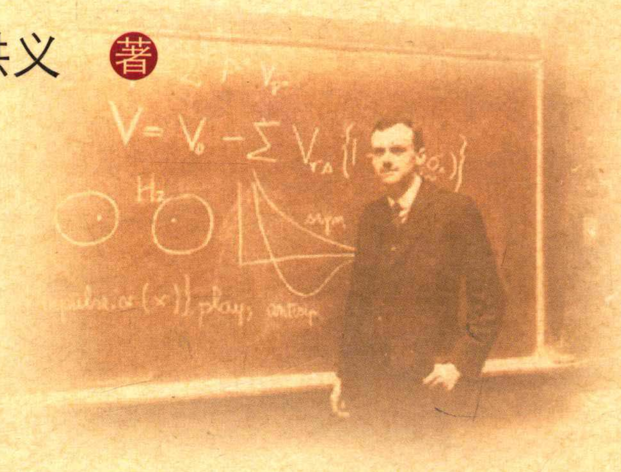
研究生用量子力学教材补遗

范洪义 著



中国科学技术大学出版社

研究生用量子力学教材补遗

范洪义 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书旨在向学习量子力学的研究生补充新的有价值的基础知识，这些知识不但能使学生对量子力学的数理基础知其然，而且能知其所以然，体会深奥的物理理论蕴涵的简单性和优美. 书中介绍的新知识是目前国际上流行的但量子力学课本所没有的，了解这些知识可以启迪研究生的创新思维，以研促学，实践从探新知识到增添知识的历程.

本书可供量子力学专业的高年级学生或研究生使用，也可供对量子力学有兴趣的读者参考和学习.

图书在版编目(CIP)数据

研究生用量子力学教材补遗/范洪义著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2012.3

ISBN 978-7-312-02877-9

Ⅰ. 研…　Ⅱ. 范…　Ⅲ. 量子力学—研究生—教材　Ⅳ. O413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 023308 号

出版　中国科学技术大学出版社
　　　　安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
　　　　http://press.ustc.edu.cn
印刷　安徽省瑞隆印务有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　17.5
字数　262 千
版次　2012 年 3 月第 1 版
印次　2012 年 3 月第 1 次印刷
定价　33.00 元

前　言

学习任何一门课程, 打好基础是前提, 学量子力学更是如此. 研究生基础没打好而难有成果, 犹如蚕食桑叶而最终未能吐丝. 量子力学的知识如大海般浩渺, 深不可测, 而且与时俱进. 那么量子力学的基础大概是哪些呢? 基础是否也在逐渐被加厚夯实呢? 目前国外、国内研究生所用教科书虽然相对于本科生量子力学教材增补了一些有关如量子测量、量子信息等方面的内容, 但都缺乏对量子力学语言 ——狄拉克 (Dirac) 符号法 (表象论及其变换)——如何发展及深化的介绍, 而这恰恰是整个量子力学体系的数理基础和思维模式. 在爱因斯坦 70 岁时出版的《自述》中, 他写道: "…… 我作为一个学生并不懂得获得物理学基本原理的深奥知识是与最复杂的数学方法紧密相连的. 在许多年独立的科学工作以后, 我才渐渐地明白了这一点." 物理理论的简单性体现在基本定律的数学形式的简洁和优美, 这种简洁往往在数学发展到一定程度才显现出来. 物理学家的思维习惯和方式与数学家的不同, 因此物理学家有时候不得不自己发明新的数学, 以简化烦琐的数学方法. 这就是为什么物理理论的发展交织在由简至繁、再由繁至简的演进中.

量子力学的数学就是处理算符的数学, 即狄拉克符号的数学, 尤其是有关由狄拉克符号组成的 ket-bra 算符的积分, 而这恰恰是以往所有的量子力学教材所缺乏的. 读者如果不知道狄拉克符号积分的优美与广泛的应用, 就不能不说是一种遗憾. 所以, 本书补遗的一个重要内容就是介绍如何发展狄拉克符号法.

