

# 数学

(初中1990—1991)

## 奥林匹克精选

《中等数学》编辑部编

四川大学出版社

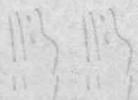
# 数学奥林匹克精选

(初中1990—1991)

《中等数学》编辑部 编

四川大学出版社

1992年·成都



(川)新登字014号

责任编辑：王敦平

封面设计：黄薇

技术设计：王敦平

## 数学奥林匹克精选

(初中，1990—1991)

《中等数学》编辑部编

---

四川大学出版社出版发行 (成都市望江路29号)

四川省新华书店经销 成都教育印刷厂印刷

787×1092mm 32开本 8.25印张 165千字

1992年10月第1版 1992年10月第1次印刷

印数：00001—10000 册

---

ISBN 7-5614-0561-8/0·71 定价：3.50元

## 前　　言

数学奥林匹克，无论对于命题者，还是对于参赛者，无疑都是一项高级的、复杂的智力运动。

多年来，数学奥林匹克运动在我国之所以能顽强生长、兴旺发达起来，是有其深刻的背景和基础的。概言之，这就是高科技时代发展的需要。数学奥林匹克运动在发现和培养人才方面，在推动数学教育教学改革方面的重大作用，正在并将继续显示出来。

目前，要对我国每年举办的各级各类数学竞赛作出精确统计，是十分困难的。这些竞赛产生了大量珍贵资料。这些资料，无论对于竞赛的组织者、命题者，还是对于竞赛的辅导者、参加者，都具有重要的参考价值。可惜，收集、积累这些资料，对许多人来说，却是件相当难办的事情。

为了满足读者对数学奥林匹克资料的需求，我们从每年收集到的国内外竞赛资料中，精选一批，编成此书，献给读者。凡收入本书的资料，按年级归类，题目原样照登，参考答案略作调整，全书体例力求统一。

这项收集、编选资料的工作，对于数学奥林匹克运动持久地发展，对于发现、培养和选拔人才，无疑是一件大工作，今后将继续下去，还望各地读者予以支持。

《中等数学》编辑部

1992年4月于天津

## 目 录

(111) ······	赛尖赛数学中师同二省工研
(011) ······	赛耐赛数学中师省西山羊0001
(120) ······	目数学录 因缺冈黄省出斯手0001
(123) ······	赛青数学中师孙立书师同三省
(113) ······	赛源数学中师同二省市尖尖
前言 ······	前言 ······ (1)
1990年全国初中数学联赛 ······	1990年全国初中数学联赛 ······ (1)
1991年全国初中数学联赛 ······	1991年全国初中数学联赛 ······ (11)
第一届希望杯数学邀请赛初一第二试 ······	第一届希望杯数学邀请赛初一第二试 ······ (18)
第二届五羊杯初一数学竞赛 ······	第二届五羊杯初一数学竞赛 ······ (23)
第六届汉江杯初一数学基础知识竞赛 ······	第六届汉江杯初一数学基础知识竞赛 ······ (30)
(221) ······	赛资学矮中师市安西羊0001
1990年北京市中学生数学竞赛初二初试 ······	1990年北京市中学生数学竞赛初二初试 ······ (35)
1990年北京市中学生数学竞赛初二复试 ······	1990年北京市中学生数学竞赛初二复试 ······ (43)
第一届希望杯数学邀请赛初二第二试 ······	第一届希望杯数学邀请赛初二第二试 ······ (49)
1990年绍兴市初二数学竞赛 ······	1990年绍兴市初二数学竞赛 ······ (53)
1990年武汉市初二数学竞赛 ······	1990年武汉市初二数学竞赛 ······ (57)
第二届五羊杯初二数学竞赛 ······	第二届五羊杯初二数学竞赛 ······ (61)
第六届汉江杯初二数学基础知识竞赛 ······	第六届汉江杯初二数学基础知识竞赛 ······ (70)
(013) ······	赛开跟学矮二师科慧晋平1001
1990—1991武汉、重庆、广州、洛阳、福州初中三省市数	1990—1991武汉、重庆、广州、洛阳、福州初中三省市数
数学联赛 ······	数学联赛 ······ (75)
第六届全国部分省、市初中数学通讯赛 ······	第六届全国部分省、市初中数学通讯赛 ······ (82)
1990年四川省初中数学联赛第一试 ······	1990年四川省初中数学联赛第一试 ······ (88)
1990年上海市初三数学竞赛 ······	1990年上海市初三数学竞赛 ······ (99)
1990年江苏省初中数学竞赛 ······	1990年江苏省初中数学竞赛 ······ (104)

