学习高等数学和考研的参考书，特别有益于成绩优秀的大学生提高高等数学水平. 编者在教学改革过程中得到哈尔滨工业大学理学院王勇院长，数学系郑宝东教授、刘维国教授、白红教授的大力支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢.

由于时间仓促，水平有限，编写中难免存在不当和错误之处，请读者批评指正，编者表示万分感谢！

尹逊波

2012 年 3 月

中国大学生数学竞赛竞赛大纲(初稿)

为了进一步推动高等学校数学课程的改革和建设，提高大学数学课程的教学水平，激励大学生学习数学的兴趣，发现和选拔数学创新人才，更好地实现“中国大学生数学竞赛”的目标，特制订本大纲.

一、竞赛的性质和参赛对象

“中国大学生数学竞赛”的目的是：激励大学生学习数学的兴趣，进一步推动高等学校数学课程的改革和建设，提高大学数学课程的教学水平，发现和选拔数学创新人才.

“中国大学生数学竞赛”的参赛对象为大学本科二年级及二年级以上的在校大学生.

二、竞赛的内容

“中国大学生数学竞赛”分为数学专业类竞赛题和非数学专业类竞赛题，其中非数学专业竞赛内容为大学本科理工科专业高等数学课程的教学内容，具体内容如下：

一、函数、极限、连续

1. 函数的概念及表示法、简单应用问题的函数关系的建立.

2. 函数的性质：有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 复合函数、反函数、分段函数和隐函数、基本初等函数的性质及其图形、初等函数.

4. 数列极限与函数极限的定义及其性质、函数的左极限与右极限.

5. 无穷小和无穷大的概念及其关系、无穷小的性质及无穷小的比较.

6. 极限的四则运算、极限存在的单调有界准则和夹逼准则、两个重要极限.

7. 函数的连续性(含左连续与右连续)、函数间断点的类型.

8. 连续函数的性质和初等函数的连续性.

9. 闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理).

二、一元函数微分学

1. 导数和微分的概念、导数的几何意义和物理意义、函数的可导性与连续性之间的关系、平面曲线的切线和法线.

2. 基本初等函数的导数、导数和微分的四则运算、一阶微分形式的不变性.

3. 复合函数、反函数、隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法.

4. 高阶导数的概念、分段函数的二阶导数、某些简单函数的 n 阶导数.

5. 微分中值定理,包括罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒定理.

6. 洛必达(L'Hospital)法则与求未定式极限.

7. 函数的极值、函数单调性、函数图形的凹凸性、拐点及渐近线(水平、铅直和斜渐近线)、函数图形的描绘.

8. 函数最大值和最小值及其简单应用.

9. 弧微分、曲率、曲率半径.

三、一元函数积分学

1. 原函数和不定积分的概念.

2. 不定积分的基本性质、基本积分公式.

3. 定积分的概念和基本性质、定积分中值定理、变上限定积分确定的函数及其导数、牛顿一莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式.

4. 不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法.

5. 有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分.

6. 广义积分.

7. 定积分的应用:平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力及函数的平均值.

四、常微分方程

1. 常微分方程的基本概念:微分方程及其解、阶、通解、初始条件和特解等.

2. 变量可分离的微分方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程、伯努利(Bernoulli)方程、全微分方程.

3. 可用简单的变量代换求解的某些微分方程、可降阶的高阶微分方程:$y^{(n)}=f(x)$, $y''=f(x, y')$, $y''=f(y, y')$.

4. 线性微分方程解的性质及解的结构定理.

5. 二阶常系数齐次线性微分方程、高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程.

6. 简单的二阶常系数非齐次线性微分方程:自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数,以及它们的和与积.

7. 欧拉(Euler)方程.

8. 微分方程的简单应用.

五、向量代数和空间解析几何

1. 向量的概念、向量的线性运算、向量的数量积和向量积、向量的混合积.

2. 两向量垂直、平行的条件、两向量的夹角.

3. 向量的坐标表达式及其运算、单位向量、方向数与方向余弦.

4. 曲面方程和空间曲线方程的概念、平面方程、直线方程.

5. 平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件、点到平面和点到直线的距离.

6. 球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程、常用的二次曲面方程及其图形.

7. 空间曲线的参数方程和一般方程、空间曲线在坐标面上的投影曲线方程.

六、多元函数微分学

1. 多元函数的概念、二元函数的几何意义.

2. 二元函数的极限和连续的概念、有界闭区域上多元连续函数的性质.