"思维同语言是联结在一起的", 符号是一种特殊的语言, 所以思维与符号密切相关. 科学所追求的是概念最大的敏锐性与清晰性, 并只使用少数独立引进的概念与符号. 在量子物理界, "只要看过书的人都看过狄拉克的一本书", 这本书就

是被人们广泛引用与应用的《量子力学原理》. 狄拉克以符号法为起点, 介绍了量子论的基本理论框架与一般规则, 着重于以抽象的数学方法概括物理本质. 已经研究量子理论多年的人都认为此书可作为其他所有量子力学教科书的“魁首”, 因为它高屋建瓴地给出了量子力学的结构. 也就是说, 当一个人了解量子力学理论越多, 对狄拉克的书就越欣赏, 原来使人眼花缭乱的理论被狄拉克言简意赅地抽象总结得如此简洁. 狄拉克用符号法建立起来的表象及其变换论是理论物理的精华, 被另一位量子论的创造者海森伯认为是“惊人的进步”和对量子力学“超乎想象的概括”. 符号法的引入符合爱因斯坦的研究信条 ——人类的头脑必须独立地构思形式, 然后我们才能在事物中找到形式. 但是, 初学者常因为不知道其来龙去脉, 而常常是“丈二和尚摸不着头脑”. 据说, 狄拉克的好朋友埃伦菲斯特 (Erenfest) 当初对该书的反应是, “一本糟糕的书 ——你无法将它剖解”. 中国老一辈物理学家吴大猷也曾感慨: “不知道狄拉克的符号法是从哪里来的.”

量子力学的另一位创始人薛定谔曾写道: “狄拉克有一种完全独创性的独特的思维方法.” “他完全不知道他的论文对于普通的人们是多么难.” 甚至伟大的爱因斯坦在 1926 年给埃伦菲斯特的信中也指出: “我对狄拉克感到头疼. 就像走在令人眩晕的小径上, 在这种天才与疯狂之间保持平衡是很可怕的.” 1926 年秋, 当爱因斯坦拜访埃伦菲斯特时, 后者致信给狄拉克: “由于爱因斯坦非常希望理解你的论文, (我们) 一起一干就是几个小时来研究它 …… 我们要花很长时间才能理解你论著中的几页! 而且很多要点对于我们来说仍然像是漆黑的夜晚伸手不见五指.” 多少年来, 一代又一代的研究生们看到狄拉克抽象的理论, 就像古人谈画竹: “莫将画竹论难易, 刚道繁难简更难. 君看萧萧只数叶, 满堂风雨不胜寒.”

本书的作者经过努力研究, 发现狄拉克的符号法确实是可以进一步发展的, 这种发展不但揭示了符号法蕴涵的深层次美感, 而且使之更实用, 其简洁而又深刻的特点更容易被人理解, 更能使物理概念得以深化与推广. 读者以前对其抽象性的畏惧将不复存在, 因为由狄拉克符号 $|\,\rangle$ (右矢) 和 $\langle\,|$ (左矢) 所组成的积分型投影算符 $|\,\rangle\langle\,|$ 是可以由作者发明的“有序算符内的积分理论”完成积分的, 这样就把牛顿–莱布尼茨积分从 c 数 (普通数) 的积分扩展到含有不可交换成分的 q 数 (算符) 的积分. 这充分体现了狄拉克的远见卓识及符号法的魅力, 他发现的符

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

号如同 lim, exp, $\int$, dx 那样将永垂不朽.

中国古典哲学家老子曾说："道可道，非常道." 狄拉克的符号法中的 "道" 需要我们用非常规的方式去悟，用心智去体会 "美". 在这样做的过程中，我们对理论物理的感觉就得到了升华，素质也得到了提高. 所以我们有必要对范洪义发明的有序算符内的积分技术 (the Technique of Integration Within an Ordered Product of Operators, 简称 IWOP 技术) 作个阐述. 该技术首先提出并解决了如何对 ket-bra 算符积分，是牛顿–莱布尼茨积分在一个新领域中的应用与推广，是量子力学数理基础的一个别开生面的天地，它作为狄拉克符号法的精华内容让研究生了解和掌握是合适的，以使他们对狄拉克的理论不但知其然，而且知其所以然，进一步认识到量子力学数理结构的内在美与广泛的应用，体会到狄拉克符号法与 IWOP 技术的配合是章法自成，承接呼应，意蕴流转，非有意为之. IWOP 技术的发明也符合狄拉克生前的愿望："…… 符号法，用抽象的方式直接地处理有根本重要意义的一些量 ……." "但是符号法看来更能深入事物的本质，它可以使我们用简洁精练的方式来表达物理规律，很可能在将来当它变得更为人们所了解，而且它本身的特殊数学得到发展时，它将更多地被人们所采用." 古人道："鸳鸯绣取从君看，不把金针传与人." 我们在这本书中要反其道而行之，把 IWOP 技术以及由此技术而导出的纠缠态表象的知识教给研究生们，使他们不只学会 "针绣"，而且能 "绣出鸳鸯" 来. 而对相干态、压缩态、量子层析成像 (tomography) 理论知识的补遗也就成了水到渠成的内容.

