

考研数学

数学二

全真试题与命题预测

考研数学资深辅导名师 张天德 主编

10^{年真题} + 5^{套预测}

- ◆ 10年真题 真题是最好的模拟演练
- ◆ 5套预测 高仿真预测与真题完美切合
- ◆ 评分参考 解答分步骤给分，便于读者自测

考研数学

数学二

全真试题与命题预测



解析部分

主 编 张天德

副主编 张焕玲 吕洪波 张 锋

2011年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题答案和评分参考

一、选择题

【答案速查】(1) C (2) B (3) C (4) C (5) A (6) B (7) D (8) D

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ 解法一: 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{cx^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(\cos x - \cos 3x)}{ckx^{k-1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(-\sin x + 3\sin 3x)}{ck(k-1)x^{k-2}} \\
 &= \frac{3}{ck(k-1)} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-\sin x}{x^{k-2}} + 9 \frac{\sin 3x}{3x^{k-2}} \right],
 \end{aligned}$$

当 $k-2=1$, 即 $k=3$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{cx^k} = \frac{8}{2c} = \frac{4}{c} = 1,$$

故 $c=4$, 因此, 应选(C).解法二: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$,

$$\sin 3x = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3),$$

$$\begin{aligned}
 \text{故 } 3\sin x - \sin 3x &= 3\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) - \left(3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)\right) \\
 &= 4x^3 + o(x^3),
 \end{aligned}$$

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{cx^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + o(x^3)}{cx^k} = 1,$$

故 $c=4, k=3$, 所以, 应选(C).

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3} \\
 &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0).
 \end{aligned}$$

故应选(B).

【方法点击】有的考生利用洛必达法则计算:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 0} f'(x^3) = -f'(0).
 \end{aligned}$$

该方法的错误在于计算中增加了条件 $f'(x)$ 连续, 但本题中仅仅知道 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 因此, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 不一定存在.

(3) 解: 由题设条件知

$$f(x) = \ln |(x-1)(x-2)(x-3)| = \ln |x-1| + \ln |x-2| + \ln |x-3|,$$

$$\text{于是得 } f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{3x^2 - 12x + 11}{(x-1)(x-2)(x-3)},$$

$$\text{令 } f'(x) = \frac{3x^2 - 12x + 11}{(x-1)(x-2)(x-3)} = 0 \text{ 得}$$

$$3x^2 - 12x + 11 = 0,$$

$$\text{其判别式 } \Delta = 12^2 - 4 \times 3 \times 11 = 12 > 0,$$

所以方程 $3x^2 - 12x + 11 = 0$ 有 2 个不同实根,
即函数 $f(x)$ 有 2 个驻点.
故应选(C).

(4) 解: 由题设条件知特征方程为

$$r^2 - \lambda^2 = 0,$$

特征根为: $r_1 = \lambda, r_2 = -\lambda$.

于是微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x}$ 的特解为

$$y_1^* = ax e^{\lambda x};$$

而微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{-\lambda x}$ 的特解为

$$y_2^* = bx e^{-\lambda x}.$$

从而原微分方程的特解形式为

$$y^* = y_1^* + y_2^* = x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x}),$$

故应选(C).

(5) 解: $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x) \cdot g(y), \frac{\partial z}{\partial y} = f(x) \cdot g'(y),$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x) \cdot g(y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(x) \cdot g'(y), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x) \cdot g''(y).$$

由于 $f'(0) = 0, g'(0) = 0$, 根据条件知: $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,0)} = 0, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,0)} = 0,$

即点 $(0,0)$ 是函数 $z = f(x)g(y)$ 的一个驻点. 在点 $(0,0)$ 处:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(0) \cdot g(0), B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(0) \cdot g'(0) = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(0) \cdot g''(0),$$

$$B^2 - AC = 0 - f''(0) \cdot g(0) \cdot f(0) \cdot g''(0),$$

若 $z = f(x)g(y)$ 在 $(0,0)$ 处取得极小值, 则应有 $A = f''(0)g(0) > 0$, 且 $B^2 - AC < 0$.

又 $g(0) < 0, f(0) > 0$, 所以 $f''(0) < 0, g''(0) > 0$.

故应选(A).

(6) 解: 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $\cot x > 1 > \cos x > \sin x$,

$$\text{故 } \ln \cot x > \ln \cos x > \ln \sin x,$$

$$\text{因此 } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx > \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx > \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx, \text{ 即 } I < K < J.$$

故应选(B).

