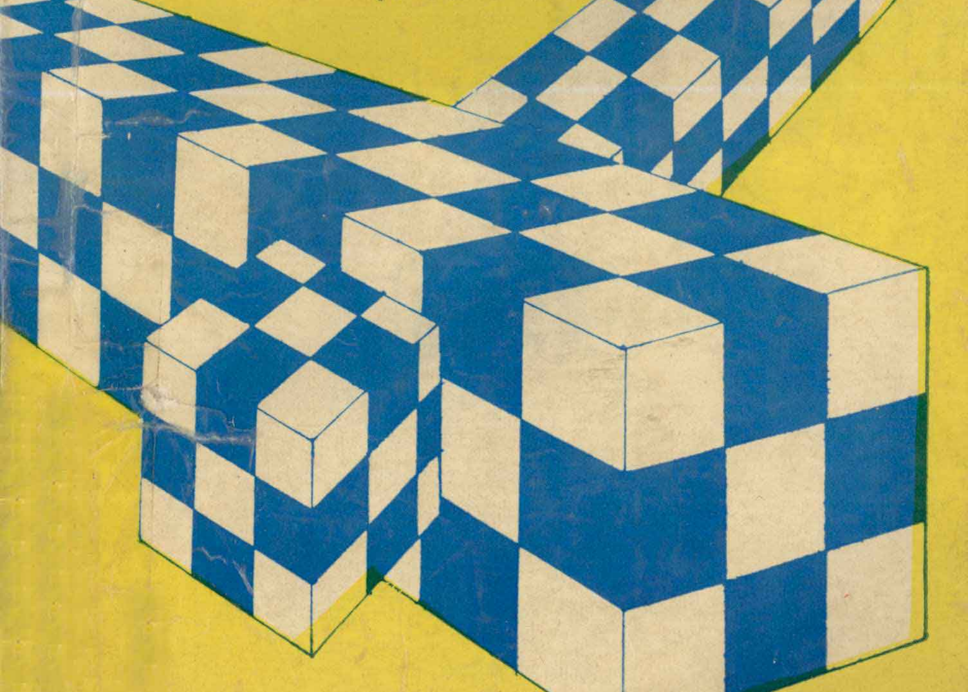
数学（初中1990——1991）

奥林匹克精选

《中等数学》编辑部编



四川大学出版社

数学奥林匹克精选

（初中1990—1991）

《中等数学》编辑部 编

四 川 大 学 出 版 社

1992年·成都

(川)新登字014号

责任编辑：王敦平
封面设计：黄 薇
技术设计：王敦平

数学奥林匹克精选
(初中，1990—1991)
《中等数学》编辑部编

四川大学出版社出版发行　(成都市望江路29号)
四川省新华书店经销　成都教育印刷厂印刷
787×1092mm32开本　8.25印张　165千字
1992年10月第1版　1992年10月第1次印刷
印数：00001—10000 册

ISBN 7-5614-0561-8/O·71　定价：3.50元

前 言

数学奥林匹克，无论对于命题者，还是对于参赛者，无疑都是一项高级的、复杂的智力运动。

十多年来，数学奥林匹克运动在我国之所以能顽强生长、兴旺发达起来，是有其深刻的背景和基础的。概言之，这就是高科技时代发展的需要。数学奥林匹克运动在发现和培养人才方面，在推动数学教育教学改革方面的重大作用，正在并将继续显示出来。

目前，要对我国每年举办的各级各类数学竞赛作出精确统计，是十分困难的。这些竞赛产生了大量珍贵资料。这些资料，无论对于竞赛的组织者、命题者，还是对于竞赛的辅导者、参加者，都具有重要的参考价值。可惜，收集、积累这些资料，对许多人来说，却是件相当难办的事情。

为了满足读者对数学奥林匹克资料的需求，我们从每年收集到的国内外竞赛资料中，精选一批，编成此书，献给读者。凡收入本书的资料，按年级归类，题目原样照登，参考答案略作调整，全书体例力求统一。

这项收集、编选资料的工作，对于数学奥林匹克运动持入地发展，对于发现、培养和选拔人才，无疑是一件的工作，今后将继续下去，还望各地读者予以支

《中等数学》编辑部

1992年4月于天津

目　录

1990年全

1990年全国初中数学联赛

第 一 试

（1990．4．1，60分钟）

本试共两道大题，满分80分。

一、选择题（每小题 6 分，共48分）

本题共 8 个小题，每个小题都给出了代号为A，B，C，D的四个结论，其中只有一个结论是正确的．请把正确结论的代号写在题后的圆括号内，每小题选对得 6 分，不选、选错或选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分．

