KAODIANJIEMA

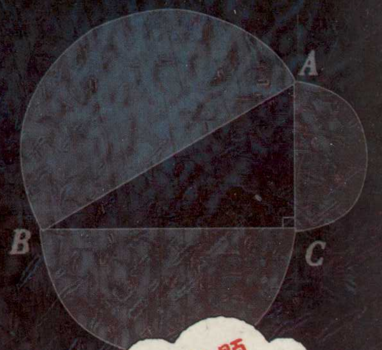
先锋工作室 VANGUARD

先锋专题 建模解题

主编 付荣强

考点解码

Kaodianjiema



模型[公式]破解

重点难点

初中数学

本册主编 陈丽馨

三角形

新课标 XINKEBIAO 通用版

吉林教育出版社
JILIN EDUCATION PUBLISHING HOUSE

先锋工作室 VANGUARD

先锋专题 建模解题

KAODIANJIEMA

考点解码

模型[公式]破解 重点难点

KDJM
KAODIANJIEMA

初中数学

主编 付荣强

□ 本册主编/陈丽馨
□ 编 者/解凤玲 张显秋 宋红梅 王 弘 孙树相 倪晓红 靳晓洁 沈淑霞 隋 晶 王晓平 姜渭华 张继山 崔俊兰 杨秀云 刘艳萍 张春艳

三角形

11.24—1.24

吉林教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

考点解码:模型(公式)破解重点难点:初中数学:三角形/付荣强主编.
—长春:吉林教育出版社,2005.6

ISBN 7-5383-4991-X

Ⅰ.考... Ⅱ.付... Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 024702 号

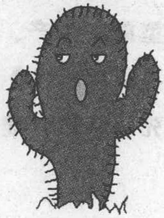
□总 策 划:房海滨 杨 琳
□责任编辑:杨 琳
□封面设计:王 康
□版式设计:杨 琳

□咨询热线:0431/5645959
□批销热线:0431/5645386
0431/5645388
0431/5645391
0431/5647969
□传 真:0431/5633844
□发行网址:www.jleph.com

□出版:吉林教育出版社(长春市同志街 1991 号 邮编:130021)
□发行:吉林教育出版社
□印刷:长春市博文印刷厂(新立城水库管理院内
邮编:130000)

□开本:880×1230 1/32 □印张:6.5 □字数:230 千字
□版次:2005 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 1 次印刷
□印数:10000 册 □定价:10.00 元

Editor's 卷首语 Letter



《考点解码——模型破解重点难点》丛书以《课程标准》为依据，融通各种版本教材的知识体系，立足初、高中课程和中、高考的实际，按专题编写而成。包括初、高中数、理、化三个学科共计二十八册。

模型是一个人们非常熟悉的概念。如儿童玩具是实物的模型，机器人是模拟人的模型，长方形的面积公式 $S=ab$ 是数学模型，等等。

本书的模型是什么？简单地说，可以看成是公式。从中学生学习的实际来讲，将知识点建立成简捷、科学的模型(公式)，对于归纳、记忆知识点和解题具有重要作用。

本套书立足初、高中课程和中、高考的实际，把初、高中数、理、化知识公式化，形成了以公式为主体的数、理、化模型体系，便于记忆，便于应用，对于破解知识体系中的重点、难点具有极高的使用价值。

从生活走进数学，从生活走进物理，从生活走进化

学，将知识应用到生产、生活中去，进行探究性学习，解决与生产、生活密切相关的实际问题，是《课程标准》的要求，也是中、高考的重点考查内容。本丛书每个专题单设一讲，通过讲解、举例、练习，专门阐述利用模型解决生产、生活实际问题的方法和技巧，充分体现了《课程标准》的“建模”思想。

先锋专题，建模解题，精彩纷呈！

例题引路 举一反三

目录 Contents

例题解析+训练套餐↓
- 讲述知识体系
- 解说知识点考点
- 诠释重点难点
- 教方法导引思路
- 涵盖所有题型
- 能够举一反三
- 答案详解

模型破解重点难点

第三讲 勾股定理

第四讲 等腰三角形

第五讲 相似三角形

第一讲 三角形的有关概念

1.1 认识三角形

模型 $\triangle ABC$

内涵 明明白白才是真！

1. 三角形的概念

(1)三角形的定义

由不在同一直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫做三角形. 组成三角形的线段叫做三角形的边. 相邻两边的公共端点叫做三角形的顶点. 相邻两边所组成的角叫做三角形的内角，简称三角形的角.

