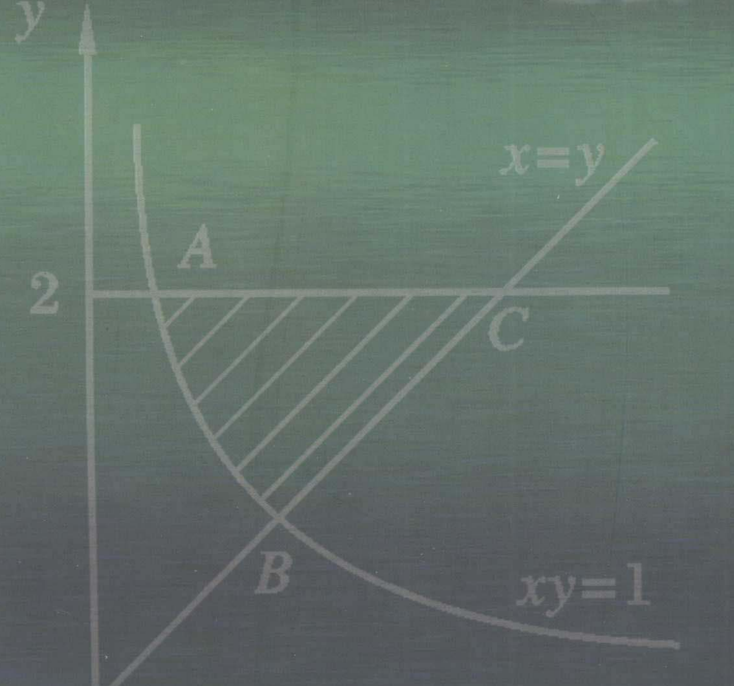
MEDICAL BIO-MATHEMATICS

医用生物数学

王培承 张天良 祁爱琴 主编



中国海洋大学出版社

医用生物数学

MEDICAL BIO-MATHEMATICS

医用生物数学

主 编 王培承 张天良 祁爱琴
主 审 刘学宗

中国海洋大学出版社
·青岛·

图书在版编目(CIP)数据

医用生物数学/王培承等主编. 一青岛:中国海洋大学出版社,2004.8

ISBN 7-81067-623-7

Ⅰ.医… Ⅱ.王… Ⅲ.医用数学:生物数学—医学院校—教材
Ⅳ.R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第072577号

中国海洋大学出版社出版发行
(青岛市鱼山路5号 邮政编码:266003)
出版人:王曙光
文登市印刷厂有限公司印刷
新 华 书 店 经 销
*
开本:850mm×1168mm 1/16 印张:20.5 字数:498千字
2004年8月第1版 2004年8月第1次印刷
定价:24.80元

医用生物数学

编委会

主　编　王培承　张天良　祁爱琴
副主编　王在翔　潘庆忠　刘　红　张　侠
　　　　　年立群　蓝　荣　胡西厚　范锡枝
编　委　（以姓氏笔画为序）
　　　　　王在翔　王希杰　王培承　孔　杨
　　　　　年立群　刘　红　刘　琳　刘　燕
　　　　　刘亚平　闫　岩　祁爱琴　许　国
　　　　　杨淑香　张　侠　张天良　张良宝
　　　　　苗巧云　范锡枝　周子亮　胡式良
　　　　　胡西厚　唐文彦　程李晴　蓝　荣
　　　　　潘庆忠

前　　言

本书是全国高等学校教学研究中心立项课题“21 世纪中国高等学校农林/医药类专业数理化基础课程的创新与实践”之分课题“现代化教学手段和教学方法(包括双语教学)在医药类人才培养数学教学中的应用”的研究成果之一。本书结合高等医学院校数学教学的实际情况，与现行《医科(五年制)高等数学基本要求》相符合，由首都医科大学、北京大学、青岛大学、新乡医学院、承德医学院、滨州医学院和潍坊医学院等课题组成员学校联合编写。本书按照新形势下教学与教材改革的精神，充分吸收课题组成员学校的教学经验和教学改革成果，以期更适合 21 世纪中国高等学校医药类专业数学课程教学需要。