研究生们一旦掌握了符号法的 IWOP 理论，则如画家作画时气韵生动，寻味无穷. IWOP 技术结合狄拉克的符号法是 "非法之法"，惟其天资高远，学力精到，乃能变化至此. 无怪乎狄拉克本人对这套符号法特别钟爱，认为它是 "永垂不朽" 的.

撰写本书的目的就是让初具量子力学知识 (即学过量子谐振子代数解法，知道玻色子产生算符、湮灭算符及粒子数态) 的读者更好地掌握量子力学表象与变换理论，对狄拉克的符号法的理解和掌握 "更上一层楼"，从而有利于他们在量子论的其他领域 (量子光学、量子信息、量子统计和凝聚态物理) 做出较大的贡献.

另外, 量子信息的基础是量子纠缠, 那么有没有连续变量的纠缠态表象呢? 以往的量子力学教科书只有坐标、动量和相干态表象, 用 IWOP 技术我们可以很自然地引入纠缠态表象, 方便地描述量子纠缠. 所以本书还将介绍范洪义首创的纠缠态表象.

除了以上内容, 本书还将介绍近来作者提出的 "不变本征算符理论", 它结合薛定谔算符和海森伯方程把本征态的思想推广到 "本征算符" 的说法, 大大简化了某些哈密顿量的能级差的计算. 此方法摆脱了传统求能级对特定希尔伯特空间的依赖性.

"像观察繁星的天文学家离开了望远镜, 热闹中出来听见了自己的足音." 研究生在学习量子力学这门充满奇幻的课程时, 一定要独立思考与欣赏. 当他们从书本中抬起眼来, 脑中就应该有清晰的量子力学数理结构, 所谓外师造化, 中得心源, 性灵运成, 此境顿生; 如太史公所言: "读书太乐则漫, 太苦则涩", 唯乘其兴之所适, 才能进入欣赏物理美的境界, 在往后的科研中心游目想, 忽有妙会.

中国科学技术大学校长侯建国院士、副校长张淑林和研究生院古继宝、倪瑞教授和万洪英女士等十分关注学校的精品教材建设, 对此作者谨表谢意和敬意. 作者在写作过程中得到了妻子翁海光以及研究生们 (陈俊华、袁洪春、周军、王帅、吕翠红、胡利云、徐学翔、王震、李子华、谢传梅和范悦) 的协助, 在此深表感谢. 每当夜深人静、身心困倦想偷点懒时, 范洪义脑海里就会闪现慈母毛婉珍五十多年前在灯下为小学生批阅作文时边读边改时的情景, 她那消瘦的脸庞和慈祥的目光浮现在儿子眼前, 鞭策着他再打起精神, 坚持工作一会儿.

科研作品贵在学附渊源, 领异标新, 方能使读者动其妍思, 引其芳绪. 人的精力与时光有限, 而追求科学真理无涯, 因此吾人读书, 当读创意鲜明者、理论优美者、方法直捷者、叙述清晰者、悠久不朽者, 以此五点为标准, 则鲜见佳本也. 本书作者不才, 写作时尽量以此五点标准来要求自己, 然终究水平有限, 思维不当, 失于偏颇处, 诚望四方读者指教, 使成完璧.

范洪义

2011 年 3 月于中国科学技术大学

目　次

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第 1 章　关于量子化的几个专题

1.1　从“老式量子论”谈单摆振动的绝热不变量

量子力学除了有薛定谔的波动力学表述、海森伯的矩阵力学表述 (这两种表述分别被薛定谔和狄拉克视为同一的, 并被狄拉克发展为 q 数理论或符号法) 和费恩曼的路径积分表述外, 还有一种近来常用的相空间表述, 其中相空间的维数是系统的自由度数的两倍. 可以说, 玻尔–索末菲 (Bohr-Sommerfeld) 作用量的量子化 (旧量子理论) 就是在相空间中进行的. 以谐振子为例, 令其哈密顿量等于一个常量:

$$H=\frac{P^2}{2m}+\frac{m\omega^2q^2}{2}\equiv E_n, \tag{1.1}$$

并设 $q=\sqrt{\dfrac{2E_n}{m\omega^2}}\sin\theta$, $\mathrm{d}q=\sqrt{\dfrac{2E_n}{m\omega^2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta$, 式 (1.1) 就成了相空间中的一个椭圆方程. 沿椭圆环路积分:

$$\oint p\mathrm{d}q=\frac{2E_n}{\omega}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{\omega}E_n=\frac{E_n}{\nu}, \tag{1.2}$$

再由普朗克量子假设

$$E_n=nh\nu, \tag{1.3}$$

得到

$$\oint p\mathrm{d}q=nh, \tag{1.4}$$

这说明该面积内有 “n” 个量子.