(2)三角形的特征

①三条线段；②不在同一条直线上；③首尾顺次相接.

(3)三角形的符号

如图 1-2，“三角形”用符号“$\triangle$”表示，顶点是 A、B、C 的三角形，记作“$\triangle ABC$”，读作“三角形 ABC”.

图 1－1 就不是三角形

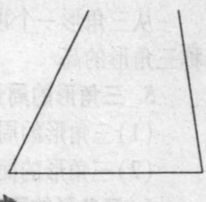


图 1-1

三角形有三个顶点 A、B、C；有三条边 AB、BC、AC(或 a、b、c)；有三个角 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$.

$\triangle ABC$ 的三边用 a、b、c 表示时，$\angle A$ 所对的边 BC 用 a 表示，$\angle B$ 所对的边 AC 用 b 表示，$\angle C$ 所对的边 AB 用 c 表示.

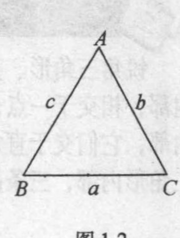


图 1-2

2. 三角形的角平分线

(1)定义

三角形一个角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点和

交点之间的线段叫做三角形的角平分线.

例如：如图 1-3，$\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle BAC$，线段 AD 就是 $\triangle ABC$ 的角平分线.

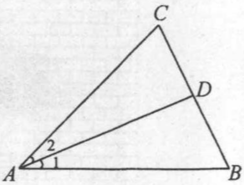


图 1-3

(2)画法

三角形的角平分线的画法与角的平分线的画法相同，可以用量角器画.

3. 三角形的中线

(1)定义

在三角形中，连接一个顶点和它的对边的中点的线段叫做三角形的中线.

例如：在图 1-4 中，有 $BD=DC=\frac{1}{2}BC$，或 $BC=2BD=2DC$，或 D 为 BC 的中点，线段 AD 就是 BC 边上的中线.

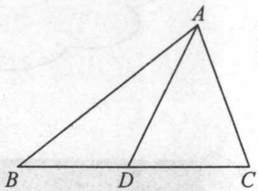


图 1-4

(2)画法

画三角形的中线，连接顶点及对边的中点即可.

(3)重要结论

如图 1-4，三角形的一条中线将三角形分成面积相等的两个三角形，即 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$.

4. 三角形的高

从三角形一个顶点向它对边画垂线，顶点和垂足间的线段叫做三角形的高线，简称三角形的高.

5. 三角形的周长和面积

(1)三角形的周长等于三条边的长度之和.

(2)三角形的面积等于底和这底上的高的积的一半.

6. 三角形的稳定性

三角形形状是固定的，三角形的这个性质叫做三角形的稳定性.

透析 深度讲解，条理真清晰呀！

锐角三角形、直角三角形、钝角三角形都有三条高线，锐角三角形的高在三角形内部，相交于一点，如图 1-5；直角三角形有两条高与直角边重合，另一条高在三角形内部，它们交于直角顶点，如图 1-6；钝角三角形有两条高在三角形的外部，一条高在三角形内部，三条高所在直线交于形外一点，如图 1-7.

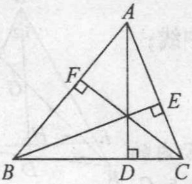


图 1-5

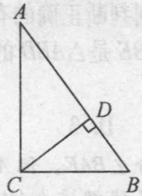


图1-6

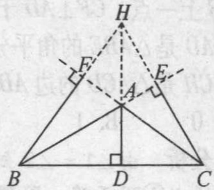


图1-7

举 例　哇噻！分析，解答，解惑，真像老师讲题一样！

【例1】 如图 1-8，回答下列问题：(1)图中有几个三角形，写出这些三角形；(2) ∠1 是哪几个三角形的角？(3)以 CE 为边的三角形有哪几个？

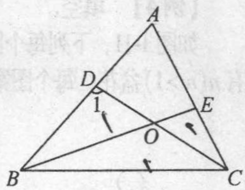


图 1-8

□分析　要回答这些问题，只要抓住三角形的有关概念，按照一定的顺序依次寻找. 三角形个数的数法技巧很多，常用的有线段统计法、顶点过滤法.