【方法点击】 在 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin x, \cos x, \cot x$ 的图形如图 11-1 所示, 可以看出:

$$\cot x > 1 > \cos x > \sin x.$$

在微积分中, 利用图示法揭示出函数间的关系(大小, 奇偶性, 对称性, 极值, 凹凸性等), 是解题中常用的基本方法之一, 考生应尽量学习、掌握.

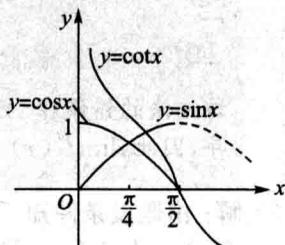


图 11-1

(7) 解: 因为 $AP_1 = B, P_2 B = E$, 所以 $B = P_2^{-1} = P_2$,

故 $AP_1 = P_2$, 于是 $A = P_2 P_1^{-1}$, 所以应选(D).

(8) **【思路探索】** 先求得 $r(A^*)$, 即 $A^* x = 0$ 的基础解系所含向量的个数, 再利用 $Ax = 0$ 的基础解系求得 A 的列向量的线性关系, 从而求得 $A^* x = 0$ 的基础解系.

解: 因为 $Ax = 0$ 的基础解系含一个线性无关的解向量, 所以 $r(A) = 3$, 于是 $r(A^*) = 1$,

故 $A^*x = 0$ 的基础解系含 3 个线性无关的解向量, 排除选项 (A), (B).

又 $A^*A = |A|E = 0$ 且 $r(A) = 3$, 所以 A 的列向量组中含有 $A^*x = 0$ 的基础解系,

因为 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 所以 $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$,

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 或 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 显然 (D) 正确.

【方法点击】 本题主要考查齐次线性方程组的基础解系, 但涉及到 A^* 的秩, 公式 $A^*A = |A|E$ 等知识点, 所以应熟练掌握下列知识点:

$$1) r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{若 } r(A) = n, \\ 1, & \text{若 } r(A) = n-1, \\ 0, & \text{若 } r(A) < n-1. \end{cases}$$

2) 若 $|A| = 0$, 则由 $AA^* = A^*A = |A|E = 0$ 可知, A^* 的列向量是 $Ax = 0$ 的解, 而 A 的列向量是 $A^*x = 0$ 的解.

3) 令 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 则 $k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = 0 \Leftrightarrow (k_1, \dots, k_n)^T$ 是 $Ax = 0$ 的解.

二、填空题

【答案速查】 (9) $\sqrt{2}$ (10) $e^{-x}\sin x$ (11) $\ln(1 + \sqrt{2})$ (12) $\frac{1}{\lambda}$ (13) $\frac{7}{12}$ (14) 2

$$\begin{aligned} (9) \text{ 解法一: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \left(\frac{1+2^x}{2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2^x - 1}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{2^x - 1}{2} \right)^{\frac{2}{2^x - 1}} \right]^{\frac{2^x - 1}{2 \cdot x}} \\ &= e^{\frac{1}{2} \ln 2} = e^{\ln \sqrt{2}} = \sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2^x - 1}{2} \right)^{\frac{2}{2^x - 1}} = e; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \cdot \ln 2}{2} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$\text{解法二: 令 } y = \left(\frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, \text{ 则 } \ln y = \frac{1}{x} \ln \frac{1+2^x}{2},$$

$$\text{于是 } \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2^x) - \ln 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+2^x} \cdot 2^x \cdot \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2},$$

$$\text{即: } \lim_{x \rightarrow 0} y = \sqrt{2},$$

故应填 $\sqrt{2}$.

(10) 解: 由条件知: $P(x) = 1, Q(x) = e^{-x} \cos x$,

于是微分方程通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right) \\ &= e^{-\int 1 dx} \left(\int e^{-x} \cos x e^{\int 1 dx} dx + C \right) \\ &= e^{-x} \left(\int \cos x dx + C \right) \\ &= e^{-x} (\sin x + C), \end{aligned}$$

由 $y(0) = 0$ 得 $C = 0$, 因此所求特解为

$$y = e^{-x} \sin x.$$

故应填 $e^{-x} \sin x$.

(11) 解: 因为 $y'(x) = \tan x$.

$$\text{所以 } s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

故应填 $\ln(1 + \sqrt{2})$.

