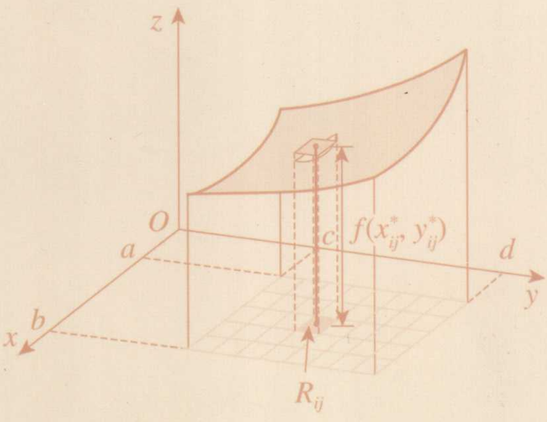
"十二五"国家重点图书出版规划项目
中国科学院指定考研参考书

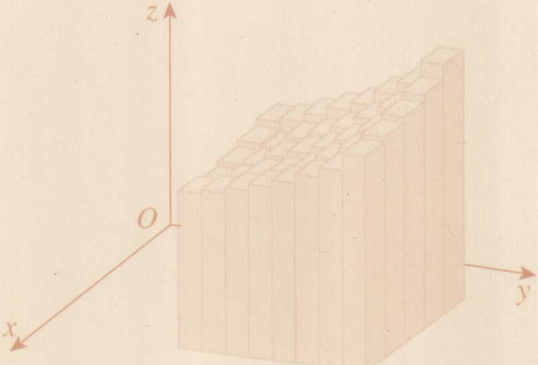
中国科学技术大学精品教材

微积分学导论

下册

李思敏 宣本金 罗 罗 叶 盛 编





中国科学技术大学出版社

中国科学技术大学精品教材

微积分学导论

WEIJIFENXUE DAOLUN

下 册

李思敏　宣本金　罗　罗　叶　盛　编

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是在中国科学技术大学高等数学教研室编写的《高等数学导论》基础之上，并由参与微积分教学多年的教师分工编写而成的，内容结构方面得以重新组织和优化，而且部分过于烦琐的内容也得到了删除或简化，以适应当今理工科数学教育的发展，并满足培养学生的要求．本书分上、下两册出版，内容包含微积分学的核心内容及其应用．

本书是下册，内容包括多变量函数的微分学、多变量函数的积分学、无穷级数、含参变量积分、傅里叶分析等五章．本书的编写充分考虑了学生的背景和认知水平，尽量由具体问题引入数学概念，同时采用语言描述、公式表达、数值列表以及图形说明等多种方式，以使抽象深奥的数学概念、思想和方法变得具体、生动、形象和直观．为加深对概念、定理等的理解和掌握，书中编有丰富的例题，并有详细的解答，可给学生提供一个分析问题和解决问题的范本；还提供了大量的习题和复习题供学生练习；另外，每章末的复习都很好地总结了该章的内容，以供学生参考和总结．

本书可作为理工科院校非数学专业或师范类院校数学专业的教材或教学参考书，也可供具有一定数学基础的读者自学．

图书在版编目(CIP)数据

微积分学导论．下册/李思敏等编．—合肥：中国科学技术大学出版社，2012.2
(中国科学技术大学精品教材)
"十二五"国家重点图书出版规划项目
中国科学院指定考研参考书
ISBN 978-7-312-02985-1

Ⅰ．微…　Ⅱ．李…　Ⅲ．微积分—高等学校—教材　Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 008593 号

中国科学技术大学出版社出版发行
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
安徽省瑞隆印务有限公司印刷
全国新华书店经销

开本：710 mm×960 mm 1/16　印张：24　插页：2　字数：443 千
2012 年 2 月第 1 版　2012 年 2 月第 1 次印刷
定价：43.00 元

总　　序

2008年,为庆祝中国科学技术大学建校五十周年,反映建校以来的办学理念和特色,集中展示教材建设的成果,学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列.在各方的共同努力下,共组织选题281种,经过多轮、严格的评审,最后确定50种入选精品教材系列.