□解　(1)图中有 8 个三角形. 它们是△ABC、△ABE、△ACD、△DBC、△DBO、△EBC、△ECO、△OBC；

(2) ∠1 是△BOD 和△BDC 的角；

(3)以 CE 为边的三角形有△CEB、△CEO.

解惑

数三角形的个数的方法：

(1)按图形形成过程去数(即重新画一遍图，按照三角形形成的先后顺序去数).

(2)按大小顺序数.

(3)可从图中的某一条线段开始沿着一定方向去数.

(4)先固定一个顶点，变换另两个顶点去数.

【例2】 如图 1-9，已知：AD、AE 分别为△ABC 的中线、高，且 $AB=5$cm，$AC=3$cm，则△ABD 与△ACD 的周长之差为________；△ABD 与△ACD 的面积关系为________.

图 1-9

□解　△ABD 与△ACD 的周长之差是 $l=(AB+BD+AD)-(AD+CD+AC)$，而 $BD=CD$，所以 $l=AB-AC=5-3=2$cm. $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD\cdot AE$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}CD\cdot AE$，而 $BD=CD$，所以 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$.

【例3】 如图 1-10，在△ABC 中，∠1 = ∠2，G 为 AD 中点，延长 BG 交 AC 于 E，

F 为 AB 上一点，$CF\perp AD$ 于 H，下列判断正确的有(B)项.

①AD 是$\triangle ABE$ 的角平分线；②BE 是$\triangle ABD$ 的边 AD 上的中线；

③CH 是$\triangle ACD$ 的边 AD 上的高.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

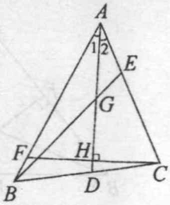


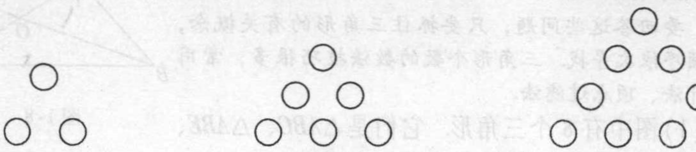
图 1-10

□分析　由$\angle 1=\angle 2$ 知 AD 平分$\angle BAE$，但 AD 不是$\triangle ABE$ 内的线段，所以①不正确；同理知 BE 虽然经过$\triangle ABD$ 边 AD 的中点 G，但 BE 却不是$\triangle ABD$ 中的线段，所以②不正确；由于 $CH\perp AD$ 于 H，由高的定义知 CH 是$\triangle ACD$ 边上的高，所以③正确.

□解　B.

【例 4】　填空.

如图 1-11，下列每个图都是由若干盆花组成的形如三角形的图案，每条边(包括两个顶点)有 $n(n>1)$ 盆花，每个图案花盆的总数是 S. 按此规律推断，S 与 n 的关系式是 $S=3n-3$.



$n=2, S=3$　　$n=3, S=6$　　$n=4, S=9$

(1)　　(2)　　(3)

图 1-11

□分析　(1)由 $3=2\times 3-3$；(2)$6=3\times 3-3$，(3)$9=4\times 3-3$，可得 $S=3n-3$.

□解　$S=3n-3$.

练习一

看完讲解，要及时做题巩固哟!

一 选择题（答案在第 170 页）

1. 三角形的角平分线是　　(C)

A. 直线　　B. 射线　　C. 线段　　D. 射线或线段

2. 如图 1-12，$AE\perp BE$ 于 E，$CD\perp AB$ 于 D，$BF\perp AF$ 于 F，在$\triangle ABC$ 中，BC 边上的高是　　(D)

A. CD　　B. BF　　C. BD　　D. AE

3. 三角形一边上的高　　(D)

A. 必在三角形内部　　B. 必在三角形外部

C. 必在三角形的边上　　D. 以上三种情况都有可能

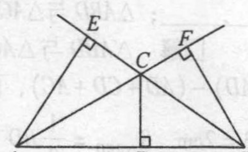


图 1-12

4. 如果一个三角形的三条高的交点恰是三角形的一个顶点，那么这个三角形是（ C ）

A. 锐角三角形　B. 钝角三角形　C. 直角三角形　D. 不能确定

二 填空题（答案在第 170 页）

5. 如图 1-13，已知 AD、BE 分别是 $\triangle ABC$ 的中线和角平分线，$BD=4\text{cm}$，$\angle ABC=50^\circ$，则 $BC=$ <u>8cm</u>，$\angle ABE=$ <u>25°</u>.