1．$\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{3}}+\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{3}}+\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}$的值是（　　）．

(A) 1． (B) -1 (C) 2． (D) -2．

2．$\triangle ABC$中，AD是高，且$AD^2=BD\cdot CD$．那么，$\angle BAC$的度数是（　　）．

(A) 小于90°．　(B) 等于90°．

(C) 大于90°．　(D) 不确定．

3．方程 $7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$（k是实数）有两个实根α，β，且$0<\alpha<1$，$1<\beta<2$．那么，k的取值范围是（　　）．

(A) $3<k<4$. (B) $-2<k<-1$.

(C) $3<k<4$或$-2<k<-1$. (D) 无解.

4. 恰有35个连续自然数的算术平方根的整数部分相同。那么，这个相同整数是（ ）.

(A) 17. (B) 18. (C) 35. (D) 36.

5. $\triangle ABC$中，$AB=2\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{2}$，$BC=2$，设P为BC边上任一点，则（ ）.

(A) $PA^2<PB\cdot PC$.

(B) $PA^2=PB\cdot PC$.

(C) $PA^2>PB\cdot PC$.

(D) PA^2与$PB\cdot PC$的大小关系不确定.

6. 若六边形的周长等于20，各边长都是整数，且以它的任意三条边为边都不能构成三角形。那么，这样的六边形（ ）.

(A) 不存在.

(B) 只有一个.

(C) 有有限个，但不只一个.

(D) 有无穷多个.

7. 若$\log_a b$的尾数是0，且$\log_a \frac{1}{b}>\log_a\sqrt{b}>\log_b a^2$，那么，下列四个结论：

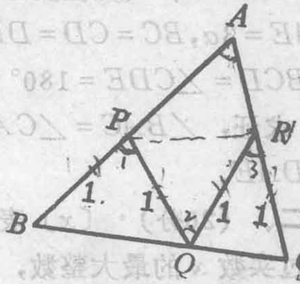
(A) $\frac{1}{b}>\sqrt{b}>a^2$， (B) $\log_a b+\log_b a=0$，

(C) $0<a<b<1$， (D) $ab-1=0$.

中，正确的结论的个数是（ ）.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

8. 如图，点P、Q、R分别在$\triangle ABC$的边AB，BC，CA上，且$BP=PQ=QR=RC=1$。那么，$\triangle ABC$面积的最大值是（　　）.



(A) $\sqrt{3}$.　　(B) 2.

(C) $\sqrt{5}$.　　(D) 3.

二、填空题（本题只要求直接填写结果。每小题 8 分，共32分）

1. 已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=8$。则$\dfrac{x^2+1}{x}=$________。

2. 1^2，2^2，3^2，…，123456789^2的和的个位数的数字是________。

3. 方程 $(x-a)(x-8)-1=0$ 有两个整数根，则$a=$________。

4. $\triangle ABC$中，$AB=AC=2$，BC边有100个不同的点，P_1，P_2，…，P_{100}。记$m_i=AP_i^2+BP_i\cdot P_iC$ $(i=1, 2, \cdots, 100)$。则 $m_1+m_2+\cdots+m_{100}=$________。

第　二　试

（1990．4．1，90分钟）

本试共三道大题，满分60分。

一、(20分) 已知在凸五边形$ABCDE$中(如图所示)$\angle BAE=3\alpha, BC=CD=DE$，且$\angle BCD=\angle CDE=180°-2\alpha$。求证：$\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE$。

二、(20分)〔x〕表示不超过实数x的最大整数，令$\{x\}=x-[x]$。

①找出一个实数x，满足$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1$；

②证明：满足上述等式的x，都不是有理数。

三、(20分)

设有$2n\times 2n$的正方形方格棋盘，在其中任意的$3n$个方格中各放一枚棋子．求证：可以选出n行和n列，使得$3n$枚棋子都在这n行和n列中。

参考答案

第一试

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
D	D	C	A	C	D	A	B

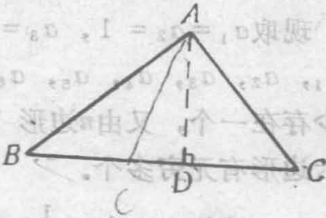
2. **略解** 由$AD^2=BD\cdot CD$，有

$$2AD^2=2BD\cdot CD,$$

则$(BD^2+AD^2)+(AD^2+CD^2)=(BD+CD)^2$.