浙江省第二届初中数学竞赛决赛	(111)
1990年山西省初中数学竞赛预赛	(119)
1990年湖北省黄冈地区初中数学竞赛	(129)
第三届祖冲之杯初中数学邀请赛	(133)
安庆市第二届初中数学联赛	(142)
1990年长春市数学奥林匹克培训班竞赛	(147)
1990年合肥市初中数学竞赛	(151)
1990年南昌市初中数学竞赛	(157)
1990年沈阳市育才杯初中数学邀请赛	(163)
1990年芜湖市初中数学竞赛	(170)
第二届五羊杯初三数学竞赛	(174)
1990年西安市初中数学竞赛	(185)
1990年咸阳市初中数学选拔赛	(189)
第六届美国初中数学考试	(193)
 《04》	
石室杯初一数学竞赛	(200)
石室杯初二数学竞赛	(204)
1991年天津市初二数学竞赛	(209)
1991年贵阳市初二数学竞赛	(214)
1991年智慧杯初二数学通讯赛	(219)
杭州市第三届求是杯初二数学竞赛	(223)
1991年吉林省参加全国初中数学联赛预选赛	(230)
1991年智慧杯初三数学通讯赛	(237)
第八届缙云杯初中数学邀请赛	(243)
1991年雏鹰杯初三数学邀请赛	(250)

1990年全

# 1990年全国初中数学联赛

## 第一试

(1990. 4. 1, 60分钟)

本试共两道大题，满分80分。

### 一、选择题 (每小题6分，共48分)

本题共8个小题，每个小题都给出了代号为A, B, C, D的四个结论，其中只有一个结论是正确的。请把正确结论的代号写在题后的圆括号内，每小题选对得6分，不选、选错或选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分。

$$1. \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} + \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \frac{2}{1-\sqrt{3}} + \frac{2}{1+\sqrt{3}} + \frac{2}{1+\sqrt{3}} + \frac{2}{1+\sqrt{3}} + \frac{2}{1+\sqrt{3}} =$$

1.  $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} + \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \frac{2}{1+\sqrt{3}}$  的值是 ( ) .

(A) 1. (B) -1 (C) 2. (D) -2.

2.  $\triangle ABC$ 中， $AD$ 是高，且  $AD^2 = BD \cdot CD$ . 那么， $\angle BAC$ 的度数是 ( ).

(A) 小于  $90^\circ$ . (B) 等于  $90^\circ$ .

(C) 大于  $90^\circ$ . (D) 不确定.

3. 方程  $7x^2 - (k+13)x + k^2 - k - 2 = 0$  ( $k$ 是实数) 有两个实根  $\alpha, \beta$ , 且  $0 < \alpha < 1, 1 < \beta < 2$ . 那么,  $k$ 的取值范围是 ( ).



(A)  $3 < k < 4$ . (B)  $-2 < k < -1$ .

(C)  $3 < k < 4$  或  $-2 < k < -1$ . (D) 无解.

4. 恰有35个连续自然数的算术平方根的整数部分相同. 那么, 这个相同整数是 ( ).

(A) 17. (B) 18. (C) 35. (D) 36.

5.  $\triangle ABC$  中,  $AB = 2\sqrt{2}$ ,  $AC = \sqrt{2}$ ,  $BC = 2$ , 设  $P$  为  $BC$  边上任一点, 则 ( ).

(A)  $PA^2 < PB \cdot PC$ .

(B)  $PA^2 = PB \cdot PC$ .

(C)  $PA^2 > PB \cdot PC$ .

(D)  $PA^2$  与  $PB \cdot PC$  的大小关系不确定.

6. 若六边形的周长等于20, 各边长都是整数, 且以它的任意三条边为边都不能构成三角形. 那么, 这样的六边形 ( ).

(A) 不存在.

(B) 只有一个.

(C) 有有限个, 但不只一个.

(D) 有无穷多个.

7. 若  $\log_a b$  的尾数是 0, 且  $\log_a \frac{1}{b} > \log_a \sqrt{b} > \log_b a^2$ ,

那么, 下列四个结论:

(A)  $\frac{1}{b} > \sqrt{b} > a^2$ , (B)  $\log_a b + \log_b a = 0$ ,

(C)  $0 < a < b < 1$ , (D)  $ab - 1 = 0$ .

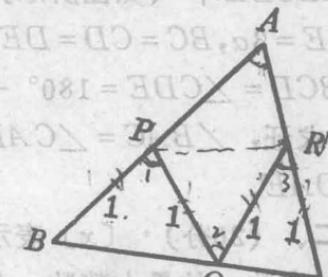
中, 正确的结论的个数是 ( ).

