# 高等数学自学指南

孙家乐　编

东南大学出版社

# 高等数学自学指南

孙家乐 编



东南大学出版社

(苏)新登字第012号

## 内容简介

本书是在多年成人教学实践的基础上为了满足广大学员自学高等数学的需要．按照"普通高等理工院校成人教育《高等数学》教学基本要求"编写的．全书共分函数、极限与连续、导数与微分、中值定理、导数应用、不定积分、定积分、常微分方程、无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分以及曲线积分与曲面积分等十二章，每章均分成基本内容、基本要求及重点难点、学习指导及思考以及测验作业题等四部分．本书可与一般通用的《高等数学》以及经济数学《微积分》等教材配套使用，亦可单独使用，作为工科各专业函授、夜大、自学者以及日校大学生的学习参考书．

高等数学自学指南
孙家乐 编

东南大学出版社出版发行
地址：南京四牌楼2号　邮码：210018
南京佳美电脑印刷厂印刷
开本 850×1168 毫米 1/32 印张 14.875 字数 387 千字
1993年1月第1版 1993年1月第1次印刷
印数：1—3000册

ISBN 7-81023-714-4

O·65　定价：7.20元

# 前　言

高等数学课程在高等理工科院校成人教育的教学计划中是一门重要的基础理论课。它是为培养适应我国社会主义初级阶段所需要的高质量的专门人才服务的。

通过本课程的学习，要使学生获得。

1.函数、极限、连续

2.一元函数微积分学

3.常微分方程

4.无穷级数(包括傅立叶级数)

5.向量代数与空间解析几何

6.多元函数微积分学

7.曲线积分与曲面积分

等七个方面的基本概念、基本理论和基本运算技能，为今后学习后继课程，从事工程技术工作、进行科学研究以及进一步获得近代科学技术知识奠定必要的数学基础。

近年来理工科各专业成人教育发展很快，函授、电大、夜大、职大以及其它各类自学成才的学员都要学习高等数学。为了满足广大学员自学高等数学的需要，根据普通高等理工院校成人教育《高等数学》教学基本要求，我们编了这本《高等数学自学指南》，其目的是帮助读者抓住重点，分析难点。培养比较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题解决问题的能力。

本书按章编写，每章均分成四部分。第一部分为基本内容，使读者对该章的内容有一系统的了解；第二部分为基本要求及重点难点。基本要求的高低用不同的词汇加以区分。从高到低对概念和理论用“理解”、“了解”、“知道”三级区分，对运算方法用“熟练掌握”、“掌握”、“会”三级区分，“熟悉”相当于“理解”或“熟练掌握”；第三部分为学习指导及思考，对学员在自学中可能遇到的疑难问题进行详

细分析讨论，以便起到解疑的作用；第四部分为测验作业题，作为学员的阶段自我检查之用。

附录中有希腊字母读音表、初等数学常用公式以及测验作业题答案及略解，以供读者查阅。

本书希望起到一个不见面的辅导教师的作用，能为自学者解忧排难，成为他们的良师益友。

本书的出版得到东南大学成人教育学院各级领导的大力支持与帮助，在此表示衷心的感谢。

本书虽几经修改，不足之处仍在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1992 年 9 月

# 目 录

# 第一章　函　数

## §1-1　基本内容

**函数概念，函数符号，复合函数，反函数，基本初等函数与初等函数，分段函数，双曲函数以及函数的几种特性.**

**1.函数概念**

(1) 定义：若当变量 $x$ 在其变化范围内任取定一个数值时，变量 $y$ 按照一定的法则，总有唯一确定的数值和它对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数。其中 $x$ 称为自变量，$y$ 称为因变量。

有些高等数学教材中函数是通过从两个集合元素之间的对应关系来定义的，尽管两者定义的方式不同，但定义中最本质的东西是相同的，即函数的定义域和对应规则是决定函数关系的两个重要因素。

(2) 函数的两个要素

定义域（自变量的变化范围）；对应规律（函数关系）.

(3) 函数符号

$y=f(x)$ 中“$f$”表示 $y$ 与 $x$ 之间的对应规律，不同的函数可以用不同的表示式。如 $y=F(x)$、$y=\varphi(x)$、…、甚至可用 $y=y(x)$ 来表示 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系。

**2.函数的几种特性**

(1) 奇偶性：若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。

奇（或偶）函数的定义域一定是对称区间，因此定义域不是对称区间的函数（如 $y=\ln x$）必定是非奇非偶函数.