下面分两种情形：

①若D在BC内（如图），



则 $AB^2+AC^2=BC^2$，

故 $\angle BAC=90°$.

②若D在BC的延长线上（图略），则

$$AB^2+AC^2>BC^2,$$

故 $$\angle BAC<90°.$$

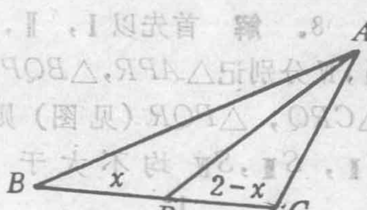
3. **解** 设$f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k-2$.

由
$$\begin{cases} f(0)=k^2-k-2>0, \\ f(1)=k^2-2k-8<0, \\ f(2)=k^2-3k>0, \end{cases}$$

推得 $3<k<4$ 或$-2<k<-1$.

4. **提示：** 设这35个连续自然数最小的是n^2，最大的是$(n+1)^2-1$.

5. **提示：** 如图，设$BP=x$，则$PC=2-x$，再应用余弦定理，有$PA^2=x^2-5x+8$.



6. **略解** 设六个整数为a_1，a_2，…，a_6，应满足

①$a_1+a_2+\cdots+a_6=20$.

②$a_1\leqslant a_2$，$a_1+a_2\leqslant a_3$，$a_2+a_3\leqslant a_4$，$a_3+a_4\leqslant a_5$，$a_4+a_5\leqslant a_6$.

③$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5>a_6$。

则以a_1，a_2，…，a_6为边长的六边形，即符合要求。

事实上，对任意选取的三整数$1<i<j<k\leqslant 6$，必有$a_i+a_j\leqslant a_k$，可见此六边形的任三边不能构成一个三角形。

现取$a_1=a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=3$，$a_5=5$，$a_6=8$，则a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6满足全部条件。故这样的六边形至少存在一个，又由n边形（$n\geqslant 4$）的不稳定性，即知这样的六边形有无穷多个。

7．**略解** 由$\log_a\frac{1}{b}>\log_a\sqrt{b}$ 得

$$\log_a b<0.$$

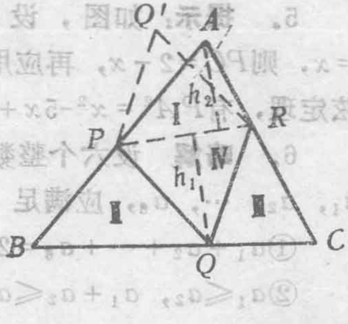
所以$a<1$，$b>1$或$a>1$，$b<1$，且$\log_b a<0$。于是知结论③与②都错。

若结论①对，则由$\frac{1}{b}>\sqrt{b}$，$b<1$，从而$a>1$。于是

又得$\sqrt{b}<a^2$，这与①的第二个不等式相违。

结论④的正确性证明略。只是要注意，证明了④对，仍不能据此选定（A）。

8．**解** 首先以Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ分别记$\triangle APR$，$\triangle BQP$，$\triangle CRQ$，$\triangle PQR$（见图）则S_{I}，S_{II}，S_{IV} 均不大于$\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$。又因



$$\angle PQR=180^\circ-(\angle B+\angle C)$$
$$=\angle A.$$

设h_1, h_2分别为$\triangle QRP$，$\triangle APR$公共边PR上的高．作出$\triangle PQR$关于PR的对称图形$PQ'R$，这时Q'，A都在以PR为弦的含$\angle A$的弓形弧上，且因$PQ'=Q'R$，所以Q'为这弧中点．故可得出$h_2 \leqslant h_1$．从而

$$S_{\mathrm{I}} \leqslant S_{\mathrm{IV}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

这样　　$S_{\triangle ABC}=S_{\mathrm{I}}+S_{\mathrm{II}}+S_{\mathrm{III}}+S_{\mathrm{IV}} \leqslant 4 \times \frac{1}{2} \leqslant 2$．

最后，当$AB=AC=2$，$\angle A=90°$时，$S_{\triangle ABC}=2$．即可以达到最大值．

二、填空题

1	2	3	4
62	5	8	400

2．**解**　因为$123456789=10\times 12345678+9$，故所求个位数字应为

$$(1+4+9+6+5+6+9+4+1+0)\times 12345678$$
$$+(1+4+9+6+5+6+9+4+1)$$
$$=45\times 12345678+45$$