本书包含了医药院校各专业学生必须学习的数学内容，可供医药院校各专业本科生高等数学教学使用；本书各章内容相对独立，可根据教学和培养层次的需要进行取舍，故亦可作为医学硕士研究生高等数学教材和医药工作者高等数学学习的参考书。

本书对高等数学整体结构作了适当调整，按照渗透现代数学理念、加强应用能力培养的要求，内容力求通俗易懂，突出重点，不苛求理论推导，强调基本素质、技能、知识的培养，注重数学在医药卫生领域中的应用。全书分为微积分、常微分方程、线性代数、概率统计和无穷级数五个板块，共 11 章。

本书由首都医科大学刘学宗教授主审。

由于我们水平有限，编写时间仓促，书中难免存在不足之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2004 年 6 月

目　　录

第一章　函数　极限　连续

函数是高等数学的主要研究对象之一，极限是研究函数的重要概念和方法，连续是描述函数的一个重要性态. 本章将在初等数学函数知识的基础上，进一步介绍函数、极限和连续的基本知识，为以后的学习奠定必要的基础.

第一节　函　　数

一、函数的概念

定义1.1　设D是一个非空实数集合，x和y是两个变量，若对于每个$x\in D$，变量y按照一定的对应法则f，总有确定的值与之对应，则y称为x的**函数**(Function)，记为$y=f(x)$.

在上述定义中，x称为**自变量**(Independent variable)，y称为**因变量**(Dependent variable)，f称为**对应规律**，x的取值范围D叫做这个函数的**定义域**(Domain of definition)，而当x取遍D内所有值时，对应y的所有取值称为该函数的**值域**(Range). 定义域、值域及对应规律称为函数的三要素.

对自变量x的某一个确定的值x_0，与之对应的因变量y的取值，称为函数在x_0处的**函数值**(Functional value)，记为$y_0=f(x_0)$或$y_0=y|_{x=x_0}$.

从函数的定义我们看到，函数的定义域和对应规律是决定函数的主要因素，当它们确定以后，函数的值域也就相应的确定了.

对应规律的记号也可以采用其他字母，如G，Φ等，这时函数就记为$y=G(x)$，$y=\Phi(x)$.

在数学中，通常不考虑函数的实际意义，而抽象地用算式表达函数，我们约定函数的定义域就是使函数有意义的自变量取值的全体.

例1　确定下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{2}{x-1}$；

(2) $y=\ln(\dfrac{1-x}{3})$.

解　显然要求函数的定义域，只需求出使函数有意义的x的取值范围即可.

(1) 要使函数有意义，必有

$$\begin{cases}x^2-1\geqslant 0,\\ x-1\neq 0.\end{cases}$$

解此不等式得 $x>1$ 或 $x\leqslant-1$，所以该函数的定义域可表示为

$$(-\infty,-1]\cup(1,+\infty).$$

(2) 要使函数有意义，必有 $1-x>0$.

所以该函数的定义域可表示为 $(-\infty,1)$.

例2 已知函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^3+19}$，求 $f(2)$ 及 $f(x-1)$.

解 $f(2)=3$；

$$f(x-1)=\sqrt[3]{(x-1)^3+19}=\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x+18}.$$

不过，在处理实际问题时，求函数的定义域要注意其实际意义.

例3 在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的高度为 h，运动规律为 $s=0.5\,gt^2$，其中 g 为重力加速度，求函数 s 的定义域.

解 从抽象的算式看，t 可以取一切实数值. 但考虑到实际意义，显然应有

$$t\geqslant 0 \text{ 且 } 0\leqslant s\leqslant h,\text{而 } t=\sqrt{\frac{2s}{g}},$$

故定义域为 $\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$.

二、函数的表示法

表示函数的方法通常有三种：

(1) **公式表示法** 这是高等数学中最常用的方法，其优点是便于理论的推导和计算. 前面例题中的函数表示都采用了这种方法.

(2) **表格表示法** 如三角函数表和常用对数表等，其优点是所求函数值易于查询.

(3) **图形表示法** 这种方法在生物、医学和工程技术等领域应用较普遍，其优点是形象直观.

三、几种函数概念

1. 分段函数

在生物、医学和工程技术等应用中，经常遇到一类函数，当自变量在不同范围内取值时，其表达式也不同，这类函数就是**分段函数**(Piecewise function). 如绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0,\\ -x & x<0.\end{cases}$$

其图象如图 1-1 所示.

