SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

东南大学出版社

非线性振动

戴德成

NONLINEAR VIBRATIONS

Dai Decheng

非线性振动

戴德成 著

东南大学出版社

(苏)新登字第012号

责任编辑 田 湘

非线性振动
戴德成 著
*
东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼2号 邮编210018)
江苏省新华书店经销
江苏省高淳印刷厂印刷
*
开本850×1168毫米 1/32 印张7.125 字数185千字
1993年12月第1版 1993年12月第1次印刷
印数:1—1000册
ISBN 7—81023—839—6/O·77
定价:7.00元

(凡因印装质量问题,可直接向承印厂调换)

内 容 简 介

非线性振动学科是目前国际上蓬勃发展的非线性科学的一个重要分支，也是世界上有着广泛应用的振动工程中的一个重要研究领域。

本书是在作者长期教学与科研实践基础上写成的。全书包括非线性振动理论中的基本问题、定量方法、定性方法，共振问题、耦合系统非线性振动、分叉问题、混沌振动、非线性系统对随机激励的响应等。

本书可供在力学与机械、动力、航空、航天、仪表、土木、铁路、交通、造船等工程领域的科技工作者和高等学校的教师、研究生、大学生阅读和参考。

出 版 说 明

研究生教育是培养高层次专门人才的一条重要途径。通过研究生阶段的教学，应使研究生在本门学科上掌握坚实的理论基础和系统的专门知识，并具有从事科学研究工作或独立担负专门技术工作的能力。而编辑出版能够体现学校研究生教育特色、有较高学术水平的研究生教材，是研究生教育的重要基础工作之一。

一本好的研究生教材，应当富有教育性、系统性、启迪性、学术性和新颖性。这即是说，研究生教材必须符合教学的基本规律，注意理论联系实际；必须系统阐明本门学科所必要的基础理论和专门知识，注意突出基本原理和基本内容；必须着眼于研究生能力的培养，注意启发他们的创造性思维，必须体现较高的学术水平，注意有足够的理论深度；必须充分反映国内外最新研究动态，注意当代科学技术发展的前沿。所有这些，既是对研究生教材的要求，也是我们组织出版研究生教材所要遵循的原则。当然，使研究生教材能对本学科领域的科研和工程技术人员有较高的参考价值，也是我们追求的目标。

现在出版的教材虽然是作者多年研究生教学的实践与研究的结晶，从选题、审定到编辑出版，我们也都经过了细致认真的工作，但要使一本研究生教材能满足大家之所求，决非易事。限于我们的水平和经验，难免有失当和错误之处，尚祈读者不吝指正。

东南大学研究生院

东南大学出版社

1990 年 10 月

前　言

非线性振动学科是目前国际上蓬勃发展的非线性科学的一个重要分支，也是世界上有着广泛应用的振动工程中的一个重要研究领域。

本书是在作者长期教学与科研实践的基础上写成的学术专著。书中阐述了作者已发表的和未发表的涉及非线性振动方面的有关成果。此外，也有选择地阐述了一些非线性振动理论中现代的、具有重要应用前景的理论与方法。当然，对于这些材料，只能说是“点到为止”，仅作为入门的初步知识，对这些问题的深入探讨，还请参阅有关专著。

作者本着开卷有益的宗旨，希望本书对不同领域、不同层次的读者都有所获益。

最后，感谢东南大学研究生院、科研处、振动工程研究所和东南大学出版社对本书出版所给予的鼓励和大力支持！

戴德成

1992.8.

目　录

1 非线性振动理论中的几个基本问题[1-8]

1.1 渐近法[2,3,5]

振动理论中的非线性课题最早由 Duffing(1918)、van der Pol(1922)正式提出。非线性振动,作为一门学科形成的初步标志是 Андронов 的专著《振动理论》(1937),其后,它在国内外得到了极大的发展。[1-8]

作为分析非线性振动的工具,本节简述渐近法(也叫 KBM 法或三级数法)。

研究单自由度系统

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x,\dot{x}) \qquad (0 < \varepsilon \ll 1)^{*} \qquad (1-1)$$