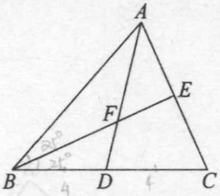


图 1-13

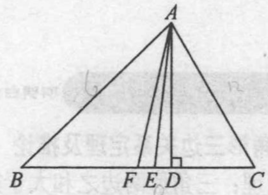


图 1-14

6. 如图 1-14，如果 $AD\perp BC$，那么 AD 是 $\triangle ABC$ 的 <u>BC</u> 边上的 <u>高</u>；如果 AE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，那么 $\angle BAE=$ <u>∠CAE</u> $=\frac{1}{2}$ <u>∠BAC</u>；如果 $BF=\frac{1}{2}BC$，那么 AF 是 $\triangle ABC$ 的 <u>中线</u>.

三 解答题（答案在第 170 页）

7. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，$AB=6\text{cm}$，$BC=9\text{cm}$，$AC=12\text{cm}$，求 AB、BC、AC 上的高的比.

8. 如图 1-15，$\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高相等，设 $AB=4\text{cm}$，$S_{\triangle ABC}=12\text{cm}^2$，求 $\triangle ABD$ 的 AB 边上的高.

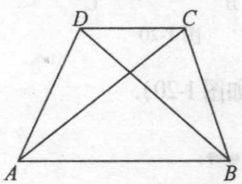


图 1-15

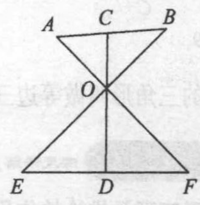


图 1-16

9. 如图 1-16，AF、BE、CD 相交于 O 点，且 OC 为 $\triangle ABO$ 的角平分线. 求证：OD 为 $\triangle EFO$ 的角平分线.

10. 如图 1-17，B、D、E、C 在同一条直线上，$AE\perp BC$ 于 E，指出过点 A 的 $\triangle ABE$、$\triangle ABD$、$\triangle ABC$ 的高，说出它们之间的关系.

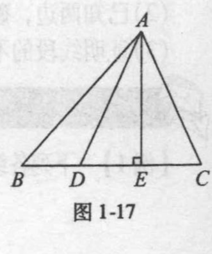


图 1-17

1.2　三角形三条边的长短的关系

模型　$a+b>c$

内涵　明明白白才是真！

1. 三角形三边关系定理及推论

(1)定理：三角形两边之和大于第三边.

(2)推论：三角形两边之差小于第三边.

如图 1-18，用数学模型表示定理和推论就是

$$a+b>c,\ a-b<c.$$

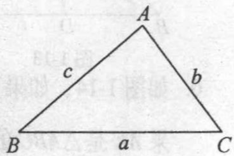


图 1-18

2. 等腰三角形与等边三角形

①有两边相等的三角形叫做等腰三角形(如图 1-19)，其中相等的两边叫做腰，另一边叫做底，两腰的夹角叫做顶角，底与腰的夹角叫做底角.

图 1-19

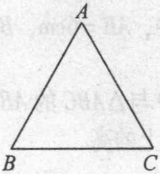


图 1-20

②三边都相等的三角形叫做等边三角形(如图 1-20).

透析　深度讲解，条理真清晰呀！

三角形三边关系定理及推论的作用

(1)判断三条已知线段 a、b、c 能否组成三角形.

(2)已知两边，确定第三边的长度的范围及周长的范围.

(3)证明线段的不等关系.

举例　哇噻！分析，解答，解惑，真像老师讲题一样！

【例 1】　下列各组数分别表示三条线段的长度，判断以它们为边是否能组成三角形?

(1)2、3、5；　(2)$4a$、$5a$、$8a$；　(3)三条线段的比为4∶7∶6.

□分析　判断三条线段能否构成三角形，关键看三条线段是否满足：任意两边之和大于第三边或任意两边之差小于第三边. 通常并不需要一一验证 $a+b>c$，$b+c>a$，$a+c>b$ 或 $a-c<b$，$b-c<a$，$b-a<c$ 这些不等式，其简便方法是将较短两边之和与较长边比较，或将最长边与最短边之差与中间线段比较.