(2) 单调性：若 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是单调增加函数；若 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是单调减少函数。

单调性是一种局部性质。有些函数在定义域内是单调增加（或减少）函数，但多数函数是在其定义域内有增有减。利用导数来判断函数的增减是非常方便的，因此本章只要求掌握单调性的概念，将单调性的判断放到第四章来解决。

(3) 有界性：若当 $a < x < b$ 时，$|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 内有界。

有界性同样是一种局部性质，有些函数在某个定义域内是有界的，而在另外一个定义域内可以是无界的，在平面直角坐标系中，有界函数的图形应完全落在由直线 $y = -M$ 及 $y = M$ 为边的"带形"之内。

(4) 周期性：若 $f(x+T) = f(x)(T \neq o)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，$T$ 称为 $f(x)$ 的周期，满足等式 $f(x+T) = f(x)$ 的最小正数 $T$ 称为 $f(x)$ 的最小正周期。

以 $T$ 为周期的周期函数的图形，在 $ox$ 轴上以 $T$ 为周期重复出现。

**3.复合函数与反函数**

(1) 复合函数：设 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，$\varphi(x)$ 的值全部或部分落在 $f(u)$ 的定义域内，则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为 $x$ 的复合函数，$u$ 称为中间变量。

(2) 反函数：设函数 $y = f(x)$，若把 $y$ 当作自变量，$x$ 当作函数，由关系式 $y = f(x)$ 中解出 $x = \varphi(y)$，此时称函数 $x = \varphi(y)$ 为函数 $y = f(x)$ 的反函数。也称 $y = \varphi(x)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数，此时它们的图形对称于直线 $y = x$.

**4.初等函数与分段函数**

(1) 基本初等函数：中学里学过的常数函数、幂函数、指数函

数、对数函数、三角函数、反三角函数等六种函数称为基本初等函数。

(2) 初等函数：由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算构成且用同一个解析式子表示的函数称为初等函数。

(3) 分段函数：在自变量的不同变化范围内用不同的解析式子表示的函数称为分段函数。它是一种非初等函数。

**5.双曲函数**

双曲函数是一类特殊的初等函数，由于在有些工程实际问题中经常遇到这类函数，因此专门予以讨论。

双曲正弦 $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

反双曲正弦 $\operatorname{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$

双曲余弦 $\operatorname{ch}x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

反双曲余弦 $\operatorname{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^{2}-1})$

双曲正切 $\operatorname{th}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

反双曲正切 $\operatorname{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

## §1－2 基本要求及重点难点

**1.基本要求**

(1) 理解函数概念，会熟练地使用函数和函数值记号。会求函数的定义域。

(2) 掌握基本初等函数的性质及其图形。

(3) 了解反函数的概念，理解复合函数的概念，会熟练地分析复合函数的复合层次。

(4) 了解分段函数的概念，知道双曲函数的概念。

(5) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。

(6) 能列出简单实际问题中的函数关系。

2. **重点难点**

(1) 重点：概念方面：函数概念，复合函数，分段函数，计算方面：求定义域，求函数值，会分析初等函数的结构和复合层次。

(2) 难点：复合函数的计算。

## §1－3 学习指导及思考

1. 函数是怎样定义的？$y=c$（常数）能否看成是某个变量的函数？为什么？

〔解〕 函数的定义见书 §1－1

$y=c$ 可以看成某个变量 $(x)$ 的函数 $y=f(x)=c$，因为对于任意给定的 $x\in R$ 总有唯一的值 $y=c$ 与之对应，完全符合函数的定义，此时函数的定义域为 $R$，函数的值域就是常数 $c$.

2. 直线 $y=2x+1$ 能否看成一个函数？抛物线 $y^2=x$ 能否将 $y$ 看成自变量 $x$ 的函数？画出它们的图形并求出定义域。

〔解〕 直线 $y=2x+1$ 可以看成因变量 $y$ 与自变量 $x$ 之间的一个函数关系，此时定义域与值域均为 $R$。

对于 $y^2=x$ 就不能看成 $y$ 是 $x$ 的函数，因为对于每一个 $x>o$（例如 $x=4$）由 $y^2=x$ 得到两个 $y$ 值 $(y=\pm 2$，不唯一），因此它不是一个函数。但如果我们定义

$$y=f_1(x)=\sqrt{x},\ y=f_2(x)=-\sqrt{x},$$

则就得到两个函数，它分别表示抛物线的上半枝和下半枝．它们的定义域均为 $R_+$（图 1－1）

3.下列各题中两个函数是否相同，为什么？

(1)$f(x)=x$，　$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$

(2)$f(x)=x$，　$\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$

(3)$f(x)=\ln x^2$，　$\varphi(x)=2\ln|x|$

(4)$f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$，　$\varphi(x)=2\sin x$