当系统不受小干扰时(即 $\varepsilon = 0$),(1 − 1) 的解是 $x = a\cos(\omega t + \theta)$,其中 a,θ 是由初值决定的幅值和位相差。当系统受到小干扰时,根据个别实例计算和实验资料的分析可知:在(1 − 1)的解中,除基频成分外,还有小的高频成分,而 a,θ,也不再是常量。于是可将(1−1)的解表成

$$\begin{cases} x = a\cos\psi + \varepsilon U_1(a,\psi) + \varepsilon^2 U_2(a,\psi) + \cdots\cdots \\ \dot{a} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \cdots\cdots \\ \dot{\psi} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \cdots\cdots \end{cases} \qquad (1-2)$$

将(1−2)代入(1−1),按 ε 的幂次展开,令等号两端关于 ε 的同次幂前系数相等,得到一系列微分方程:

---

* 在本书中,恒假设 $0<\varepsilon\ll1$,以后碰到,不赘述。

$$\omega^2 U_{1\psi\psi} + \omega^2 U_1 = f(x_0, \dot{x}_0) + 2\omega A_1 \sin\psi + 2\omega B_1 a\cos\psi$$

$$\cdots \quad \cdots \tag{1-3}$$

其中 $f(x_0,\dot{x}_0) = f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)$，为使 U_1 是有界的，方程（1－3）右端 $\sin\psi$ 和 $\cos\psi$ 项前系数要等于零，即

$$\begin{cases} 2\omega\pi A_1 = -\int_0^{2\pi} f(x_0,\dot{x}_0)\sin\psi \mathrm{d}\psi \\ 2\omega a\pi B_1 = -\int_0^{2\pi} f(x_0,\dot{x}_0)\cos\psi \mathrm{d}\psi \end{cases} \tag{1-4}$$

上述措施叫消除永年项。由于在一阶近似解中，其误差是 ε 阶量，因此在一阶近似解表式中 εU_1 项可忽略。这样，系统（1－1）的一阶近似解表式可表示为：

$$\begin{cases} x = a\cos\psi \\ \dot{a} = \varepsilon A_1(a), \quad \dot{\psi} = \omega + \varepsilon B_1(a) \end{cases} \tag{1-5}$$

理论上，高阶近似可仿此步骤作出。由于公式的复杂性，实用上，二阶近似解已很少应用。

1.2 保守系统

单自由度保守系统的方程为

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \tag{1-6}$$

已知其特点之一是系统总能量保持不变。为进一步研究系统的特性，具体研究杜芬方程

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon\gamma x^3 = 0$$

运用渐近法可得一阶近似解为

$$x = a\cos\psi, \dot{a} = 0, \dot{\psi} = \omega + 3\varepsilon\gamma a^2/(8\omega)$$

讨论

1. $a = a_0$，即幅值由初值决定，而不随时间而变。

2. 稳态解的频率为 $\omega + 3\varepsilon\gamma a^2/(8\omega)$。当 $\gamma > 0, f = \omega^2 x$

$+\ \varepsilon\gamma x^3$ 表示硬弹簧作用力，此时 $\dot{\psi}$ 随 a 增大而增大。当 $\gamma < 0$，f 表示软弹簧作用力，此时 $\dot{\psi}$ 随 a 增大而减小。当 $\gamma = 0$，$\dot{\psi} = \omega$，这表示线性系统中具有等时性。在非线性系统中等时性性质已被破坏。这是线性保守系统与非线性保守系统的根本区别。[1]

近代研究得比较多的是哈密顿系统理论。

1.3 自振系统[1]

自振系统的特点是：①系统中不存在周期外激励力，而存在正、负阻尼机制；②系统中存在定常的周期振动，其典型特点可由下列范德堡方程来描述。研究方程

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \qquad (1-7)$$

运用渐近法可得一阶近似解：

$$c = a\cos\psi, \dot{a} = 0.5\varepsilon a(1 - 0.25a^2), \dot{\psi} = 1 \qquad (1-8)$$