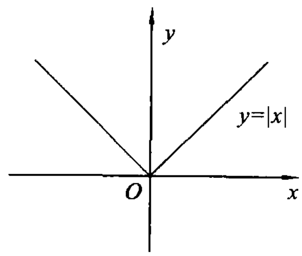


图 1-1

再如在生理学研究中，血液中胰岛素浓度 $c(t)$(单位/毫升)随时间 t(min)变化的经验公式为

$$c(t)=\begin{cases} t(10-t) & 0\leqslant t\leqslant 5,\\ 25\mathrm{e}^{-k(t-5)} & t>5.\end{cases}$$

式中，k 为一常数.

在求某点的分段函数值时，要注意将自变量的值代入其所在区间的解析式计算，如当 $t=3$ 时，$c(3)=3(10-3)=21$，当 $t=6$ 时，$c(6)=25e^{-k(6-5)}=25e^{-k}$.

2. 反函数

设 y 为 x 的函数 $y=f(x)$，则由函数 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**(Inverse function)，记为 $x=f^{-1}(y)$. 而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

显然，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是相同的.

由于习惯上常以 x 为自变量，以 y 为因变量，所以一般地将 $y=\varphi(x)$ 作为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 和其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 4 求函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数.

解 由原式可解得

$$x=\log_2\frac{y}{1-y}.$$

交换 x,y 的位置即得原函数的反函数

$$y=\log_2\frac{x}{1-x}.$$

其定义域为(0,1).

3. 隐函数

用公式法表示函数关系，通常有两种形式：一种是形如 $y=f(x)$ 的函数，即变量 y 完全由 x 的表达式表示；这种形式的函数称为**显函数**(Explicit function)，如 $y=x^3+\ln x$. 另一种是形如 $F(x,y)=0$ 的函数，即变量 x 与 y 间的关系是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定，这种形式的函数称为**隐函数**(Implicit function)，如 $6x-y+1=0$，$2x-y+\sin xy=0$ 等.

当然，有些隐函数可以转化为显函数，如上面 $6x-y+1=0$ 可转化为 $y=6x+1$. 但有些隐函数却很难甚至不能转化为显函数，如 $2x-y+\sin xy=0$.

四、函数的基本性态

1. 有界性

若存在 $M>0$，使得函数 $y=f(x)$ 定义域内一切 x 值，总有不等式 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在定义域内为**有界函数**(Bounded function)；若这样的 M 不存在，就称函数 $y=f(x)$ 在定义域内为**无界函数**(Unbounded function).

如 $y=\sin x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内，显然有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 在定义域内为有界函数. 而函数 $y=1/x$ 在其定义域内显然为无界函数.

当然，有时需要讨论定义域的局部区域上的有界性，如函数 $y=1/x$ 在区域 $(1,+\infty)$ 或 $(-\infty,-1)$ 内为有界函数，而在区域(0,1)上却为无界函数. 这说明函数在定义域内无界时，在其子域内却可以为有界的. 但若函数在定义域内有界时，在其子域内也必为有界的.

2. 函数的单调性

若对函数 $y=f(x)$ 定义域的某个子域内的任意两点 x_1 与 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $y=f(x)$ 在该子域内是**单调增加**(或**单调减少**)的. 该子域称为**单调区间**(Monotone interval)，单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**(Monotone function)，其图形

为一条沿 x 轴正向上升或下降的曲线.

如函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加，而在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内却不是单调函数，如图 1-2 所示.

3. 奇偶性

若对函数 $y=f(x)$ 定义域内每一个 x 取值，都有 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$），则称函数 $y=f(x)$ 为**偶函数**(Even function)（或**奇函数**(Odd function)）. 不是偶函数也不是奇函数的函数称为**非奇非偶函数**.

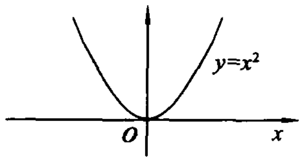


图 1-2

由定义可见，只有定义域为对称区间的函数，才可能具有奇偶性.

偶函数的图形关于 y 轴对称；而奇函数的图形关于坐标原点对称.

例5 判断函数 $y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$ 的奇偶性.