五十周年校庆精品教材系列于2008年9月纪念建校五十周年之际陆续出版,共出书50种,在学生、教师、校友以及高校同行中引起了很好的反响,并整体进入国家新闻出版总署的"十一五"国家重点图书出版规划.为继续鼓励教师积极开展教学研究与教学建设,结合自己的教学与科研积累编写高水平的教材,学校决定,将精品教材出版作为常规工作,以《中国科学技术大学精品教材》系列的形式长期出版,并设立专项基金给予支持.国家新闻出版总署也将该精品教材系列继续列入"十二五"国家重点图书出版规划.

1958年学校成立之时,教员大部分来自中国科学院的各个研究所.作为各个研究所的科研人员,他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统.同时,根据"全院办校,所系结合"的原则,科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学,为本科生授课,将最新的科研成果融入到教学中.虽然现在外界环境和内在条件都发生了很大变化,但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变.正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针,并形成了优良的传统,才培养出了一批又一批高质量的人才.

学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统,也是她特别成功的原因之一.当今社会,科技发展突飞猛进、科技成果日新月异,没有扎实的基础知识,很难在科学技术研究中作出重大贡献.建校之初,华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行,亲自为本科生讲授基础课.他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德,带出一批又一批杰出的年轻教员,培养

了一届又一届优秀学生.入选精品教材系列的绝大部分是基础课或专业基础课的教材,其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响,因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神.

改革开放之初,学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习,他们在带回先进科学技术的同时,也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学,并以极大的热情进行教学实践,使“科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合”的方针得到进一步深化,取得了非常好的效果,培养的学生得到全社会的认可.这些教学改革影响深远,直到今天仍然受到学生的欢迎,并辐射到其他高校.在入选的精品教材中,这种理念与尝试也都有充分的体现.

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点,用创新的精神编写教材.进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生,针对他们的具体情况编写教材,才能更加有利于培养他们的创新精神.教师们坚持教学与科研的结合,根据自己的科研体会,借鉴目前国外相关专业有关课程的经验,注意理论与实际应用的结合,基础知识与最新发展的结合,课堂教学与课外实践的结合,精心组织材料、认真编写教材,使学生在掌握扎实的理论基础的同时,了解最新的研究方法,掌握实际应用的技术.

入选的这些精品教材,既是教学一线教师长期教学积累的成果,也是学校教学传统的体现,反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果.希望该精品教材系列的出版,能对我们继续探索科教紧密结合培养拔尖创新人才,进一步提高教育教学质量有所帮助,为高等教育事业作出我们的贡献.

侯建国

中国科学技术大学校长
中国科学院院士
第三世界科学院院士

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

前　　言

本教材是在中国科学技术大学高等数学教研室编写的《高等数学导论》基础之上编写而成的.而《高等数学导论》脱胎于中国科学技术大学成立之初由曾肯成教授主编的《高等数学讲义》,是20世纪80年代由当时的任课教师集体改编而成的.这两部教材在中国科学技术大学的教学历程中都起到了积极的作用,培养了一批又一批学子,功不可没.随着时代的发展,《高等数学导论》改编重版的必要性就显得越来越紧迫了.这主要表现在以下几点:

(1)《高等数学导论》自1988年出版以来,已经二十多年了.虽然这二十多年中有过修改,但只是对错漏的订正.后来为了适应中国科学技术大学学制"五改四"的需要,教学课时和周期大大缩减,将原三册改为上、下两册出版,但是由于种种原因教材内容和结构等基本没有变动.所以,一直以来我们想对《高等数学导论》从内容方面重新撰写,并从结构方面重新组织和优化,添加一部分新内容,删除或简化一部分过于烦琐的内容,以适应今天培养大学生的要求.在本教材中有若干定理的证明加上了星号 *,表示该证明利用了后面的结论或者附录中的结论,对于课时比较紧张的课堂,可以只要求学生会利用该定理的结论即可,定理证明的细节可以跳过;还有若干小节加上了星号 *,表示在课时比较紧张时,可以跳过该小节内容的学习,而不影响微积分学核心内容的学习和理解,也可以安排为课外阅读内容,由授课教师根据教学进度以及学生的接受能力等决定取舍.