定常方程的解是　　$a^* = 0,\ 2$

令 $a = a^* + \delta a$，代入(1－8)，可得一阶变分方程。由此可知 $a^* = 0$ 是不稳定的，$a^* = 2$ 是稳定的。

讨论

1.　由于系统中总有干扰，系统不可能处于 $x = 0, \dot{x} = 0$ 状态(即 $a^* = 0$)，因此系统中只能存在稳定的稳态解 $a^* = 2, \dot{\psi} = 1$，即 $x = 2\cos t$。

2.　∵　$x = 2\cos t, \dot{x} = -2\sin t$，在振动过程中 $\varepsilon(x^2 - 1)\dot{x}$ 项可正，也可负，该项取正值，则起一般的阻尼作用；该项取负值，则起激发作用。

3.　系统中没有外周期激发力。

当 ε 不小时，(例如 $\varepsilon = 1, \varepsilon = 10$) 上述结论中的定性内容同样成立。[1]

自振系统问题研究已成为非线性振动学科中的一个重要分

支。

1.4 共振

当单自由度非线性系统受到外周期力作用时，除主共振外，还有分数共振、组合共振[2,3,5]。下面讨论杜芬方程的主共振问题。

研究系统

$$\ddot{x} + \varepsilon = \varepsilon(F\sin\upsilon t - \delta\dot{x} - x^3) \qquad (1-9)$$

主共振情形是指 $1 = \upsilon + \varepsilon\Delta$，$\Delta$ 表示调谐量。由个别实例的计算和实验资料可知：此时，(1－2) 中的 A_1、B_1 不只与 a 有关，更依赖于 $\theta = \psi - \upsilon t$，于是渐近法中三个级数可表为

$$x = a\cos(\upsilon t + \theta), \dot{a} = \varepsilon A_1(a,\theta), \dot{\theta} = \varepsilon B_1(a,\theta) \qquad (1-10)$$

按渐近法的典型步骤，可得(1－9)的一阶近似解方程为

$$\dot{a} = -0.5\varepsilon(\delta\upsilon a + F\cos\theta)$$

$$\dot{\theta} = 1 - \upsilon + 0.375\varepsilon a^2 + 0.5\varepsilon F\sin\theta/a \qquad (1-11)$$

其定常解 a^* 满足

$$\upsilon = \{\omega_e^2 \pm \varepsilon[(F/a^*)^2 - \delta^2]^{0.5}\}^{0.5} \qquad (1-12)$$

讨论

1. 当 $F = \delta = 0$，$\upsilon = \omega_e = 1 + 0.375a^{*2}$，它由图1－1中 $P-P$ 线表出，称为骨干曲线。

2. 当 υ 由 0 开始增大时，幅值变化过程为 $ABCDE$，在 C 处发生幅值跃变。

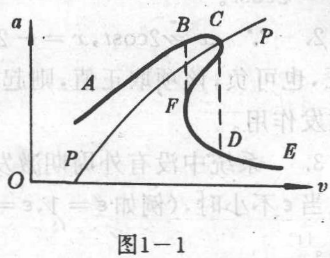

图1－1

3. 当 υ 由 $+\infty$ 开始减小时，幅值变化过程为 $EDFBA$，在 F 处发生幅值跃变，在 C 处和 F 处发生幅值跃变的现象称为共振时的跳跃现象，它是非线性振动系统中特有的现象。

4. 由稳定性理论可知 ABC 段和 FDE 段相应于稳定的定常值 a_1^*，FC 段相应于不稳定的定常值 a_2^*。在实验中 a_2^* 值是观察不到的，只能观察到 a_1^* 值。

5. 图 1－1 中 $\upsilon > 0$，在软弹簧情形($\upsilon < 0$)，幅频曲线向左弯曲，同样有跳跃现象。

共振问题是非线性振动学科中的一个重要的基本问题。

1.5 参数激励[2,3,5]

参数激励是指振动方程系数随时间变化而发生的激励现象。在线性方程中，实质上是解的稳定性问题。在非线性方程中，由于非线性的影响，解不可能变得无限大，研究的是共振问题。参数激励也有称为参数共振的。本节研究马丢方程的参数激励问题。研究系统

$$\ddot{x} + \omega^2(1 - h\cos\upsilon t)x = 0 \qquad (0 < h \ll 1, \omega \approx 0.5\upsilon) \tag{1-13}$$