的个位数字，即$5\times 8+5=45$的个位数字．因而，所求 的 个位数字是5．

3．**解**　原方程整理为

$x^2-(a+8)x+8a-1=0$．

设x_1，x_2为方程的两个整数根，由$x_1+x_2=a+8$，知a为整数．因此，$x-a$和$x-8$都是整数．由

$x-a=x-8\ (=\pm1)$，

故 $a=8$。

4．**解** 以A为圆心，2为半径，作圆A，延长P_iA，交圆A于E，F两点（如图）．则

$$BP_i\cdot P_iC=EP_i\cdot P_iF$$
$$=(AE-AP_i)(AF+AP_i)$$
$$=(2-AP_i)(2+AP_i)$$
$$=4-AP_i^2.$$

所以 $m_i=AP_i^2+BP_i\cdot P_iC=4$，

因而 $m_1+m_2+\cdots+m_{100}=4\times100=400$。

第 二 试

一、证明 连BD，CE。由

$BC=CD=DE$，

$\angle BCD=\angle CDE$

$=180^\circ-2\alpha$，

有 $\triangle BCD\cong\triangle CDE$，

则 $\angle CBD=\angle CDB$

$=\angle DCE=\angle DEC=\alpha$。

所以$\angle BCE=(180^\circ-2\alpha)-\alpha$

$=180^\circ-3\alpha$。

又因 $\angle BAE=3\alpha$，

所以A，B，C，E共圆．

同理可证A，B，D，E共圆。

由上证明知A，B，C，D，E共圆，

即 $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE=\alpha$。

注：本题是著名的莫勒三分角线定理的一种证法中所建立的预备定理，它的证法很多，这里只给出一种较简单的证法。

二、解 设$x=m+\alpha$，$\frac{1}{x}=n+\beta$（m，n为整数，$0\leqslant\alpha$，$\beta<1$）。因$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=\alpha+\beta=1$，

所以 $$x+\frac{1}{x}=m+\alpha+n+\beta=m+n+1.$$

是整数。

令$x+\frac{1}{x}=k$（k为整数），则

$$x^2-kx+1=0.$$

解得 $x=\frac{1}{2}\left(k\pm\sqrt{k^2-4}\right)$.

当$|k|=2$时，$|x|=1$，易证它不满足所设等式。

当$|k|\geqslant3$时，$x=\frac{1}{2}\left(k\pm\sqrt{k^2-4}\right)$是满足等式的全体实数。

由于k^2-4不是完全平方数（事实上，若$k^2-4=h^2$，则$k^2-h^2=4$，但当$|k|\geqslant3$时，两个平方数之差不小于5），

所以x是无理数，即满足题设等式的x，都不是有理数。

三、证明 先取n行使这n行所放的棋子总数S取最大值，

则$S\geqslant 2n$。

事实上，因若$S<2n$，则所选n行中至少有一行（设为第k行）的棋子数不多于1，而其余的n行的棋子数的和将不小于$n+1$，从而，至少有一行（设为第l行）的棋子数多于1。这样，把已选的n行中的第k行换成第l行，则所得n行的棋子总数将比S至少多1，这与所设取法相违。

选出的这n行已含有不少于$2n$枚棋子，再选出n列使其包含其余的棋子（不多于n枚），这样选取的n行和n列包含了全部$3n$枚棋子。

1991年全国初中数学联赛

第 一 试

（1991．4．12，90分钟）

一、选择题（每小题6分，共48分）

本题共8个小题，每小题都给出了代号为A，B，C，D的四个结论，其中只有一个结论是正确的．请把正确结论的代号写在题后括号内．每小题选对得6分，不选、选错或选出的代号超过一个，一律得零分．

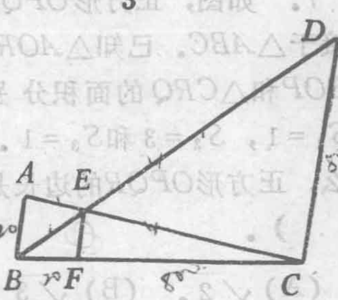
1． 设等式$\sqrt{a(x-a)}+\sqrt{a(y-a)}=\sqrt{x-a}-\sqrt{a-y}$在实数范围内成立，其中$a$，$x$，$y$是两两不同的实数．则$\dfrac{3x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}$的值是（ ）．

（A）3．（B）$\dfrac{1}{3}$ （C）2．（D）$\dfrac{5}{3}$．

2．如图，$AB\parallel EF$，$EF\parallel CD$．已知$AB=20$，$CD=80$，$BC=100$．那么，EF的值是（ ）．

（A）10．（B）12，

（C）16．（D）18．



3． 方程$x^2-|x|-1=0$的解是（ ）．