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

8. 如图, 点P、Q、R分别在 $\triangle ABC$ 的边AB、BC、CA上, 且 $BP = PQ = QR = RC$  (示意图略). 那么,  $\triangle ABC$ 面积的最大值是( ).

- (A)  $\sqrt{3}$ . (B) 2. (C)  $\sqrt{5}$ . (D) 3.

二、填空题 (本题只要求直接填写结果. 每小题8分, 共32分)



1. 已知  $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 8$ , 则  $\frac{x^2 + 1}{x} =$

2.  $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 123456789^2$  的和的个位数的数字是\_\_\_\_\_.

3. 方程  $(x-a)(x-8)-1=0$  有两个整数根, 则  $a=$

4.  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC = 2$ ,  $BC$  边有100个不同的点,  $P_1, P_2, \dots, P_{100}$ . 记  $m_i = AP_i^2 + BP_i \cdot CP_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 100$ ). 则  $m_1 + m_2 + \dots + m_{100} =$

案 答 案 参

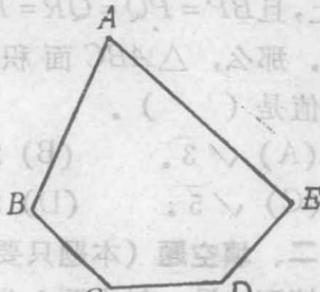
## 第二试

(1990. 4. 1, 90分钟)

5	3	6	4	9	1	8
D	D	C	A	C	D	B

本试共三道大题, 满分60分。

一、(20分) 已知在凸五边形 $ABCDE$ 中(如图所示)  
 $\angle BAE = 3\alpha$ ,  $BC = CD = DE$ , 且 $\angle BCD = \angle CDE = 180^\circ - 2\alpha$ . 求证:  $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ .



二、(20分)  $[x]$  表示不超过实数  $x$  的最大整数, 令  $\{x\} = x - [x]$ .

① 找出一个实数  $x$ , 满足  $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$ ; ~~不等于~~

② 证明: 满足上述等式的  $x$ , 都不是有理数.

三、(20分)

设有 $2n \times 2n$ 的正方形方格棋盘, 在其中任意的 $3n$ 个方格中各放一枚棋子. 求证: 可以选出  $n$  行和  $n$  列, 使得  $3n$  枚棋子都在这  $n$  行和  $n$  列中.

## 参考答案

### 第一试

#### 一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
D	D	C	A	C	D	A	B

2. 略解 由  $AD^2 = BD \cdot CD$ , 有

$$2AD^2 = 2BD \cdot CD,$$

$$\text{则 } (BD^2 + AD^2) + (AD^2 + CD^2) = (BD + CD)^2.$$

下面分两种情形:

①若  $D$  在  $BC$  内 (如图),

$$\text{则 } AB^2 + AC^2 = BC^2,$$
  
故  $\angle BAC = 90^\circ$ .



②若  $D$  在  $BC$  的延长线上

(图略), 则

$$AB^2 + AC^2 > BC^2,$$

故

$$\angle BAC < 90^\circ.$$

3. 解 设  $f(x) = 7x^2 - (k+13)x + k^2 - k - 2$ .

由

$$\begin{cases} f(0) = k^2 - k - 2 > 0, \\ f(1) = k^2 - 2k - 8 < 0, \\ f(2) = k^2 - 3k > 0, \end{cases}$$

推得  $3 < k < 4$  或  $-2 < k < -1$ .

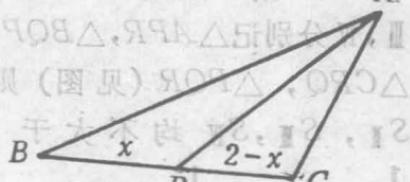
4. 提示: 设这 35 个连续自然数最小的是  $n^2$ , 最大的是  $(n+1)^2 - 1$ .

5. 提示: 如图, 设  $BP = x$ , 则  $PC = 2 - x$ , 再应用余弦定理, 有  $PA^2 = x^2 - 5x + 8$ .