(2)《高等数学导论》包括解析几何和向量代数的内容,但现在这些内容已经划归为"线性代数"课程的一部分,所以应该从微积分课程中删除掉;还有一些内容也要删除,比如实数的完备性等,由于非数学系学生对于数学逻辑证明的接受能力以及教学时间紧迫等原因,这些内容一般在课堂上不

予讲授,但还穿插在教材的正文部分,使学生陷入“学”与“不学”的两难境地,给学生带来困惑,给教学带来麻烦.本教材将改写后的实数构造理论以及实数完备性的几个等价定理,放入附录之中,可供对之感兴趣而又学有余力的学生学习.当然这些内容对于理解建立在实数基础之上的极限理论,乃至整个微积分学都有很大的帮助.本教材将原来分别编写在上、下两册的可积常微分方程和线性微分方程两部分内容进行整合,统一纳入到上册的“微分方程”一章,这样有利于教学安排,节省课时,又方便学生学习理解.同时,由于上册没有讲授幂级数知识,所以应用幂级数求解方程的内容将放入幂级数的应用之中讲授.本教材下册将外微分形式一节的内容作为附录,这是因为:由于课时等原因,这部分内容在课堂上一般不讲授,但是外微分形式对现代数学以及物理等学科而言又极其重要,外微分形式不仅统一了牛顿-莱布尼茨公式、格林公式、高斯公式以及斯托斯公式,而且是微积分学在流形上作进一步推广的出发点.因此,我们认为虽然课堂上没有时间讲授外微分形式,但是将其作为进一步的阅读材料还是很有必要的.本教材还纠正了《高等数学导论》中若干错漏之处.

(3) 钱学森先生是中国科学技术大学近代力学系首任系主任,他对非数学系用的微积分教材的编写有过指导性建议:既要写出从哪儿来,即数学概念的“来龙”,也要写出到哪儿去,也就是用在什么地方,即数学知识的“去脉”.钱老的这些意见是我们写作本书始终遵守的原则.在教材编写过程中,我们充分考虑学生的背景和认知水平,尽量由具体问题引入数学概念,同时辅以几百张图片,以使那些抽象深奥的数学概念、思想和方法变得具体、生动、形象和直观.对于微积分学中的概念、思想和方法的物理和几何背景与解释,与数学其他分支之间的联系以及理论和重要公式之间的联系都适当地写入本教材之中,以帮助学生理解,使其不但知其然,也知其所以然.数学理论学习之后,本教材都有意地编排一些物理和几何甚至是生活中的具体应用问题,对这些问题的分析和解决,可以培养学生运用数学知识分析问题和解决问题的能力,激发其学习数学的兴趣.

(4) 华罗庚先生是中国科学技术大学应用数学和计算技术系的首任系主任,他亲自写作的《高等数学》在内容的取舍和写作方法以及叙述论证的风格等方面始终是我们本书写作过程中模仿的楷模.我们尽量做到核心知识突出,理论体系脉络清晰,简繁适当,论证简洁清楚,枝节问题一笔带过,

例题针对性强，并且分析透彻，能起到举一反三的作用，应用问题紧贴知识主题且分析细致．在每一章之末，专门编写本章复习．首先，将本章内容作提纲挈领性的回顾，这就是华老提出的“由厚到薄”的学习过程；其次，提出一些与正文内容紧密相连的复习思考题，以利于学生对自己的学习掌握情况作检验，引导学生再“由薄到厚”．同时，本教材用许多开放式的思考题引导学生将数学与其他自然科学以及日常生活紧密地联系起来，增强其学习兴趣；最后，附有一定量的具有较强综合性的复习题，帮助学生将所学知识进行融会贯通，提高自己解决问题的能力，其中不乏近年来的考研试题．