系统动力学的相空间描述的方式有利于对 “绝热不变量” 的讨论. 力学系统在外部条件无限缓慢改变 (外来干扰) 下的进程叫做 “绝热的”. 相对于外来干扰而言, 需要加以量子化的量, 从经典力学层面上看必须是对外来干扰不敏感的量. 考虑一个单摆, 在摆弦的起点挖一小孔, 通过小孔极其缓慢地拉动摆弦, 以改变摆的长度. 爱因斯坦指出, 尽管摆的能量和频率 (长度) 在此过程中都在缓慢变化, 但它们的比率是不变的, 即在绝热过程中是一个不变量, 从而提出绝热不变量的概念. 仍以谐振子为例, 从式 (1.2) 可以看出 E_n/ν 是绝热不变的. 弦的张力由摆的重量 mg 与向心力两部分组成, 故所做的功为

$$\delta A=\left(-mg\cos\varphi+ml\dot{\varphi}^2\right)\delta l, \tag{1.5}$$

这里 φ 是角位移. 在由提升摆弦所导致的绝热变化中, 发生了许多次振动, 但 l 没有明显改变, 所以我们可通过平均值写出方程

$$\delta A=\left(-mg\overline{\cos\varphi}+ml\overline{\dot{\varphi}}^2\right)\delta l. \tag{1.6}$$

现在将能量的增加 δA 分解为外能量的增加和内能量的增加:

$$\delta A=-mg\delta l+\delta E. \tag{1.7}$$

对于内能部分, 我们有

$$\delta E=\left[(1-\overline{\cos\varphi})mg-ml\overline{\dot{\varphi}}^2\right]\delta l=\left(\bar{E}_{\mathrm{p}}-2\bar{E}_{\mathrm{k}}\right)\frac{\delta l}{l}. \tag{1.8}$$

只要振动是简谐的, 我们就有 $E_{\mathrm{k}}=E_{\mathrm{p}}$, 因此

$$\frac{\delta E}{E}=\frac{-\delta l}{2l},\quad \delta\ln E=\delta\ln\frac{1}{\sqrt{l}}, \tag{1.9}$$

$$E\sqrt{l}\sim\frac{E}{\nu}=\mathrm{const}. \tag{1.10}$$

如果我们通过该孔缓慢地拉动摆弦, 振动能量的改变量将与频率成正比, 它是一个对外来干扰不敏感的量.

把绝热不变量的概念引入量子论的先驱是爱因斯坦、玻尔等人. 他们意识到需要被量子化的量必须是绝热不变量. 索末菲最终认为：任何一个力学系统的量子数是由绝热作用量给出的. 因为谐振子的作用量是一个整数, 故其量子化为

$$\oint p\mathrm{d}q = nh. \tag{1.11}$$

此方程是“旧式量子论”的基础. 尽管这种情况对于小量子数 n 是不精确的, 整个理论也是半经典的, 但在当时它对于找到正确的量子化途径提供了一个非常好的思路.

1.2 介观量子电路中的绝热不变量

我们还可以更直观地用介观电路的量子化理论来分析量子电路中的绝热不变量, 介观 LC 电路的经典哈密顿量是

$$H = \frac{p^2}{2L} + \frac{q^2}{2C} \quad \left(p = L\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right), \tag{1.12}$$

其中 C 是电容, L 是电感, q 是电容上的电量. 加入量子化条件, 即把电荷 q 量子化为正则坐标 Q, p 量子化为正则动量 $\varPhi$, 并引入

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar\omega C}{2}}\left(a + a^{\dagger}\right), \quad \varPhi = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\omega L}{2}}\left(a^{\dagger} - a\right), \tag{1.13}$$

式中 $\omega L = 1/(\omega C)$, 则哈密顿量变为

$$\mathcal{H} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\varPhi^2}{2L}. \tag{1.14}$$

将电容 C 上的电荷 Q 看做正则变量, 电感磁通 $\varPhi = LI$ 则看做其共轭“动量”, 那么 LC 电路的哈密顿量 (无外源) 为

$$\mathcal{H} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}. \tag{1.15}$$