按渐近法可得一阶近似解

$$\begin{cases} x = a\cos(0.5\upsilon t + \theta) \\ \dot{a} = -aH\sin2\theta \\ \dot{\theta} = \omega - 0.5\upsilon - H\cos2\theta \quad (H = h\omega^2/(2\upsilon)) \end{cases} \tag{1-14}$$

作变换

$$u = a\cos\theta, \quad v = a\sin\theta$$

代入(1－14)，可得 $\dot{u} = -(H + \omega - 0.5\upsilon)v$，$\dot{v} = (\omega - 0.5\upsilon - H)u$；$\lambda^2 = -[(\omega - 0.5\upsilon)^2 - H^2]$

$$\begin{cases} u = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t} \\ \lambda v = c_1[-H + \omega - 0.5\upsilon]e^{\lambda t} \\ \qquad + c_2[H - \omega + 0.5\upsilon]e^{-\lambda t} \end{cases} \tag{1-15}$$

$\because \quad a^2 = u^2 + v^2$

于是分析 λ 即可得 a 的性状。当参数激发频率 υ 满足

$$2\omega(1-0.25h) < \upsilon < 2\omega(1+0.25h)$$

可知 λ 为实数，a 将按指数规律随时间增长，这种现象是由于参数周期变化（且 $\omega \approx 0.5\upsilon$）引起的，因此称为参数激励。当 υ 不满足上述 不等式时解是稳定的。实际上感兴趣的是确定稳定解和不稳定解 的参数边界。上面只讨论了主分频共振。严格说来，还有高阶分频共振，因此也还有其它稳定区的边界。条件 $0 < h \ll 1$ 只是使用渐近法的需要。当 h 不小时，同样存在参数激励问题。

近代关于参数激励理论与实际应用的研究都有较大的发展，已成为非线性振动学科中的一个重要分支。

2 非线性振动理论中的定量方法

2.1 摄动法[3,11]

摄动法的基本思想是系统的已知运动受到微扰后，使受扰运动方程的解由已知未扰运动加上小扰 动构成。上述思想在近似解法中的直接结果是正则摄动法。例如对系统

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x,\dot{x}) \tag{2-1}$$

取 $$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \cdots\cdots \tag{2-2}$$

将其代入(2−1)，并等同 ε 的同幂次项前系数，得到一系列线性方程，即可逐次求出 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$。这样得到的解在 $t \in [0, L]$（$L = O(1)$）上是有效的。在 $t \in [0, L/\varepsilon]$ 上，往往由于所谓"永年项"的出现，而导致失效。

下面采用的是 Lindstedt-Poincaré 摄动法。该法由 Lindstedt 提出(1883)，而由 Poincaré 证明展开式的收敛性(1892)。这个方法又叫参数变换法，此后还发展出坐标变换法。有名的 PLK 法即是由此发展出来的一种方法。下面简述 L-P 摄动法。

对方程(2 − 1)，除(2 − 2) 外，更作变换 $\tau = p(\varepsilon)t$，而

$$p(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots\cdots \quad (\omega_0 = \omega) \tag{2-3}$$

将(2 − 2)、(2 − 3) 代入(2 − 1)，并等同 ε 的同幂次项前系数。可得

$$x_0'' + x_0 = 0, \quad x_1'' + x_1 = -2x_0''\omega_1/\omega + f_0/\omega^2$$

$$\begin{aligned} x_2'' + x_2 = & -2(\omega_1/\omega)x_1'' - (x_0''/\omega^2)(\omega_1^2 + 2\omega\omega_2) \\ & + f_{x_0}'x_1 + f_{\dot{x}_0}'(\omega_1 x_0' + \omega x_1')/\omega^2 \end{aligned}$$

其中 $f_0 = f(x_0, \omega x_0'), f_{x_0}' = \partial f(x_0, \omega x_0')/\partial x, f_{\dot{x}_0}' = \partial f(x_0, \omega x_0')/\partial \dot{x}$。初值为

$$x_i(0) = A_i, \quad \dot{x}_i(0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