(12) 解: 由题设条件知

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx &= \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} x \cdot d(e^{-\lambda x}) \\ &= -(xe^{-\lambda x}) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

故应填 $\frac{1}{\lambda}$.

(13) 解: 由题设条件知, 积分区域 $D = \{\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\sin\theta\}$ (如图

11-2)

于是知

$$\begin{aligned} \iint_D xy d\sigma &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^3 \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{2\sin\theta} \sin\theta \cos\theta d\theta = 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta \\ &= \frac{2}{3} \sin^6\theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

故应填 $\frac{7}{12}$.

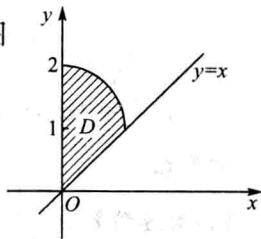


图 11-2

【方法点击】 计算二重积分, 关键是在选定坐标系后化二重积分为累次积分, 这里有两个要点: 其一是坐标系的选择, 其二是积分次序的选择.

① 首先画出积分区域 D 的示意图, 根据区域 D 和被积函数的特点选择坐标系.

② 在极坐标系下化为累次积分的常见情形有: 极点 O 在区域 D 内部, 区域的边界方程为 $r = r(\theta)$; 极点 O 在区域 D 的边界上, 且区域 D 位于极角 θ 满足 $\alpha \leq \theta \leq \beta$ 的扇形内, D 的边界方程为 $r = r(\theta)$.

③ 积分次序的选择要注意: 第一次积分的原函数一定存在(能写出来)并为下一次积分作好准备. 否则, 就必须考虑交换积分次序或更换坐标系.

(14) 解: 二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{由 } |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-4),$$

知 A 的特征值为 $0, 1, 4$,

故正惯性指数为 2.

三、解答题

(15) 解: 由题设条件知: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha} = 0,$

因此 $\alpha > 0$ 且有

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} \\
 &= \frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \frac{2}{\alpha(\alpha-1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3-\alpha}}{1+x^2},
 \end{aligned}$$

得: $3-\alpha < 2$, 即 $\alpha > 1$.

.....5 分

又因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$ 即

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}}.$$

于是 $2 > \alpha - 1$, 即 $\alpha < 3$.

综上得: 若要题设条件成立, 则参数 α 的取值范围是 $1 < \alpha < 3$.

.....10 分

【方法点击】 1) 应熟练掌握变限积分求导公式:

$$\textcircled{1} \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) \varphi(x) dt \right) = \varphi'(x) \cdot \int_a^x f(t) dt + \varphi(x) \cdot f(x);$$

$$\textcircled{2} \frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right) = f[\beta(x)] \cdot \beta'(x) - f[a(x)] \cdot a'(x).$$

2) 熟记洛必达法则成立的条件.

(16) 解: 由题设条件得 $y'(t) = t^2 - 1, x'(t) = t^2 + 1$,

$$\text{则 } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{4t}{(1+t^2)^3},$$

$$\text{令 } \frac{dy}{dx} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 0 \text{ 得 } t = \pm 1.$$

.....3 分

$$\text{当 } t = -1 \text{ 时, } x = -1, \text{ 且 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=-1} = -\frac{1}{2} < 0,$$

由此知: $y = 1$ 是函数的一个极大值;

$$\text{当 } t = 1 \text{ 时, } x = \frac{5}{3}, \text{ 且 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=\frac{5}{3}} = \frac{1}{2} > 0,$$

从而 $y = -\frac{1}{3}$ 是函数的一个极小值.

.....6 分

$$\text{令 } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{4t}{(1+t^2)^3} = 0 \text{ 得 } t = 0, \text{ 即点 } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \text{ 是拐点的可疑点.}$$

又当 $t < 0$ 时, $\frac{d^2 y}{dx^2} < 0$, 此时 $x \in (-\infty, \frac{1}{3})$;

当 $t > 0$ 时, $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$, 此时 $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$,

即当 $t < 0$ 也就是 $x \in (-\infty, \frac{1}{3})$ 时, 曲线是凸的;

当 $t > 0$ 也就是 $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$ 时, 曲线是凹的;

由拐点定义知 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 是拐点.

.....11 分

【方法点击】该题考生容易在参数方程求二阶导数时出错,常见的错误有两种:

$$\text{一是 } \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{t^2-1}{t^2+1} \right)' = \frac{4t}{(1+t^2)^2},$$

出错原因是将 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$ 误认为是 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)$;

另一种是 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}}$, 其原因是由 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 想当然的结果.