3. 多元函数偏导数和全微分、全微分存在的必要条件和充分条件.

4. 多元复合函数、隐函数的求导法.

5. 二阶偏导数、方向导数和梯度.

6. 空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线.

7. 二元函数的二阶泰勒公式.

8. 多元函数极值和条件极值、拉格朗日乘数法、多元函数的最大值、最小值及其简单应用.

七、多元函数积分学

1. 二重积分和三重积分的概念及性质、二重积分的计算(直角坐标、极坐标)、三重积分的计算(直角坐标、柱面坐标、球面坐标).

2. 两类曲线积分的概念、性质及计算、两类曲线积分的关系.

3. 格林(Green)公式、平面曲线积分与路径无关的条件、已知二元函数全微分求原函数.

4. 两类曲面积分的概念、性质及计算、两类曲面积分的关系.

5. 高斯(Gauss)公式、斯托克斯(Stokes)公式、散度和旋度的概念及计算.

6. 重积分、曲线积分和曲面积分的应用(平面图形的面积、立体图形的体积、曲面面积、弧长、质量、质心、转动惯量、引力、功及流量等).

八、无穷级数

1. 常数项级数的收敛与发散、收敛级数的和、级数的基本性质与收敛的必

要条件.

2. 几何级数与 p 级数及其收敛性、正项级数收敛性的判别法、交错级数与莱布尼茨判别法.

3. 任意项级数的绝对收敛与条件收敛.

4. 函数项级数的收敛域与和函数的概念.

5. 幂级数及其收敛半径、收敛区间(指开区间)、收敛域与和函数.

6. 幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分)、简单幂级数的和函数的求法.

7. 初等函数的幂级数展开式.

8. 函数的傅里叶(Fourier)系数与傅里叶级数、狄利克雷(Dirichlet)定理、函数在$[-l,l]$上的傅里叶级数、函数在$[0,l]$上的正弦级数和余弦级数.

目　录

基础篇

提高篇

基　础　篇

第一章　知识点

第一部分　极限与连续

1. 一元函数基本概念

(1)利用已知条件求函数的表达式.

(2)函数的奇偶性、单调性、有界性与周期性.

(3)基本初等函数(常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数)和初等函数.

(4)反函数、复合函数、参数式函数、隐函数.

(5)分段函数.

2. 数列的极限

(1)$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$ 的定义：$\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-A|<\varepsilon$.

(2)收敛数列的性质：

定理 1(唯一性)　若数列$\{x_n\}$收敛于 A，则其极限 A 是唯一的.

定理 2(有界性)　若数列$\{x_n\}$收敛，则$\{x_n\}$为有界数列.

定理 3(保序性)　若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A>0(<0)$，则$\exists$正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n>0(<0)$.

3. 函数的极限

(1)六种极限过程下函数极限的定义

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=A,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

定理 1　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

定理 2　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

(2)函数极限的性质：

定理 1(唯一性)　在某一极限过程下，若函数 $f(x)$极限存在，则其极限值是唯一的.

定理 2(有界性)　若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则存在 $x=a$ 的去心邻域 U，使得

$f(x)$在$\dot{U}$上有界.

定理 3(保序性)　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0(<0)$,则$\exists\, x=x_0$ 的去心邻域$\dot{U}$,使得$x\in\dot{U}$时,有$f(x)>0(<0)$.

4. 证明数列或函数极限存在的方法

定理 1(夹逼定理)　设三个数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$满足$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

注　对于其他的极限过程,类似的结论留给读者自己写出.

定理 2(单调有界原理)　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则存在$x=x_0$的去心邻域$\dot{U}$,使得$f(x)$在$\dot{U}$上有界.

5. 无穷小量

(1)若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}f(x)=0$,则称函数$f(x)$是$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷小量.

定理 1　$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$(无穷小).

定理 2　无穷小与有界量的乘积仍为无穷小.

(2)无穷小的比较.

设$\lim\alpha=\lim\beta=0$,且$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=A$,则:

1)若$A=0$,则称α是β的高阶无穷小,记做$\alpha=o(\beta)$;

2)若$A=\infty$,则称α是β的低阶无穷小;

3)若$A\neq0,\infty$,则称α与β是同阶无穷小;

4)若$A=1$,则称α与β是等价无穷小,记做$\alpha\sim\beta$.

6. 无穷大量

当$x\to+\infty$时,下列函数无穷大的阶数由低到高的排序

$$\ln x,\ x^m(m>0),\ a^x(a>1),\ x^x$$

7. 求数列或函数极限的方法

(1)四则运算法则.