6. 略解 设六个整数为  $a_1, a_2, \dots, a_6$ , 应满足

$$\textcircled{1} a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 20.$$

$$\textcircled{2} a_1 \leq a_2, a_1 + a_2 \leq a_3, a_2 + a_3 \leq a_4, a_3 + a_4 \leq a_5, a_4 + a_5 \leq a_6.$$



③  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > a_6$ . 由 証得  
则以  $a_1, a_2, \dots, a_6$  为边长的六边形，即符合要求。

事实上，对任意选取的三整数  $1 < i < j < k \leq 6$ ，必有  $a_i + a_j \leq a_k$ ，可见此六边形的任三边不能构成一个三角形。

现取  $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8$ ，  
则  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  满足全部条件。故这样的六边形  
至少存在一个，又由  $n$  边形 ( $n \geq 4$ ) 的不稳定性，即知这样  
的六边形有无穷多个。

7. 略解 由  $\log_a \frac{1}{b} > \log_a \sqrt{b}$  得 假设 (假设)

$$\log_a b < 0$$

所以  $a < 1, b > 1$  或  $a > 1, b < 1$ ，且  $\log_b a < 0$ 。  
于是知结论③与②都错。

若结论①对，则由  $\frac{1}{b} > \sqrt{b}, b < 1$ ，从而  $a > 1$ 。于是

又得  $\sqrt{b} < a^2$ ，这与①的第二个不等式相违。

结论④的正确性证明略。只是要注意，证明了④对，仍  
不能据此选定 (A)。

8. 解 首先以 I, II, III, IV 分别记  $\triangle APR, \triangle BQP, \triangle CRQ, \triangle PQR$  (见图) 则  
 $S_I, S_{II}, S_{III}$  均不大于  $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ 。又因

$$\begin{aligned} \angle PQR &= 180^\circ - (\angle B + \angle C) \\ &= \angle A. \end{aligned}$$



设  $h_1, h_2$  分别为  $\triangle QRP, \triangle APR$  公共边  $PR$  上的高。作出  $\triangle PQR$  关于  $PR$  的对称图形  $PQ'R$ ，这时  $Q', A$  都在以  $PR$  为弦的含  $\angle A$  的弓形弧上，且因  $PQ' = Q'R$ ，所以  $Q'$  为这弧中点。故可得出  $h_2 \leq h_1$ 。从而

$$S_I \leq S_{II} \leq \frac{1}{2}.$$

这样  $S_{\triangle ABC} = S_I + S_{II} + S_{III} + S_{IV} \leq 4 \times \frac{1}{2} \leq 2$ 。

最后，当  $AB = AC = 2$ ，( $\angle A = 90^\circ$  时)， $S_{\triangle ABC} = 2$ 。  
即可以达到最大值。

## 二、填空题

1	2	3	4
62	5	8	400

2. 解 因为  $123456789 = 10 \times 12345678 + 9$ ，

故所求个位数字应为

$$\begin{aligned} & (1+4+9+6+5+6+9+4+1+0) \times 12345678 \\ & + (1+4+9+6+5+6+9+4+1) \\ & = 45 \times 12345678 + 45 \end{aligned}$$

的个位数字，即  $5 \times 8 + 5 = 45$  的个位数字。因而，所求的个位数字是 5。

3. 解 原方程整理为

$$x^2 - (a+8)x + 8a - 1 = 0$$

设  $x_1, x_2$  为方程的两个整数根，由  $x_1 + x_2 = a+8$ ，知  $a$  为整数。因此， $x-a$  和  $x-8$  都是整数。由

由  $x - a = x - 8$  ( $= \pm 1$ ), 故  $a = 8$ .

故  $a = 8$ .

中题 4. 解 以  $A$  为圆心,  $2$  为半径, 作圆  $A$ , 延长  $P_i A$ , 交圆  $A$  于  $E, F$  两点 (如图).  
则



$$\begin{aligned}BP_i \cdot P_i C &= EP_i \cdot P_i F \\&= (AE - AP_i) \cdot (AF + AP_i) \\&= (2 - AP_i) \cdot (2 + AP_i) \\&= 4 - AP_i^2.\end{aligned}$$

所以  $m_i = AP_i^2 + BP_i \cdot P_i C = 4$ ,

因而  $m_1 + m_2 + \dots + m_{100} = 4 \times 100 = 400$ .

65 2 8 400

## 第二试

一、证明 连  $BD, CE$ . 由

$BC = CD = DE$ ,

$\angle BCD = \angle CDE$

$$= 180^\circ - 2\alpha,$$

有  $\triangle BCD \cong \triangle CDE$ ,

则  $\angle CBD = \angle CDB$

$$= \angle DCE = \angle DEC = \alpha.$$

所以  $\angle BCE = (180^\circ - 2\alpha) - \alpha$

$$= 180^\circ - 3\alpha.$$

又因  $\angle BAE = 3\alpha$ ,

所以  $A, B, C, E$  共圆.