参数方程求二阶导数是常考的重点,考生应牢固掌握.

(17) 解: 由题设条件得 $g'(1) = 0, g(1) = 1$.

.....2 分

$$\text{则 } \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot f'_1 + y g'(x) \cdot f'_2,$$

.....4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'_1 + x y f''_{11} + y f''_{12} [g(x) + x g'(x)] + g'(x) \cdot f'_2 + y \cdot g(x) \cdot g'(x) \cdot f''_{22},$$

.....8 分

将 $x = 1, y = 1, g'(1) = 0, g(1) = 1$ 代入上式得

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{x=1} = f'_1(1, 1) + f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1).$$

.....9 分

(18) 解: 由于曲线 $y = y(x)$ 与直线 $y = x$ 在原点 $(0, 0)$ 相切, 因此知 $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

根据导数几何意义知: $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$, 即 $\alpha = \arctan \left(\frac{dy}{dx} \right)$,

.....2 分

$$\text{所以 } \frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2},$$

又由于 $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx}$, 则

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \cdot \frac{dy}{dx},$$

即 $y'' = (1 + y'^2) y'$.

.....4 分

令 $p = y'$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx}$, 于是有

$$\frac{dp}{dx} = (1 + p^2) p,$$

分离变量得 $\frac{1}{p(1+p^2)} dp = dx (p \neq 0)$,

两边积分得 $\ln \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = x + C_1$.

又当 $x = 0$ 时 $p = y'(0) = 1$,

因此 $C_1 = \ln \frac{1}{\sqrt{2}}$,

即 $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^x$, 故 $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^x$,

解得 $y' = \frac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}$ ($\because y'(0) = 1, \therefore$ 舍去负根)

……7分

$$y = \int y' dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}} dx = \arcsin \frac{e^x}{\sqrt{2}} + C_2.$$

由 $y(0) = 0$ 得 $C_2 = -\frac{\pi}{4}$, 故所求 $y(x)$ 的表达式为

$$y(x) = \arcsin \frac{e^x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}.$$

……10分

(19) 证明: (I) 证法一: 利用拉格朗日微分中值定理

令 $f(x) = \ln(1+x)$, 则 $f(x)$ 在闭区间 $\left[0, \frac{1}{n}\right)$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 于是有

$$f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) = f'(\xi) \cdot \frac{1}{n} \quad \left(0 < \xi < \frac{1}{n}\right),$$

$$\text{即 } \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 1 = \frac{1}{(1+\xi)n},$$

$$\because 0 < \xi < \frac{1}{n}, \therefore \frac{1}{1+\frac{1}{n}} < \frac{1}{1+\xi} < 1,$$

$$\text{则 } \frac{1}{1+n} < \frac{1}{n(1+\xi)} < \frac{1}{n},$$

$$\text{故有 } \frac{1}{1+n} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

……4分

证法二: 利用已知不等式

因为 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, 两边取对数得

$$n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

$$\text{即 } \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

则

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

……4分

(II) 由(I)的结论知 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$,

因此有 $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$,

令 $n = 1, 2, 3, \dots, n$ 得

$$\ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{1},$$

$$\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2},$$

$$\ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3},$$

……

$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},$$

将上述各不等式两端分别相加得

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$\text{于是 } a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) > \frac{1}{n+1} > 0,$$

即数列 $\{a_n\}$ 有下界.

.....7 分

$$\text{又因为 } a_n - a_{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0 \text{ (由 (I) 的结论)}$$

即数列 $\{a_n\}$ 是单调下降的.

综上知数列 $\{a_n\}$ 单调下降且有界根据极限存在准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在且有限, 故数列 $\{a_n\}$ 收敛.

.....10 分

(20) 解: (I) 由题设条件知所求容积为

$$V = V_1 + V_2$$

$$= \pi \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1 - y^2) dy + \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 (2y - y^2) dy$$