解 因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=\dfrac{1+a^x}{1-a^x}=-\dfrac{a^x+1}{a^x-1}=-f(x)$，所以该函数为一奇函数.

例6 判断函数 $y=x^3\sin^5 x$ 的奇偶性.

解 因为 $f(-x)=(-x)^3\sin^5(-x)=x^3\sin^5 x=f(x)$，所以该函数为一偶函数.

4. 周期性

对于函数 $y=f(x)$，若存在一个非零常数 T，使得对于定义域内的每一个 x 取值，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**(Periodic function)，其中 T 称为函数的**周期**(Period).

若函数 $y=f(x)$ 有周期，则必有无穷多个周期. 其中最小的周期称为函数的最小正周期，这也是我们通常所说的周期.

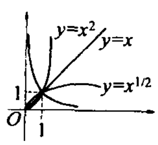
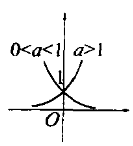
如三角函数 $y=\sin x$ 和 $y=\tan x$ 等都是周期函数，其周期分别为 2π 和 π.

五、初等函数

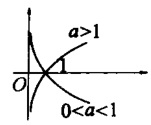
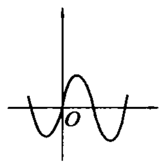
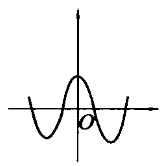
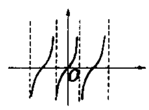
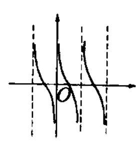
1. 基本初等函数

通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数，统称为**基本初等函数**(Fundamental elementary function). 现将五种基本初等函数列于表 1-1.

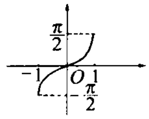
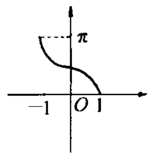
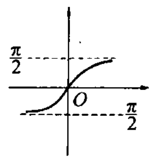
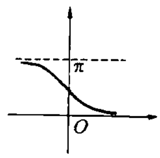
表 1-1

名称	表达式	定义域	图形	特性
幂函数	$y=x^a$ $(a\neq 0)$	随 a 而不同，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		过点 $(1,1)$，在第一象限内，当 $a>0$ 时，为增函数；当 $a<0$ 时，为减函数
指数函数	$y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$		图象在 x 轴上方，且过点 $(0,1)$，当 $0<a<1$，为减函数；当 $a>1$，为增函数

（续表）

名称		表达式	定义域	图形	特性
对数函数		$y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$	$(0,+\infty)$		图象在 y 轴右侧，且过点 $(1,0)$，当 $0<a<1$，为减函数；当 $a>1$，为增函数
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期，为奇函数，$\|\sin x\|\leqslant 1$
	余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期，为偶函数，$\|\cos x\|\leqslant 1$
	正切函数	$y=\tan x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期，为奇函数，在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内为增函数
	余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期，为奇函数，在 $(0,\pi)$ 内为减函数

(续表)

名称		表达式	定义域	图形	特性
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		单调增加，奇函数，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
	反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		单调减少，值域为$[0,\pi]$
	反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		单调增加，奇函数，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
	反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$		单调减少，值域为$(0,\pi)$

从表1-1中，我们可以清楚地看到基本初等函数的定义域、值域、有界性、奇偶性、单调性、周期性及其图形等.

2. 复合函数

若y是u的函数$y=f(u)$，u是x的函数$u=\varphi(x)$，若x在$u=\varphi(x)$的定义域或其子域上取值时，所对应的u值，使$y=f(u)$有定义，则称y为x的**复合函数**(Compound function)，记为$y=f(\varphi(x))$. 其中u称为**中间变量**(Intermediate variable).

例7 试确定由函数$y=u^2$和$u=\sin x$构成的复合函数.

解 将$u=\sin x$代入$y=u^2$中，就构成复合函数$y=\sin^2 x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

例8 试分解复合函数$y=e^{\arcsin 3x}$.

解 显然该复合函数是由$y=e^u$，$u=\arcsin v$和$v=3x$复合而成.

由上面例子可见，复合函数可能由多个基本初等函数复合而成. 但应注意，并非任意两个函数都能构成复合函数，如$y=\arcsin u$与$u=1+e^x$就不能构成复合函数，因为$u=1+e^x$的值域超出了$y=\arcsin u$的定义域.