同理可证  $A, B, D, E$  共圆。

由上证明知  $A, B, C, D, E$  共圆，  
即  $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = \alpha$ 。

注：本题是著名的莫勒三分角线定理的一种证法中所建立的预备定理，它的证法很多，这里只给出一种较简单的证法。

二、解 设  $x = m + \alpha$ ,  $\frac{1}{x} = n + \beta$  ( $m, n$  为整数,  $0 \leq \alpha, \beta < 1$ )。因  $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = \alpha + \beta = 1$ ,

所以  $x + \frac{1}{x} = m + \alpha + n + \beta = m + n + 1$ .

是整数。

令  $x + \frac{1}{x} = k$  ( $k$  为整数), 则

$$x^2 - kx + 1 = 0.$$

解得  $x = \frac{1}{2}(k \pm \sqrt{k^2 - 4})$ .

当  $|k| = 2$  时,  $|x| = 1$ , 易证它不满足所设等式。

当  $|k| \geq 3$  时,  $x = \frac{1}{2}(k \pm \sqrt{k^2 - 4})$  是满足等式的全体

实数。

由于  $k^2 - 4$  不是完全平方数 (事实上, 若  $k^2 - 4 = h^2$ , 则  $k^2 - h^2 = 4$ , 但当  $|k| \geq 3$  时, 两个平方数之差不小于 5),

所以  $x$  是无理数, 即满足题设等式的  $x$ , 都不是有理数。

三、证明 先取  $n$  行使这  $n$  行所放的棋子总数  $S$  取最大值,

则  $S \geq 2n$ .

事实上，因若  $S < 2n$ ，则所选  $n$  行中至少有一行（设为第  $k$  行）的棋子数不多于 1，而其余的  $n$  行的棋子数的和将不小于  $n+1$ ，从而，至少有一行（设为第  $l$  行）的棋子数多于 1。这样，把已选的  $n$  行中的第  $k$  行换成第  $l$  行，则所得  $n$  行的棋子总数将比  $S$  至少多 1，这与所设取法相违。

选出的这  $n$  行已含有不少于  $2n$  枚棋子，再选出  $n$  列使其包含其余的棋子（不多于  $n$  枚），这样选取的  $n$  行和  $n$  列包含了全部  $3n$  枚棋子。

$$I = Q + S = \left\{ \frac{1}{x} \right\} + \{ \text{外团} \}, (I > 0)$$

$$I + R + M = Q + S + D + M = \frac{I}{x} + x$$

• 谈整县

$$\text{现 } \cdot (\text{谈整式}) \quad d = \frac{I}{x} + x$$

$$0 = I + xd - x^2$$

$$(\sqrt{d} - \sqrt{x}) \pm \sqrt{x} = x$$

$$\text{左举右测且断不占着是 } I = |x|, \text{ 则 } S = |d| \text{ 当}$$

$$\text{本全 } \text{左举且断是 } (\sqrt{d} - \sqrt{x}) \pm \sqrt{x} = x, \text{ 则 } S \leq |d| \text{ 当}$$

$$\text{左举且断不占着是 } I = 1 - x^2 \text{ (由上实事) 谈式平全流是不 } -d \text{ 于由}$$

$$(x \leq 0 \text{ 不差 } \Delta \text{ 谈式平个两 } \leq |d| \text{ 当且 } x = \sqrt{d} - \sqrt{x}).$$

$$\text{谈整首长不确 } x \text{ 左举且断且断明 } \text{ 谈整首是 } x \text{ 以得}$$

$$(\text{左大最重 } \Delta \text{ 整首干期首效得首 } \text{ 右举首 } \text{ 谈整首 } \text{ 三})$$

# 1991年全国初中数学联赛

## 第一试

(1991. 4. 12, 90分钟)

### 一、选择题 (每小题6分, 共48分)

本题共8个小题, 每小题都给出了代号为A, B, C, D的四个结论, 其中只有一个结论是正确的. 请把正确结论的代号写在题后括号内. 每小题选对得6分, 不选、选错或选出的代号超过一个, 一律得零分.

1. 设等式 $\sqrt{a(x-a)} + \sqrt{a(y-a)} = \sqrt{x-a} - \sqrt{a-y}$ 在实数范围内成立, 其中 $a, x, y$ 是两两不同的实数. 则 $\frac{3x^2 + xy - y^2}{x^2 - xy + y^2}$ 的值是( ).

- (A) 3. (B)  $\frac{1}{3}$ . (C) 2. (D)  $\frac{5}{3}$ .

2. 如图,  $AB \parallel EF, EF \parallel CD$ . 已知 $AB = 20, CD = 80, BC = 100$ . 那么,  $EF$ 的值是( ).

- (A) 10. (B) 12.  
(C) 16. (D) 18.

3. 方程 $x^2 - |x| - 1 = 0$ 的解是( ).