.....3 分

$$= \pi \left(y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} + \pi \left(y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2$$

$$= \frac{9}{4} \pi.$$

.....5 分

(II) 如图 11-3 所示, 以 y 为积分变量, 则 y 的变化范围是 $[-1, 2]$, 相应于 $[-1, 2]$ 上的任一小区间 $[y, y+dy]$ 的一薄层水可近似看作高为 dy , 底面积为 πx^2 的一个圆柱体, 得到该部分水的体积为 $\pi x^2 \cdot dy$, 水的密度为 $\rho = 10^3$, 其重力为 $\rho g \pi x^2 dy$, 把这部分水抽出容器所移动的距离为 $2-y$, 因此微功元 dW 为:

$$dW = \rho g \pi x^2 dy \cdot (2-y) = \rho g (2-y) x^2 dy.$$

$$\text{当 } -1 \leq y \leq \frac{1}{2} \text{ 时, } dW = \rho g (2-y) (1-y^2) dy,$$

$$\text{当 } \frac{1}{2} \leq y \leq 2 \text{ 时, } dW = \rho g (2-y) (2y-y^2) dy,$$

故所做的功 W 为:

$$W = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} dW + \int_{\frac{1}{2}}^2 dW$$

$$= \rho g \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2-y) (1-y^2) dy + \rho g \int_{\frac{1}{2}}^2 (2-y) (2y-y^2) dy$$

$$= \rho g \left(2y - \frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} y^4 \right) \Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} + \rho g \left(2y^2 - \frac{4}{3} y^3 + \frac{1}{4} y^4 \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2$$

$$= \frac{27}{8} \rho g = \frac{27 \times 10^3}{8} \pi g (\text{J}).$$

即所求的功为 $\frac{27 \times 10^3}{8} \pi g$ 焦耳.

.....11 分

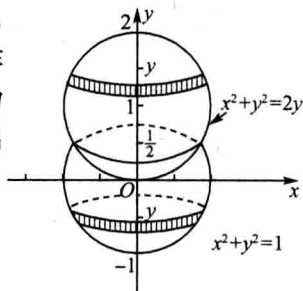


图 11-3

【方法点击】 本题的典型错误是有的考生在求微功元 dW 时没有考虑到用 $y = \frac{1}{2}$ 将区间 $[-1, 2]$ 分成两部分, 从而导致结论不正确. 因为在 $[-1, \frac{1}{2}]$ 及 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上 dW 的表达式不同, 所以必须将 $[-1, 2]$ 用 $y = \frac{1}{2}$ 分开.

(21) 解: 由题设条件知积分区域 D 可表示为: $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

于是有

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy = \int_0^1 x dx \int_0^1 y f''_{xy}(x, y) dy = \int_0^1 x dx \left[\int_0^1 y df'_x(x, y) \right] \quad \dots\dots 2 \text{ 分} \\
 &= \int_0^1 x dx \left[(yf'_x(x, y)) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'_x(x, y) dy \right] \\
 &= \int_0^1 x dx [f'_x(x, 1) - \int_0^1 f'_x(x, y) dy] \\
 &= \int_0^1 x f'_x(x, 1) dx - \int_0^1 x dx \int_0^1 f'_x(x, y) dy \\
 &= \int_0^1 x df(x, 1) - \int_0^1 dy \int_0^1 x f'_x(x, y) dx \quad \dots\dots 4 \text{ 分} \\
 &= (xf(x, 1)) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x, 1) dx - \int_0^1 dy \int_0^1 x df(x, y) \\
 &= - \int_0^1 dy \int_0^1 x df(x, y) \quad (\because f(x, 1) = 0) \quad \dots\dots 7 \text{ 分} \\
 &= - \int_0^1 dy [(xf(x, y)) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x, y) dx] \\
 &= - \int_0^1 [f(1, y) - \int_0^1 f(x, y) dx] dy \\
 &= \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx \quad (\because f(1, y) = 0) \\
 &= \iint_D f(x, y) dx dy = a. \quad \dots\dots 11 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

(22) 解: (I) 因为 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$,

而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的秩小于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩, 从而 $\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = a - 5 = 0,$$

解得 $a = 5$. $\dots\dots 5 \text{ 分}$

(II) 设 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C$,

$$\begin{aligned}
 \text{则 } C &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\text{从而 } (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= (2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2, 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3),$$

$$\text{即} \begin{cases} \beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3, \\ \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \\ \beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3. \end{cases} \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$(23) \text{ 解: (I) 记 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 由题设条件知 } A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2.$$

所以, A 有特征值 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \alpha_1, \alpha_2$ 为其对应的特征向量. \dots\dots 4 \text{ 分}

又秩 $(A) = 2$, 故 $|A| = 0$, 从而, 另一特征值 $\lambda_3 = 0$,

设 $\lambda_3 = 0$ 对应的特征向量 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$, 由于 A 是实对称矩阵, 则 $\begin{cases} \alpha_1^T \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2^T \alpha_3 = 0, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