复合函数分解的原则为分解后的函数是五类基本初等函数形式或四则运算式子.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合，所构成的只有一个解析式表示的函数，叫做**初等函数**(Elementary function). 如

$$y=\sqrt[3]{x^2-1},y=\mathrm{e}^x+\sin x,y=\frac{\ln x+x\sqrt{x}}{x^3\arctan x^2}$$

都是初等函数. 而分段函数及无限形式的式子等一般不是初等函数,如

$$y=\begin{cases}2^x & x\geqslant 0,\\ x+1 & x<0;\end{cases}\quad y=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

都不是初等函数.

我们以后所讨论的函数大多为初等函数.

第二节 极 限

一、数列的极限

1. 数列

定义 1.2 设函数 $x_n=f(n)$(n 为正整数),按 n 增大的顺序所形成的一列数

$$f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots$$

称为一个**数列**(Sequence of numbers),记为 $\{f(n)\}$ 或 $\{x_n\}$.

其中数 $f(n)$ 或 x_n 称为数列的**一般项**.

对于数列,常要讨论其有界性和单调性,其定义与函数有界性和单调性的定义类似.

若存在一个常数 $M>0$,使得对任意 n,总有 $|x_n|\leqslant M$ 成立,则称数列 $\{x_n\}$ 有界.

若对于数列 $\{x_n\}$ 中的任意 n,总有 $x_n\leqslant x_{n+1}$(或 $x_n\geqslant x_{n+1}$),则称数列 $\{x_n\}$ 单调增加(或单调减少). 单调增加和单调减少的数列统称为**单调数列**. 如

$\{x_n\}=\{1-\frac{1}{n}\}$($n=1,2,3,\cdots$)为单调增加的有界数列;

$\{x_n\}=\{1+\frac{1}{n}\}$($n=1,2,3,\cdots$)为单调减少的有界数列;

$\{x_n\}=\{(-1)^n\}$($n=1,2,3,\cdots$)为有界但非单调数列;

$\{x_n\}=\{-n\}$($n=1,2,3,\cdots$)为单调减少的无界数列.

现在要讨论的问题是,给定一个数列 $\{x_n\}$,当 n 无限增大时,一般项 x_n 变化的趋势怎样? 也就是求数列极限的问题.

2. 数列极限

定义 1.3 设有数列 $\{x_n\}$ 和常数 A,若对任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在一个自然数 N,使得当 $n>N$ 时,恒有

$$|x_n-A|<\varepsilon.$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的**极限**(Limit)为 A,或称数列 $\{x_n\}$ **收敛**(Convergence)于 A,记为

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=A \text{ 或 } x_n\to A(\text{当 } n\to+\infty \text{时}).$$

有极限的数列称为**收敛数列**(Convergent sequence of numbers),极限不存在的数列称为**发散数列**(Divergent sequence of numbers).

若将数列$\{x_n\}$中的每一项都以数轴上的点表示，则$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=A$的**几何意义**为：对于任意给定的正数$\varepsilon$，总存在一个正整数$N$，使得从第$N+1$项起后面所有项的对应点都落在区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$内，即在区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$外至多存在有限个点$x_1,x_2,\cdots,x_N$. 如图1-3所示.

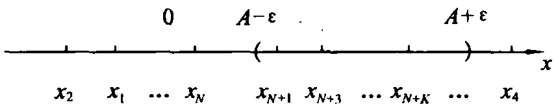


图1-3

由数列极限的定义可以看出，一个数列的极限是否为A，取决于对任意给定的正数ε，能否找到相应的自然数N.

例1 根据极限定义，证明$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{1}{2}}=0$.

分析：任给$\varepsilon>0$，要使$|n^{-\frac{1}{2}}-0|<\varepsilon$，只需取$n>\frac{1}{\varepsilon^2}$.

由于定义中的N是自然数，故可取$n=[\frac{1}{\varepsilon^2}]$，这里$[\frac{1}{\varepsilon^2}]$表示不超过$\frac{1}{\varepsilon^2}$的最大整数.

证 对于任意给定的$\varepsilon>0$，取$N=[\frac{1}{\varepsilon^2}]$，则当$n>N$时，$n>\frac{1}{\varepsilon^2}$.