于是求取近似解的问题归结为求解 $x_i(t)$ 和 ω_i 的问题。由上可得：

$$x_0 = A_0 \cos\tau$$

$$x_1'' + x_1 = (2\omega_1 A_0/\omega)\cos\tau + (1/\omega^2) f(A_0\cos\tau, -A\omega_0\sin\tau)$$

为使 x_1 是周期的，必需满足条件：

$$\int_0^{2\pi} f_0 \sin\tau d\tau = 0, \quad \omega_1 = -\frac{1}{2\pi\omega A_0}\int_0^{2\pi} f_0 \cos\tau d\tau$$

由第一式可求得 A_0，由第二式可求得 ω_1，最后一阶近似解为

$$x = x_0 + \varepsilon x_1$$

$$= A_0\cos\tau + \frac{\varepsilon}{\omega^2}\left[\frac{g_0(A_0)}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{g_n(A_0)\cos\tau + h_n(A_0)\sin\tau}{1-n^2}\right)\right]$$

$$\tau = pt, \quad p = \omega_0 + \varepsilon\omega_1$$

其中 $g_n(A_0)$、$h_n(A_0)$ 分别是 f_0 的相应的富氏系数。

例　求 $\ddot{x} + x = \varepsilon\gamma x^3$　在 $x(0) = A_0, \dot{x}(0) = 0$ 情形的周期解。

此时 $f(x) = \gamma x^3$，初值定为 $x_0(0) = A_0, \dot{x}_0(0) = x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0$，一阶近似解为

$$x = A_0\cos\tau + \varepsilon\gamma A_0^3(-\cos\tau + \cos 3\tau)/32 + O(\varepsilon^2)$$

$$\tau = pt, p = 1 + 3\varepsilon\gamma A_0^2/8 + O(\varepsilon^2)$$

此结果与1.1中渐近法的一阶近似解结果相同。

2.2 平均法

早自 Lagrange 和 Laplace 的时代，平均法就被用在天体力学中以决定行星轨道在相互摄动下的演化。

平均法研究的对象是标准方程

$$\dot{x} = \varepsilon X(t,x) \quad (x \in R^n, X(t+T,x) = X(t,x), T \text{ 是周期})^* \tag{2-4}$$

此时 $\dot{x} = O(\varepsilon)$，即 x 随时间的变化是缓慢的，因此不妨用 $X(t,x)$ 在一个周期内的平均值 $\bar{X}$ 来代替 $X(t,x)$，即

$$\dot{x} = \bar{X}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t,x)\mathrm{d}t$$

在对 $X(t,x)$ 作平均运算时，$X(t,x)$ 中的 x 可看作是固定的参数。科学和技术中许多问题的控制方程经过简单变换都可归约成(2－4)形式。

例 $\quad \ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \qquad (2-5)$

作变换 $x = a\cos(\omega t + \theta), \dot{x} = -a\omega\sin(\omega t + \theta) \quad (T = 2\pi/\omega)$

于是可得

$$\dot{a} = -\varepsilon f_0 \sin\psi/\omega, \quad \dot{\theta} = -\varepsilon f_0 \cos\psi/(a\omega) \tag{2-6}$$

其中 $f_0 = f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi), \psi = \omega t + \theta$

就(2－6)右端对时间作平均运算：

$$\left\{\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f_0 \sin\psi \mathrm{d}t = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f_0 \sin\psi \mathrm{d}\psi \\ \dot{\theta} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi a}\int_0^{2\pi/\omega} f_0 \cos\psi \mathrm{d}t = -\frac{\varepsilon}{2\pi a\omega}\int_0^{2\pi} f_0 \cos\psi \mathrm{d}\psi \end{aligned}\right. \tag{2-7}$$

由(2－7)可知：在此情形，平均法与渐近法的一阶近似结果完全一样。

在求高阶近似时，要逐次运用平均运算。为了与渐近法一样，将一阶近似解、高阶近似解同时解出，Крылов Н. М. 与 Боголюбов Н. Н. (1937)发展了广义平均法。

此外，Волосов 将平均法推广于强非线性系统情形[10]。

---

* $X(t,x)$ 对 t 的周期性条件可放宽，见[10]。