本教材由参与微积分教学多年的教师分工合作编写而成，分上、下两册．上册由陈祖墀、宣本金、汪琥庭和吴健编写，其中宣本金编写实数与函数、极限理论和微分方程及实数的构造(附录)；陈祖墀和吴健编写单变量函数的微分学；陈祖墀和汪琥庭编写单变量函数的积分学．最后集体统编上册，并由宣本金描绘所有插图．下册由李思敏、宣本金、罗罗和叶盛编写，其中李思敏编写多变量函数的微分学；罗罗编写多变量函数的积分学及外微分形式(附录)；宣本金和叶盛编写无穷级数和含参变量积分；宣本金编写傅里叶分析，并绘制全书插图．最后集体统编下册．

在此，我们对在编写本教材过程中所有给予过帮助的同事和朋友表示由衷的感谢，特别对编写《高等数学导论》的同事们表示感谢．初写《微积分学导论》，错误和不足之处在所难免，恳请广大专家和读者给予指正，以在后续的印刷中或再版时改正．

编　者
2011 年 11 月
中国科学技术大学

目　次

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 6 章　多变量函数的微分学

6.1　多变量函数的极限与连续

6.1.1　平面点集

在平面 $\mathbb{R}^2$ 中建立直角坐标系，则平面中的点可以用有序的二元数组来表示：

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}.$$

平面中两点 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$ 间的距离（图 6.1）定义为

$$\rho(M_1,M_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

它满足距离的三个要素：

(1)（正定性）$\rho(M_1,M_2) \geqslant 0$，且等号成立当且仅当 $M_1 = M_2$；

(2)（对称性）$\rho(M_1,M_2) = \rho(M_2,M_1)$；

(3)（三角不等式）$\rho(M_1,M_3) \leqslant \rho(M_1,M_2) + \rho(M_2,M_3)$.

仔细考察上册中的单变量微积分学，可以发现函数的连续性、可微性以及可积性都是建立在极限理论的基础之上的，而极限是通过距离来定量刻画的．类似地，平面中两点间的距离也是刻画平面点集以及定义在平面点集上的函数的极限、连续等概念的基础．

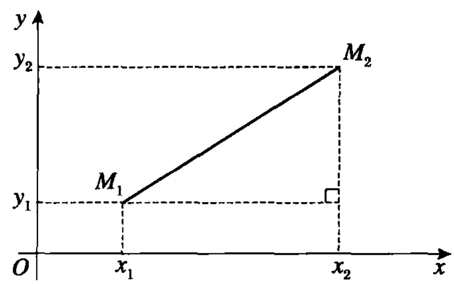


图 6.1　平面中两点间的距离

设 M_0 为平面中的一个点，$\varepsilon > 0$，M_0 的 ε **邻域**定义为

$$B(M_0,\varepsilon) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(M,M_0) < \varepsilon\}.$$

这是以 M_0 为中心、ε 为半径的圆盘（不含边缘）．去掉圆心的圆盘记为

$$B_{-}(M_0,\varepsilon)=\{M\in\mathbb{R}^2 \mid 0<\rho(M,M_0)<\varepsilon\}.$$

设 E 为平面子集，如果存在 $\varepsilon>0$，使得 $B(M_0,\varepsilon)\subset E$，则称 E 为 M_0 的邻域.

给定平面中的子集 E，则平面中的点 M 相对于子集 E 可以划分为三类：

(1) 如果存在 $\varepsilon>0$，使得 $B(M,\varepsilon)\subset E$，则称 M 为 E 的**内点**. E 的内点都属于 E，E 的所有内点的集合记为 E°.

(2) 如果存在 $\varepsilon>0$，使得 $B(M,\varepsilon)\subset E^c$（$E^c$ 表示 E 的补集），则称 M 为 E 的**外点**，E 的外点为 E^c 的内点，故不属于 E.