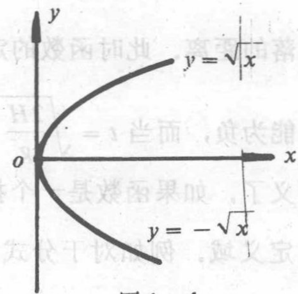

图 1－1

〔解〕要判断两个函数是否相同，主要依据函数概念的两个要素：定义域和对应规律。若两个函数的定义域和对应规律相同，则两个函数是同一个函数，否则就是不同的函数。

(1) 两个函数的定义域相同都是 $R$，但它们的对应规律不同，因为 $\varphi(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$，所以 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 不相同，只有当 $x\in(o+\infty)$ 时两个函数才相同。

(2) 两个函数定义域不同，$f(x)$ 是 $R$，而 $\varphi(x)$ 是 $(o+\infty)$ 因此不相同。只有当 $x\in(o+\infty)$ 时两个函数才相同。

(3) 两个函数的定义域相同都是 $R$，并且对应规律也相同，因此是同一个函数。

(4)$f(x)$ 的定义域是 $x\neq\dfrac{2k+1}{2}\pi$，而 $\varphi(x)$ 是 $R$ 两者不同，因此两个函数不相同，只有当 $x\neq\dfrac{2k+1}{2}\pi$ 时，$f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 才是相同的。

4. 如何求函数的定义域．

〔解〕如果函数表示一个具体的问题，那么根据问题的几何性质或物理意义来确定定义域。例如离地面高为 $H$ 处有一自由落体，则它的运动方程为 $S=\dfrac{1}{2}gt^2$，自变量 $t$ 表示时间，$S$ 表示落

体下落的距离．此时函数的定义域为 $o \leqslant t \leqslant \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$，因为时间 $t$ 不可能为负，而当 $t=\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$ 时落体已到达地面，$t>\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$ 就没有意义了．如果函数是一个抽象的解析式，那么就根据解析式来确定定义域．例如对于分式函数 $\dfrac{1}{u(x)}$ 就根据分式 $u(x)\neq 0$ 来确定；对于 $\sqrt{u(x)}$，根据被开方函数 $u(x)\geqslant 0$ 来确定 $x$；对于 $\log_a u(x)$，根据真数 $u(x)>0$ 来确定；而对于 $\arcsin u(x)$，$\arccos u(x)$，则根据 $|u(x)|\leqslant 1$ 来确定．

5.(1) 求函数 $y=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域。

(2) 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-2,\ 2]$，试求 $f(1+x)+f(1-x)$ 的定义域。

〔解〕 对于根式 $\sqrt{9-x^2}$ 必须 $9-x^2\geqslant o$，而对于分式 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$，则必须 $x^2-1>o$，即对于函数 $y$ 而言，自变量 $x$ 必须满足不等式组：

$$\begin{cases}9-x^2\geqslant 0\\ x^2-1>0\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 3\\ x<-1\text{或}x>1\end{cases}$$

因此函数的定义域为 $[-3,\ -1)$ 和 $(1,\ 3]$

(2) 已知 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-2,\ 2]$，意即 $-2\leqslant x\leqslant 2$，故对 $f(1+x)$ 而言有 $-2\leqslant 1+x\leqslant 2$. 而对 $f(1-x)$ 而言有 $-2\leqslant 1-x\leqslant 2$，因此对函数 $f(1+x)+f(1-x)$ 而言，$x$ 应满足不等式组

$$\begin{cases}-2\leqslant 1+x\leqslant 2\\ -2\leqslant 1-x\leqslant 2\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

因此所求函数的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

6. 如何求函数值，设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，试计算 $f(0)$，$f(-x)$，$f(x+1)$，$f(\dfrac{1}{x})$.

〔解〕 对于函数 $y=f(x)$，当变量 $x$ 取定值 $x_0$ 时函数的对应值就称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值，记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

对于函数值，不但要熟练计算当自变量取实数时的函数值，也要会熟练计算当自变量取某一函数时的"函数值".