于是恒有
$$n^{-\frac{1}{2}}<\varepsilon,$$
即
$$|n^{-\frac{1}{2}}-0|<\varepsilon,$$
所以$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{1}{2}}=0$.

例2 判断数列$\{\cos\frac{n\pi}{2}\}$的敛散性.

解 因为数列$\{\cos\frac{n\pi}{2}\}$的各项依次为
$$0,-1,0,1,\cdots$$
当$n\to+\infty$时，它不趋于一个确定的常数，故发散.

3. 数列性质

性质1 若一个数列有极限，则该极限是惟一的.

性质2 数列的极限与数列的任意有限项无关，即增删数列中的有限项不影响数列极限.

性质3 数列有极限，则数列一定有界. 反之数列有界，但未必有极限. 如$\{x_n\}=\{(-1)^n\}$有界，但无极限.

性质4 单调有界数列必有极限.

二、函数的极限

1. $x\to\infty$时函数$f(x)$的极限

定义1.4 若对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在一个正数M，当$|x|>M$时，恒有
$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

则称当 $x\to\infty$ 时，常数 A 为函数 $f(x)$ 的**极限**，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty \text{ 时}).$$

它的**几何意义**是：无论直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$ 所夹的条形区域多么窄，只要 x 离原点充分远（即 $|x|>M$），函数 $f(x)$ 的图形都在该条形区域内，如图 1-4 所示.

如当 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)=1/x$ 的值无限接近于 0.

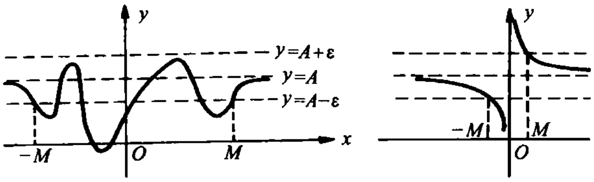


图 1-4

2. $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.5 若对任意给定 $\varepsilon>0$，总存在一个 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

则称当 $x\to x_0$ 时，常数 A 为函数 $f(x)$ 的**极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0 \text{ 时}).$$

在这里应注意，定义中的 $0<|x-x_0|<\delta$ 表示 x 在 x_0 附近取值，但不包括 x_0 本身. 也就是说，$f(x)$ 在 x_0 点是否有极限与 $f(x)$ 在 x_0 处有无定义并无关系.

如函数 $f(x)=x\sin(1/x)$，在 $x=0$ 处没有定义，但其极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x)=0$ 却存在. 这是因为 $|\sin(1/x)|\leqslant 1$，从而 $|x\sin(1/x)|\leqslant|x|$，所以当 $x\to 0$ 时，$x\sin(1/x)\to 0$.

从几何图形上看，作平行于 x 轴的两条平行线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$，得到两条直线间的一横条区域，对于任意的 $\varepsilon>0$，总能找到 x 的一个区域 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$（称为 **$x_0$ 的 δ 邻域**），当 x 在 x_0 邻域内取值时，这点的纵坐标 $f(x)$ 满足不等式

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

即 $f(x)$ 值全部落在上面所作横条形区域内，如图 1-5 所示.

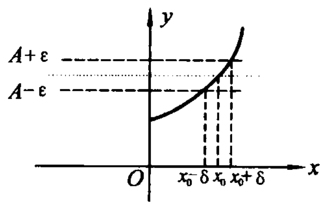


图 1-5

对于 x_0 点的极限定义，显然包括了 x 从左侧趋近于 x_0 和从右侧趋近于 x_0 时，$f(x)$ 趋近于常数 A 的两种情况，我们分别称它们为 x_0 的**左极限**（Left-hand limit）和**右极限**（Right-hand limit），记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A,$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

左极限和右极限统称为**单侧极限**（One-side limit）. 左、右极限不一定同时存在，即使同时存在，也未必相等. 前面的极限定义相应地称为**双侧极限**（Double-side limit）.

定理 1.1 函数 $f(x)$ 在 x_0 点的极限存在的充分必要条件为 $f(x)$ 在 x_0 的左、右极限存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\text{存在}\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

这个定理对于解决分段函数的分段点的极限有着重要意义.