从而 A 的特征值分别为 $-1, 1, 0$, 其对应的特征向量分别为 $k_1\alpha_1, k_2\alpha_2, k_3\alpha_3$ (其中 $k_i \neq 0, i = 1, 2, 3$). \dots\dots 6 \text{ 分}

(II) 由于不同特征值的特征向量正交, 则只需将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化, 得 $r_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, r_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 令 } Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q^T A Q = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } A &= Q \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \dots\dots 11 \text{ 分} \end{aligned}$$

【方法点击】 实对称矩阵命题中, 反求 A 的计算方法可以有两种:

① 利用相似对角化, 反求 A . 即由 $P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow A = PAP^{-1}$. 此时需要求矩阵 P 的逆矩阵 P^{-1} .

② 利用正交相似对角化, 反求 A , 即由 $Q^T A Q = \Lambda \Rightarrow A = Q \Lambda Q^T$, 此时需将特征向量单位正交化.

本题也可以由 ① 中方法求解, 而 ② 中方法避免计算逆矩阵, 计算量少.

2010年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题答案和评分参考

一、选择题

【答案速查】(1) B (2) A (3) C (4) D (5) B (6) D (7) A (8) D

(1) 解: 显然 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 有间断点 $x = 0, \pm 1$.

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}},$$

$$\text{但 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1,$$

所以 $x = 0$ 为第一类间断点.

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } x = 1 \text{ 也为第一类间断点,}$$

$$\text{又由于 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \infty, \text{ 所以 } x = -1 \text{ 为无穷间断点.}$$

故选(B).

(2) 【思路探索】根据题设条件分别把 $\lambda y_1 + \mu y_2, \lambda y_1 - \mu y_2$ 代入方程便可得关于 λ, μ 的关系式, 从而解出 λ 和 μ .解: 将 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 代入方程 $y' + p(x)y = q(x)$, 得

$$\lambda[y_1' + p(x)y_1] + \mu[y_2' + p(x)y_2] = q(x).$$

由题设可知

$$y_1' + p(x)y_1 = q(x), y_2' + p(x)y_2 = q(x),$$

从而有 $\lambda + \mu = 1$.类似地, 将 $\lambda y_1 - \mu y_2$ 代入方程 $y' + p(x)y = 0$, 得

$$\lambda - \mu = 0.$$

解得 $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$. 故选项(A)正确.【方法点击】一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 与对应的齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$ 解的性质:1) 若 $y_1, y_2, \dots, y_s$ 均为 $y' + p(x)y = q(x)$ 的解, 则当 $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 1$ 时, $k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_s y_s$ 为 $y' + p(x)y = q(x)$ 的解;2) 若 y_1, y_2 为 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个解, 则 $y_2 - y_1$ 为 $y' + p(x)y = 0$ 的解;3) 若 y_1 为 $y' + p(x)y = 0$ 的解, 则 $k y_1$ 也是 $y' + p(x)y = 0$ 的解.(3) 解: 因 $y = x^2$ 与 $y = a \ln x (a \neq 0)$ 相切, 故切点斜率 $2x = a \cdot \frac{1}{x}$, 所以 $x = \sqrt{\frac{a}{2}}$.

$$\text{在 } y = x^2 \text{ 上, } x = \sqrt{\frac{a}{2}} \text{ 时 } y = \frac{a}{2}.$$

$$\text{在 } y = a \ln x (a \neq 0) \text{ 上, } x = \sqrt{\frac{a}{2}} \text{ 时 } y = a \ln \sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{a}{2} \ln \frac{a}{2},$$

$$\text{即 } \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \ln \frac{a}{2}, \text{ 所以 } \ln \frac{a}{2} = 1, \text{ 即 } a = 2e.$$

所以选(C).

(4) 解: 显然广义积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 有两个瑕点 $x=0$ 与 $x=1$, 则

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx,$$

对于 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$, 瑕点为 $x=0$,

设 $n > 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}} \cdot x^{\frac{1}{n}} = 0$, 由于 $0 < \frac{1}{n} < 1$, 故收敛.

设 $n = 1, m = 1, 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}$ 存在, 故此时不是反常积分.

设 $n = 1, m > 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x} \cdot x^{1-\frac{2}{m}}$ 存在, 又 $0 < 1 - \frac{2}{m} < 1$, 故收敛.

对于 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$, 瑕点为 $x=1$,

当 m 为正整数时, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} = 0$, 故收敛.