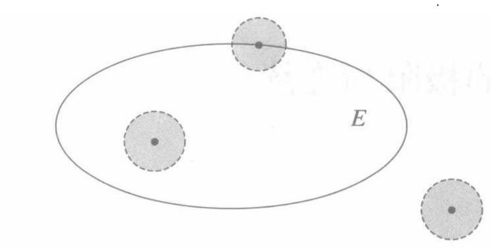


图 6.2　内点、外点以及边界点

(3) 如果对 $\forall\,\varepsilon>0$，$B(M,\varepsilon)$ 中既有 E 中的点，也有 E^c 中的点，则称 M 为 E 的**边界点**. E 的边界点可能属于 E，也可能不属于 E. E 的所有边界点的集合称为 E 的边界，记为 ∂E. 注意，E 和 E^c 具有相同的边界. 如图 6.2 所示.

定义 6.1.1（开集与闭集）　如果平面子集 E 中的每个点都是内点，即对 E 中的任意一点 M，都存在 $\varepsilon>0$，使得 $B(M,\varepsilon)\subset E$，则称 E 为**开集**. 如果 E 的补集 E^c 为开集，则称 E 为**闭集**，

由定义知，全平面 $\mathbb{R}^2$ 为开集. 一般地，我们规定空集 $\varnothing$ 为开集. 这样，$\mathbb{R}^2$ 和 $\varnothing$ 也是闭集.

例 6.1.1　判别以下集合的类型：

$$E_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\},$$
$$E_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\},$$
$$E_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

解　由开集和闭集的定义可知，E_1 为开集，E_2 为闭集，E_3 为非开非闭集（图 6.3）. □

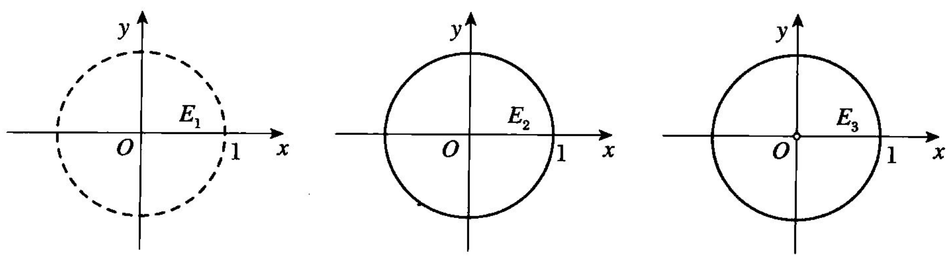


图 6.3　例 6.1.1 中的开集、闭集或非开非闭集

由定义不难看出:两个开集(闭集)的并集和交集仍为开集(闭集).为了更好地刻画开集和闭集,我们引入聚点的概念.

设 E 为一个给定的平面子集,M 为平面中的一点.如果对 $\forall\varepsilon>0$,$B_{-}(M,\varepsilon)\cap E\neq\emptyset$,即 M 的任意邻域中都含有异于 M 的 E 中的点,则称 M 为 E 的**聚点**.

注意,聚点的定义中并没有要求 E 的聚点一定在 E 中.例如,在例 6.1.1 中,单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上的每一点均为开圆盘 E_1 的聚点,但它们不属于 E_1.

定理 6.1.1(闭集的聚点刻画) 平面子集 E 为闭集当且仅当 E 的每个聚点都属于 E.

证明 (1)必要性.设 E 为非空闭集,M 为 E 的一个聚点.如果 $M\notin E$,则 $M\in E^c$.由于 E^c 为开集,故存在 $\varepsilon>0$,使得 $B(M,\varepsilon)\subset E^c$.这样 $B(M,\varepsilon)$ 与 E 没有交点,与 M 是 E 的聚点矛盾.因此,M 属于 E.