例如对于函数 $y=f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$f(t^2)$ 就是指当 $x=t^2$ 时 $f(x)$ 等于什么？因此只要将 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 中的 $x$ 换成 $t^2$ 就是 $f(t^2)$ 了，即 $f(t^2)=\dfrac{1}{1+(t^2)^2}=\dfrac{1}{1+t^4}$

对于函数 $y=f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则有

$$f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1,\quad f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x}.$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{x+2},$$

$$f(\frac{1}{x})=\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}$$

7. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，$\varphi(x)=\sqrt{1+x^2}$，

求 $f[f(x)]$，$f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$，$\varphi[\varphi(x)]$.

〔解〕

$$f[f(x)]=\frac{1}{[f(x)]^2+1}=\frac{1}{(\frac{1}{x^2+1})^2+1}=\frac{(x^2+1)^2}{x^4+2x^2+2}$$

$$f[\varphi(x)]=\frac{1}{[\varphi(x)]^2+1}=\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^2+1}=\frac{1}{x^2+2}$$

$$\varphi[f(x)]=\sqrt{1+[f(x)]^2}=\sqrt{1+(\frac{1}{x^2+1})^2}=\frac{\sqrt{x^4+2x^2+2}}{x^2+1}$$

$$\varphi[\varphi(x)]=\sqrt{1+[\varphi(x)]^2}=\sqrt{1+(\sqrt{1+x^2})^2}=\sqrt{x^2+2}$$

8.(1) 已知 $\varphi(x+1)=x^2+2$，求 $\varphi(x)$

(2) 已知 $f(\sin\frac{x}{2})=\cos x+1$，求 $f(x)$ 并计算 $f(\cos\frac{x}{2})$

〔解〕(1) 令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，代入 $\varphi(x+1)=x^2+2$ 得 $\varphi(t)=(t-1)^2+2=t^2-2t+3$，于是

$\varphi(x)=x^2-2x+3$

(2) 因为 $f(\sin\frac{x}{2})=\cos x+1=(1-2\sin^2\frac{x}{2})+1=2(1-\sin^2\frac{x}{2})$，从而有 $f(x)=2(1-x^2)$，于是

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x$$

9.(1) 什么是分段函数？对分段函数如何计算其函数值以及作图？

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 1\\ e^x, & x>1\end{cases}$，则 $f(x+a)$

$=\begin{cases}1+(x+a), & x\leqslant 1\\ e^{(x+a)}, & x>1\end{cases}$，这样做法对吗？为什么？其中 $a$ 是实数。

〔解〕(1) 在自然科学及工程技术中，用解析式表示函数时，经常会遇到在定义域内不同范围用不同的式子表示的函数，这种有几个解析表达式分段表示的函数称为分段函数。

对分段函数求函数值时，必须注意要将不同点的函数值代入相应范围的公式中去。作图时必须分段进行描图，然后画在一张图上。(有些初学者画分段函数的图形时，将分段图各画一张，这是不对的。)

(2) 做法是错误的，因为用 $x+a$ 替换 $f(x)$ 中的 $x$ 时，由于 $f(x)$ 是分段函数，故必须考虑 $x+a\leqslant 1$ 和 $x+a>1$ 和情况。

当 $x+a\leqslant 1$ 时即 $x\leqslant 1-a$ 时，应将 $x+a$ 代入到前一个式子中的 $x$ 处；当 $x+a>1$ 即 $x>1-a$ 时，应将 $x+a$ 代入到后一个式子中的 $x$ 处，所以有

$$f(x+a)=\begin{cases}1+(x+a)=x+a+1, & x\leqslant 1-a\\ e^{(x+a)}, & x>1-a\end{cases}$$

10. 已知 $y=f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0\\ x-1, & x>0\end{cases}$，试求 $f(0)$，$f(2)$，$f(1+a)$，$f(e^x)$ 并作图。

〔解〕$y=f(x)$ 是分段函数，$x=o$ 要代入前一个式子而 $x=2$ 要代入后一个式子，即

$$f(o)=1+o^2=1,\qquad f(2)=2-1=1.$$

当 $1+a\leqslant 0$ 时，$x=1+a$ 要代入前一个式子，$f(1+a)=1+(1+a)^2=a^2+2a+2$；当 $1+a>0$ 时要代入后一个式子 $f(1+a)=(1+a)-1=a$，故有

$$f(1+a)=\begin{cases}a^2+2a+2, & a\leqslant -1\\ a, & a>-1\end{cases}$$

由于对任何的 $x$，$e^x>0$，故有 $f(e^x)=e^x-1$。其图如图 1－2 所示