所以, 不论 m, n 取何正整数, 反常积分都收敛. 故选(D).

(5) 解: 因为 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 则对 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ 求偏导可得

$$F'_x = F'_1\left(-\frac{y}{x^2}\right) + F'_2\left(-\frac{z}{x^2}\right), F'_y = F'_1 \cdot \frac{1}{x}, F'_z = F'_2 \cdot \frac{1}{x},$$

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{F'_1\left(-\frac{y}{x^2}\right) + F'_2\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{yF'_1 + zF'_2}{xF'_2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{F'_1 \cdot \frac{1}{x}}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = -\frac{F'_1}{F'_2},$$

$$\text{则 } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yF'_1 + zF'_2}{F'_2} - \frac{yF'_1}{F'_2} = z.$$

故应选(B).

(6) 【思路探索】将和式改写

$$\begin{aligned} \sigma_n &\stackrel{\text{记}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{n\left(1+\frac{i}{n}\right) \cdot n^2\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]} \cdot \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

解法一: σ_n 看成两个定积分的积分和的乘积. 由

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2} \frac{1}{n},$$

$$\text{得} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \cdot \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$$

故应选(D).

解法二: σ_n 看成是二重积分的一个积分和.

记 D 是正方形区域: $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

$$f(x, y) = \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}.$$

将 D 的长与宽均 n 等分(如图 10-1), 分成 n^2 个小正方形, 每个小正方形的面积是 $\frac{1}{n^2}$, 于是 σ_n 是 $f(x, y)$ 在 D 上的一个积分和.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]} \cdot \frac{1}{n^2} = \iint_D f(x, y) dx dy \\ &= \iint_D \frac{dx dy}{(1+x)(1+y^2)} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy. \end{aligned}$$

故应选(D).

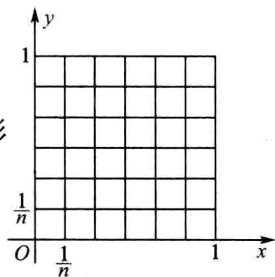


图 10-1

【错例分析】 有些考生会选(A). 其实(A)项的和式极限应为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$, 请读者仔细对比不同之处.

(7) **解法一:** 因向量组 I 可由向量组 II 线性表示, 则 $r(I) \leq r(II)$, 即

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \leq s,$$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 则 $r = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$, 所以 $r = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \leq s$, 因此选(A).

解法二: 由向量组的线性表示与向量组的线性相关性定理: 若向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则当 $r > s$ 时, 向量组 I 线性相关. 或者说若向量组 I 线性无关, 则 $r \leq s$. 可直接判别(A) 正确.

【方法点击】 1) 向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则:

① 若 $r > s$, 则向量组 I 必线性相关.

② 若向量组 I 线性无关, 则 $r \leq s$.

③ $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \leq s$.

2) 若向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 与向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 可以相互线性表示, 则称向量组 I 与 II 等价.

3) 若向量组 I 与 II 等价, 则 $r(I) = r(II)$, 反之则不一定.

(8) **解:** 设 λ 是 A 的特征值. 由于 $A^2 + A = 0$,

所以 $\lambda^2 + \lambda = 0$, 即 $(\lambda + 1)\lambda = 0$,

故 A 的特征值为 -1 或 0 .

又 A 为实对称矩阵, 所以 A 可相似于对角阵 Λ ,

且 $r(A) = r(\Lambda) = 3$,

$$\text{于是 } \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

故应选(D).

二、填空题

【答案速查】(9) $C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$ (其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数) (10) $y = 2x$

(11) $-2^n(n-1)!$ (12) $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$ (13) 3 cm/s (14) 3

(9) 解: 微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$, 对应的特征方程为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$,

解得: $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = \pm i$,

所以通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$ (其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数).

【方法点击】 n 阶常系数线性齐次微分方程根据特征值可写出通解对应项:

① 单实根为 r , 则通解对应项为 Ce^{rx} ;

② 单复根为 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, 则通解对应项为 $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$;

③ k 重实根为 r , 则通解对应项为 $e^{rx} (C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$;

④ k 重复根为 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, 则通解对应项为 $e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$.

(10) 【思路探索】首先定义域是全体实数, 故垂直渐近线不存在; 其次 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$ 可知无水平渐近线, 则仅求斜渐近线即可.