□解　(1)$\because$ $2+3=5$，$\therefore$ 以2、3、5为边的三条线段不能组成三角形；

(2)$\because$ $4a+5a>8a$，$\therefore$ 以$4a$、$5a$、$8a$为边的三条线段能组成三角形；

(3)设比的其中一份为x，则三条线段分别为$4x$、$7x$、$6x$，

$\because$ $4x+6x>7x$，$\therefore$ 以$4x$、$6x$、$7x$为边的三条线段能组成三角形，

即　比为4∶7∶6的三条线段能组成三角形.

【例2】　在$\triangle ABC$中，$AB=4$，$BC=9$，求AC的取值范围.

□分析　三角形的第三边的取值范围是大于两边之差的绝对值(通常用较大的数减去较小的数)，小于两边之和.

□解　$9-4<AC<9+4$，即　$5<AC<13$.

【例3】　设a、b、c为$\triangle ABC$三边长，化简$|a-b-c|+|a+b-c|$.

□解　$|a-b-c|+|a+b-c|=|a-(b+c)|+|a+b-c|$.

$\because$ a、b、c为$\triangle ABC$的三边，$\therefore$ $b+c>a$，$a+b>c$，$\therefore$ 原式$=b+c-a+a+b-c=2b$.

【例4】　$\triangle ABC$的三边长为a、b、c，且a、b满足等式$\sqrt{a-1}+b^2-4b+4=0$，求这个三角形的周长l的取值范围.

□解　$\sqrt{a-1}+b^2-4b+4=0$，$\sqrt{a-1}+(b-2)^2=0$，$\therefore$ $a-1=0$，$b-2=0$，$\therefore$ $a=1$，$b=2$，$\therefore$ $1<c<3$，$\therefore$ $4<l<6$.

解惑　此题通过等式$\sqrt{a-1}+b^2-4b+4=0$求出a、b的值，再确定第三边c的取值范围，最后求周长的取值范围. 周长的取值是

$(a+b)+(b-a)<$周长$<2(a+b)$.　$(b>a)$　即　$4<l<6$.

【例5】　在$\triangle ABC$中，$AB=9$，$BC=2$，且AC为奇数，求$\triangle ABC$的周长.

□分析　已知$\triangle ABC$的两边，可以求第三边的取值范围：$AB-BC<AC<AB+BC$，有$9-2<AC<9+2$，即$7<AC<11$，而第三边为奇数，所以$AC=9$，从而问题可求.

□解　根据三角形三边关系，得$AB-BC<AC<AB+BC$，$\therefore$ $9-2<AC<9+2$，即$7<AC<11$. 又$\because$ AC为奇数，$\therefore$ $AC=9$，$\therefore$ $\triangle ABC$的周长$=9+9+2=20$.

【例6】　若三角形的三条边的长都是整数，周长为13，且一边的长为4，则这个三角形的最大边长为　(　)

A. 7　　B. 6　　C. 5　　D. 4

□分析　设另两边长为x和y，则$x+y=13-4=9$，在此条件下只须分类讨论x、

y、4满足三边关系定理及推论且满足题意(最大边长)即可.

□解　设另两边长为x和y，且$x>y$. ∵ $x+y=13-4=9$，∴ $y=9-x$.

当$x=7$时，$y=2$，则7、2、4不满足三边关系定理；

当$x=6$时，$y=3$，则6、3、4满足定理结论；

当$x=5$时，$y=4$，则5、4、4满足定理结论.

又∵ 题中要求最大边长，$x=6>4>3$，∴ 选B.

【例7】　(1)$\triangle ABC$的三边分别为a、b、c，且$a^2+bc=a(b+c)$，则这个三角形(按边分类)一定是________三角形.

(2)$\triangle ABC$的三边分别为a、b、c，且$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，则这个三角形(按边分类)一定是________三角形.

□解　(1)∵ $a^2+bc=a(b+c)$，$a^2+bc=ab+ac$，$a^2+bc-ab-ac=0$，

∴ $(a-b)(a-c)=0$，∴ $a=b$，或$a=c$. ∴ $\triangle ABC$一定是等腰三角形.

(2)∵ $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，∴ $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$，

∴ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，∴ $a=b=c$. ∴ $\triangle ABC$一定是等边三角形.