在经典理论中, 电量 Q 的突变需要一脉冲电流 I, 但是这种脉冲电流将会对电感 L 产生一个无限大的磁场, 所以 Q 的这种改变是不可能的. 在量子情形下, 我们希望也有这样的限制. 同样, 根据法拉第电磁感应定律, Φ 的突变也会产生一个无限大的感应电场, 这也是不可能的, 所以在任何情况下, Q 和 Φ 都不会是突变的. 因此, 当一个介观 LC 电路的 L 和 C 在外部干扰下做无限小的改变时 $(L\mapsto L+\delta L,\ C\mapsto C+\delta C)$, 电路的能量改变为

$$\delta\mathcal{H}=\delta\left(\frac{Q^2}{2C}\right)+\delta\left(\frac{\Phi^2}{2L}\right)=Q^2\delta\left(\frac{1}{2C}\right)+\Phi^2\delta\left(\frac{1}{2L}\right)=-\frac{Q^2}{2C}\frac{\delta C}{C}-\frac{\Phi^2}{2L}\frac{\delta L}{L}. \tag{1.16}$$

如果参数是绝热变化的, 则在 L 和 C 发生明显变化之前, 电路必定发生了多次振荡, 故取平均 (从而平均电容能等于平均电感能), 可以得到

$$\begin{aligned}\delta E&=-\frac{\overline{Q^2}}{2C}\frac{\delta C}{C}-\frac{\overline{\Phi^2}}{2L}\frac{\delta L}{L}\\&=-\frac{E}{2}\left(\frac{\delta C}{C}+\frac{\delta L}{L}\right)=-E\frac{\delta\sqrt{LC}}{\sqrt{LC}},\end{aligned} \tag{1.17}$$

其中电路的能量变化记为 δE, 而且我们还用到了性质

$$\frac{\overline{Q^2}}{2C}=\frac{\overline{\Phi^2}}{2L}=\frac{E}{2}. \tag{1.18}$$

对方程 (1.17) 积分, 就得到

$$E\sqrt{LC}=\frac{E}{\omega}=\text{const}. \tag{1.19}$$

方程 (1.19) 正确地给出了量子 LC 电路的绝热不变量.

让我们考虑上述一般讨论的一个具体情况. 在经典理论中, 假设电路中两平行板电容器的板面积为 A, 相距 D, 填满介电常数为 ε 的材料, 那么有

$$C=\frac{\varepsilon A}{D}, \tag{1.20}$$

一个板对另一块板的作用力为

$$F=\frac{V}{2D}Q, \tag{1.21}$$

其中 V 是电容的电压. 利用 $V=Q/C$ 及式 (1.20), 得到

$$F=\frac{Q}{2A\varepsilon}Q, \tag{1.22}$$

这正是分开这两个板块所需要的作用力. 由于我们是非常慢地拉动板块的, 故所需要的真正作用力是

$$F=\overline{\frac{Q}{2A\varepsilon}Q}=\frac{1}{2A\varepsilon}CE=\frac{E}{2D}, \tag{1.23}$$

从而有

$$\delta E=F\delta D=\frac{E}{2D}\delta D. \tag{1.24}$$

对式 (1.24) 积分, 即得到

$$\ln E=\ln\sqrt{D}, \tag{1.25}$$

所以 $E/\sqrt{D}$ 为常数. 由于电容与两板块之间的距离 D 有关, D 越大, 电容越小, 又因 $\omega=1/\sqrt{LC}\propto\sqrt{D}$, 所以 E/ω 也为常数.

至此, 我们找到了量子 LC 电路的绝热不变量, 它在形式上类似于上述钟摆的绝热不变量. 这种类比也称为科学的隐喻.

隐喻既是人类的一种思维活动, 也是一种语言表述, 长期以来被广泛地应用于文学创作和思想交流, 如 “桥影虚园空, 水痕淡人情”、“天河断情桥, 皎月离愁灯”, 而科学家们则将它用于探索和创新. 隐喻的主要功能是使我们能由此及彼、由表及里地联想, 随心所欲地关联, 举一反三地多方位地思索. 如电影中的蒙太奇手法, 适时地切换意象, 以达到新的境界. 尤其是对于理论物理学家, 隐喻是做出重大发现的有效思维模式.

例如, 关于德布罗意提出物质波粒二象性公式 (电子既是粒子, 又是波), 一个有趣的故事是说, 一天, 德布罗意无意中看到学物理的哥哥忘在家中的一份关于 “光量子理论” 的学术会议记录, 他读到了一位叫爱因斯坦的人提出的 “光既是波也是粒子” 的光量子理论. 他想: “不难理解光是波, 比如雨后七色彩虹的形成是由于各色光的波长不一样, 它们遇到水珠后产生的折射率也不相同, 使原本混在

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com