(2)利用夹逼定理求极限.

(3)先利用单调有界原理证明数列极限存在,再求其极限.

(4)利用两个重要极限求极限

$$\lim_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1,\lim_{\square\to0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$$

(5)利用等价无穷小代换求极限：

当$\square\to0$时，有下列无穷小的等价性

$$\square\sim\sin\square\sim\arcsin\square\sim\tan\square\sim\arctan\square\sim\ln(1+\square)\sim e^{\square}-1$$

$$(1+\square)^{\lambda}-1\sim\lambda\square\quad(\lambda>0)$$

$$1-\cos\square\sim\frac{1}{2}\square^2$$

(6)利用洛比达法则求极限.

(7)利用泰勒公式求极限.

(8)利用导数定义求极限.

(9)利用定积分定义求极限.

补充知识：

(1)柯西收敛准则：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数$N$，当$m,n>N$时，有$|x_m-x_n|<\varepsilon$.

(2)斯托尔兹定理：

1)设$\{x_n\}$严格单调增加，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a\quad(a\in\mathbf{R},\ +\infty\text{或}-\infty)$$

则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$$

2)设$\{x_n\}$严格单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=a\quad(a\in\mathbf{R},\ +\infty\text{或}-\infty)$$

则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$$

第二部分　一元函数微分学

1. 函数的连续性

(1)连续：设函数$f(x)$在x_0的某邻域内有定义，且$\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$连续.

(2)间断点的概念：设函数$f(x)$在x_0的挖心邻域或单侧邻域（包括点

x_0)有定义，且 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

1)如果 $f(x_0+0)$ 和 $f(x_0-0)$ 都存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点. 特别地：当 $f(x_0+0)=f(x_0-0)$ 时，称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点；当 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$ 时，称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

2)如果 $f(x_0+0)$ 和 $f(x_0-0)$ 至少有一个不存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

(3)闭区间的连续函数的三个原理.

定理 1(最值原理)　若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值同时也有最小值.

定理 2(介值原理)　若 $f(x)\in C[a,b]$ 且 m,M 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小，最大值，则对介于 m,M 之间的任何实数 μ(即 $m\leqslant\mu\leqslant M$)，在 $[a,b]$ 区间上至少有一点 c 存在，使 $f(c)=\mu$.

定理 3(零点定理)　设 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)\cdot f(b)<0$(或 $f(a)\cdot f(b)\leqslant 0$)，则方程 $f(x)=0$ 在区间 (a,b)(或闭区间 $[a,b]$)上至少有一实根.

2. 导数的定义

(1)导数

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\square\to 0}\frac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}$$

(2)左、右导数

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\square\to 0^-}\frac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\square\to 0^+}\frac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}$$

(3)关系

$$f'(x_0)\text{存在}\Leftrightarrow f'_-(x_0)\text{及 }f'_+(x_0)\text{都存在且相等}$$

3. 微分的定义

(1)微分的定义：设 $y=f(x)$ 在点 x 的某邻域内有定义，给自变量一改变量 Δx，若相应函数的改变量 Δy 可表示成

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$$

(其中 $A=f'(x)$)，则称 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，并称 Δy 的线性主要部分 $A\Delta x$ 为 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分，记为：$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=A\Delta x=f'(x)\Delta x=f'(x)\mathrm{d}x$.

(2)关系

$$可导\Leftrightarrow可微\Rightarrow连续$$

4. 基本初等函数的导数公式

$(c)'=0,(x)'=1,(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1},(\sin x)'=\cos x,(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x,(\cot x)'=-\csc^2 x,(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a=1),(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x,(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a},(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2},(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

熟记两个函数的导数

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

5. 求导法则

(1)函数四则运算的导数公式

$$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\quad g(x)\neq 0$$

(2)反函数、复合函数、参数式函数导数公式

1)$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$或$[f^{-1}(y)]'=\dfrac{1}{f'(x)}$.

2)$(f[g(x)])'=f'[g(x)]g'(x)$或$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\ (u=g(x))$.

3)设$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$,则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

(3)指幂函数求导公式(求导技巧)

$$([f(x)]^{g(x)})'=[f(x)]^{g(x)}(g(x)\ln f(x))'$$

(4)变限积分函数的求导公式

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)\mathrm{d}t\right)'=\psi'(x)f[\psi(x)]-\varphi'(x)f[\varphi(x)]$$