(2) 充分性.设 E 的每个聚点均属于 E.为证 E 为闭集,只需证 E^c 为开集.任取 $M\in E^c$,因为 $M\notin E$,故 M 不是 E 的聚点,从而存在 $\varepsilon>0$,$B(M,\varepsilon)\cap E=\emptyset$,即 $B(M,\varepsilon)\subset E^c$,所以 E^c 为开集. □

虽然闭集包含了其所有聚点,但闭集中可以有不是聚点的点,例如,

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leqslant 1\}\cup\{(2,2)\}$$

为闭集,但是点(2,2)不是 E 的聚点.点(2,2)的附近没有 E 中的其他点,我们称之为孤立点.一般地,设 M 为平面子集 E 中的一点,若存在 $\varepsilon>0$,使得 $B(M,\varepsilon)\cap E=\{M\}$,则称 M 为 E 的**孤立点**.易见,点集 E 中的任意一点要么是 E 的聚点,要么是 E 的孤立点.

下面的定理告诉我们可以利用边界来刻画开集和闭集.

定理 6.1.2(开集和闭集的边界刻画) 设 E 为平面点集,则:

(1) E 为开集的充要条件是 $\partial E\cap E=\emptyset$;

(2) E 为闭集的充要条件是 $\partial E\subset E$.

证明 (1) 利用定义,结论是显然的.

(2) 必要性.设 E 为闭集,M 为 E 的一个边界点.若 $M\notin E$,则 M 属于开集 E^c,从而存在 $\varepsilon>0$,使得 $B(M,\varepsilon)\subset E^c$,这与 M 是 E 的边界点矛盾.

充分性.设 $\partial E\subset E$.为证 E 为闭集,只需证 E^c 为开集.设 M 为 E^c 中的任意一点,则 M 不是 E 的边界点,因此存在 $\varepsilon>0$,使得 $B(M,\varepsilon)\cap E=\emptyset$,即 $B(M,\varepsilon)\subset E^c$,所以 E^c 为开集. □

设 $x(t)$,$y(t)$ 为区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数,称点集

$$L=\{(x(t),y(t))\mid\alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$$

为一条连接 $(x(\alpha),y(\alpha))$ 和 $(x(\beta),y(\beta))$ 的平面曲线.

定义 6.1.2(区域) 平面点集 E 称为(道路)**连通**的,如果对于 E 中的任意两点 M_1, M_2,存在一条包含在 E 中的连接 M_1, M_2 的平面曲线.非空连通开集称为**区域**,一个区域和它的边界的并集称为**闭区域**.如图 6.4 所示.

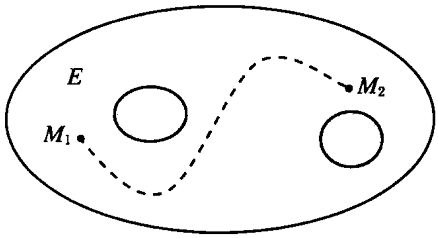


图 6.4 连通集合

我们知道实数集具有完备性,其中一个等价的叙述是:每个柯西数列是收敛的.作为两个实数集的笛卡儿(R. Descartes,1596~1650)积,平面 $\mathbb{R}^2$ 也具有相应的性质.为此,我们引入平面点列的极限与收敛等概念.

定义 6.1.3(点列的极限) 设$\{M_n\}$为平面点列,如果存在点 $M_0 \in \mathbb{R}^2$,使得

$$\lim_{n\to\infty} \rho(M_n, M_0) = 0,$$

即对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,当 $n > N$ 时,不等式 $\rho(M_n, M_0) < \varepsilon$ 成立,则称点列$\{M_n\}$**收敛**,并称 M_0 为点列$\{M_n\}$的**极限**,记为$\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$.如图 6.5 所示.

不难看出,若 M_n 的坐标为(x_n, y_n),M_0 的坐标为(x_0, y_0),则$\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

利用这个充要条件,可以将平面点列$\{M_n\}$的极限问题转化为两个数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$的极限问题;同时,数列极限的许多性质,例如极限的唯一性、有界性以及柯西收敛准则等,通过这个充要条件,可转移到平面点列的极限上.