【例8】　(济南市中考试题)已知等腰$\triangle ABC$的底边$BC=8\text{cm}$，且$|AC-BC|=2\text{cm}$，则腰AC的长为　(　　)

A. 10cm或6cm　　B. 10cm　　C. 6cm　　D. 8cm或6cm

□解　由$|AC-BC|=2\text{cm}$，得$AC-BC=2$，或$AC-BC=-2$.

当$AC-BC=2$时，$AC=BC+2=10\text{cm}$，经验证满足三角形三边关系定理；

当$AC-BC=-2$时，$AC=BC-2=6\text{cm}$，经验证也满足三角形三边关系定理.

∴ 腰AC的长为10cm或6cm. 选A.

【例9】　(青海省中考试题)两根木棒的长分别是8cm、10cm，要选择第三根木棒将它们钉成一个三角形，那么第三根木棒长x的范围是________；如果以5cm为等腰三角形的一边，另一边为10cm，则它的周长为________.

□解　(1)由三角形三边关系定理，得$|8-10|<x<8+10$，即$2<x<18$.

(2)由三角形三边关系定理可知，5cm为底边长，10cm为腰长，

∴ 周长为$5+2\times 10=25\text{cm}$.

【例10】　等腰三角形的周长为20，其中两边的差为2，求腰和底边的长各是多少.

□分析　等腰三角形的两边差为2，有两种可能，一种是腰与底的差为2，另一种是底与腰的差为2，再分别与周长为20组成方程组，解这两个方程组，用三角形三边关系定理验证是否符合即可.

□解　设这个等腰三角形的腰长为x，底边长为y. 根据题意，得

$\begin{cases}2x+y=20,\\x-y=2;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x+y=20,\\y-x=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{22}{3}\\y=\frac{16}{3};\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=6,\\y=8.\end{cases}$

经验证符合三角形三边关系定理.

综上，这个等腰三角形的腰和底边的长分别是$\frac{22}{3}$，$\frac{16}{3}$；6，8.

【例11】 在一个不等边三角形中，最小边的长是5，另一边的长是7，其周长是奇数，则第三边的长可取的值有 ( )

A. 2个　　B. 3个　　C. 4个　　D. 5个

□解 设第三边为x. 由三角形三边关系定理，可知$2<x<12$.

又∵ 这是一个不等边三角形，最小边的长是5，∴ $5<x<12$.

x可取的整数有6、8、9、10、11.

又∵ 周长为奇数，而$5+7=12$是偶数，∴ x一定是奇数.

∴ 满足条件的x的值为9和11. ∴ 选A.

解惑 本小题除了考虑三角形三边关系定理外，还要考虑：(1)不等边三角形的第三边不能为5或7；(2)最小边的长是5，第三边要大于5；(3)周长为奇数，而$5+7=12$，12已是偶数，所以第三边只能是奇数了. 满足以上3种情况的x的值只能是9和11，所以选A.

【例12】 已知$a^2-2a+b^2-6b+10=0$，求以a、b为边长的等腰三角形周长.

□分析 把等式左边的10拆成1和9，使左边变成$(a-1)^2+(b-3)^2$的形式，由两个式子平方和等于0可得$a=1$，$b=3$，再结合三角形三边关系定理就得出等腰三角形的周长了.

□解 $a^2-2a+b^2-6b+10=0$，$a^2-2a+1+b^2-6b+9=0$，$(a-1)^2+(b-3)^2=0$，

∴ $a-1=0$，$b-3=0$，即$a=1$，$b=3$.

当腰长为1时，$1+1<3$，不符合三角形三边关系定理；

当腰长为3时，$3+1>3$，符合三角形三边关系定理.

∴ 这个等腰三角形的周长为$3+3+1=7$.

【例13】 如图1-21，已知：在$\triangle ABC$中，D是AB上任意一点.

求证：$AB+AC>DB+DC$.

□证明 在$\triangle ADC$中，$AD+AC>DC$.

两边都加上BD，得$AD+AC+BD>DC+BD$，∴ $AB+AC>DB+DC$.

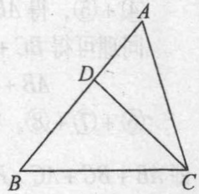


图1-21

【例14】 如图1-22，已知：$\triangle ABC$中，$AB=AC$，BD是中线.

求证：$3AB>2BD$.