解: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1} = 2, b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 + 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^3 - 2x}{x^2 + 1} = 0$,

所以渐近线方程为 $y = 2x$.

【方法点击】① $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Rightarrow y = A$ 是水平渐近线;

② $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Rightarrow x = a$ 是垂直渐近线;

③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b \Rightarrow y = kx + b$ 是斜渐近线.

(11) 解: 由于

$$y' = \frac{-2}{1-2x} = -2(1-2x)^{-1},$$

$$y'' = -2(-1)(1-2x)^{-2}(-2) = -2^2(1-2x)^{-2},$$

$$y''' = -2^2 \cdot (-2)(1-2x)^{-3} \cdot (-2) = -2^3 \cdot 2(1-2x)^{-3},$$

$$y^{(4)} = -2^3 \cdot 2 \cdot (-3)(1-2x)^{-4} \cdot (-2) = -2^4 \cdot 3!(1-2x)^{-4},$$

一般地, 有

$$y^{(n)} = -2^n(n-1)!(1-2x)^{-n},$$

所以 $y^{(n)}(0) = -2^n(n-1)!$.

(12) 解: 对于 $0 \leq \theta \leq \pi, r = e^\theta$, 弧长

$$s = \int_0^\pi \sqrt{(e^\theta)^2 + (e^\theta)^2} d\theta = \int_0^\pi \sqrt{2} e^\theta d\theta = \sqrt{2}(e^\pi - 1).$$

(13) 解: 设 $l = x(t), w = y(t)$,

由题意知, 在 $t = t_0$ 时刻, $x(t_0) = 12, y(t_0) = 5$, 且 $x'(t_0) = 2, y'(t_0) = 3$,

又对角线 $S(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$,

所以 $S'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}$,

则 $S'(t_0) = \frac{x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}} = \frac{12 \times 2 + 5 \times 3}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 3$.

故应填 3 cm/s.

【方法点击】该题考查的知识点都是常考知识点,但这种综合方式比较新颖,考生首先应由速率想到是求导,而后由几何知识将对角线用长、宽(即 l, w) 表示出来,这也是关键的一步,剩下的就是复合函数求导问题了.

复合关系为:

$$S \begin{cases} x \\ y \end{cases} t$$

$$\text{则 } \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

(14) 解: 由于 $A + B^{-1} = ABB^{-1} + AA^{-1}B^{-1} = A(B + A^{-1})B^{-1}$,

所以 $|A + B^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1} + B| \cdot |B^{-1}|$.

又 $|A| = 3$, $|B^{-1}| = |B|^{-1} = \frac{1}{2}$, $|A^{-1} + B| = 2$,

故 $|A + B^{-1}| = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$.

故应填 3.

三、解答题

(15) **【思路探索】**① 求极值: 由 $f'(x) = 0$ 解出极值可疑点, 然后计算极值可疑点处 $f''(x)$ 的符号并由此判断极大值点、极小值点; ② 求单调区间: $f'(x) > 0$, 单调增加, $f'(x) < 0$, 单调减少.

解: 由 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} te^{-t^2} dt$,

则 $f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + x^2 e^{-(x^2)^2} \cdot 2x - x^2 e^{-(x^2)^2} \cdot 2x = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$2 分

$f''(x) = 2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + 2xe^{-(x^2)^2} \cdot 2x = 2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + 4x^2 e^{-x^4}$4 分

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0, x = \pm 1$6 分

又 $f''(0) = 2 \int_1^0 e^{-t^2} dt < 0$, $f''(\pm 1) = 4e^{-1} > 0$,

所以 $f(0) = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$ 是极大值, $f(\pm 1) = 0$ 是极小值.8 分

由于当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$; $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$; $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(-1, 0)$ 和 $(1, +\infty)$.

.....10 分

(16) 解: (I) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $0 \leq \ln(1+x) \leq x$,

.....2 分

故当 $0 \leq t \leq 1$ 时, $[\ln(1+t)]^n \leq t^n$, 所以 $|\ln t| [\ln(1+t)]^n \leq t^n |\ln t|$.

所以 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt$4 分

(II) 由 (I) 知 $0 \leq u_n \leq \int_0^1 |\ln t| t^n dt$,

而 $\int_0^1 |\ln t| t^n dt = -\int_0^1 t^n \ln t dt = -\frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln t \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n+1} t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2}$,8 分

又由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+n)^2} = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |\ln t| t^n dt = 0$,

根据夹逼准则知, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

.....10 分