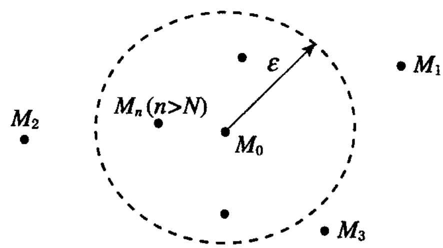


图 6.5 点列的极限

平面点集 E 称为**有界集**,如果存在常数 $K>0$,使得 $E \subset B(O,K)$(这里 O 表示坐标原点).平面点列$\{M_n\}$称为**有界点列**,如果存在常数 $K>0$,使得 $\rho(M_n, O) \leqslant K$,对 $\forall n \geqslant 1$ 成立.类似于实数列,收敛的点列必有界(第 2 题);反之,有界点列未必收敛,但是波尔察诺证明了:有界点列必有收敛的子列(第 3 题).

定义 6.1.4(柯西点列) 若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,当 $n, m > N$ 时,$\rho(M_n, M_m) < \varepsilon$,则称点列$\{M_n\}$为**柯西点列**,

定理 6.1.3(柯西收敛准则) 点列$\{M_n\}$收敛的充要条件是$\{M_n\}$为柯西点列.

证明 利用不等式

$$\max\{|x-x'|,|y-y'|\}\leqslant\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$
$$\leqslant|x-x'|+|y-y'|,$$

可知$\{M_n(x_n,y_n)\}$为柯西点列当且仅当$\{x_n\}$和$\{y_n\}$为柯西数列.利用实数列的柯西收敛准则,可得平面点列的柯西收敛准则. □

6.1.2　二元函数的极限

一元函数和今后要研究的多元函数都是映射的特例.

设 X 与 Y 是两个集合,所谓**映射** $f:X\to Y$ 是指这样一种对应关系:对 X 中的每个元素 x,在 Y 中有且仅有一个元素 y 与之对应,通常用表达式 $y=f(x)$ 表示这种对应关系.集合 X 称为映射 f 的定义域,而集合$\{f(x)\mid x\in X\}$称为 f 的值域或像集.

若 $y=f(x)$,则称 y 为 x(在映射 f 下)的像,x 称为 y 的一个原像.给定一点 $y\in Y$,称集合 $f^{-1}(y)=\{x\mid f(x)=y\}$为 y 的原像集.注意,$f^{-1}(y)$可能是多于一点的集合,还有可能是空集.

如果对 X 中任意两个不同的元素 x_1,x_2,都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 为单映射(简称**单射**);如果对 $\forall\, y\in Y$,都存在 $x\in X$,满足 $f(x)=y$,则称 f 为满映射(简称**满射**).如果 $f:X\to Y$ 既是单射又是满射,则称 f 为**一一映射**.当 f 为一一映射时,对每个 $y\in Y$,有唯一的 $x\in X$ 满足 $f(x)=y$,这就给出了从 Y 到 X 的一个对应关系,称为 f 的**逆映射**,记为 $f^{-1}:Y\to X$.

如果 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 为映射,则对每个 $x\in X$,x 被 f 映为 Y 中的元素 $f(x)$,$f(x)$又被 g 映为 Z 中的元素 $g(f(x))$,这样得到的从 x 到 $g(f(x))$的对应称为映射 f 和 g 的复合,记为 $g\circ f:X\to Z$,用表达式表示为

$$g\circ f(x)=g(f(x)).$$

设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为平面点集,映射 $f:D\to\mathbb{R}$ 称为 D 上的一个**二元函数**.若分别用(x,y)和 z 表示定义域和值域中的元素,则二元函数可用 $z=f(x,y)$表示.

若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为一元函数,f 的图像定义为平面点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in[a,b]\}.$$

当 $f(x)$为连续函数时,它是一条平面曲线.类似地,若 $f:D\to\mathbb{R}$ 为二元函数,则 f 的图像定义为空间中的点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}.$$

例如,$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的图像为上半球面(图 6.6),$z=x^2+y^2$ 的图像为旋转抛物面(图 6.7).

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com