高等学校工科数学系列

高等数学学习指导

主　编　刘　龙　孙秀娟　孙　璐

HEUP 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

高等数学学习指导

主　编　刘　龙　孙秀娟　孙　璐
副主编　徐秀艳　张亚平　赵淑莹
主　审　朱　捷

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是配合在校非数学类本科生学习高等数学课程使用的辅导参考书。全书共分十二章，内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。每章内容均包括基本要求、基本内容和典型例题、综合例题解析、基本知识脉络图、自我测试题及答案五部分。

本书是供各类本科生学习高等数学使用的辅导书籍，也是本科生参加期末考试和数学竞赛的参考书籍，同时还可作为报考研究生数学复习的参考书籍。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/刘龙，孙秀娟，孙璐主编. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2012.3
ISBN 978-7-5661-0314-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘… ②孙… ③孙… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 015616 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 黑龙江省地质测绘印制中心
开　　本 787mm×960mm　1/16
印　　张 13.5
字　　数 280 千字
版　　次 2012 年 3 月第 1 版
印　　次 2012 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 30.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

高等学校工科数学系列编审委员会

前　言

高等数学课程是理工类院校比较重要的一门必修课。这门课程学习的重要性不仅在于它是一门基础课、工具课，还在于它对学生抽象思维、逻辑推理能力的培养和训练，对运算能力、综合应用能力的锻炼和提高等方面都起到其他课程难以替代的积极作用。而对本课程的学习除了有好的教材之外还应有与之配套的学习辅导书，以有助于学生对课程内容的理解与消化、对所学知识的巩固与扩展、对计算能力的掌握和提高。

本书是根据国家教育部审定的高等工科院校“高等数学课程教学基本要求”（教学大纲）并按照同济大学数学系主编的《高等数学》第六版的章节顺序编写的。全书以解题为中心，每章在“基本要求”中，对本章的要点加以总结概括。在“基本内容和典型例题”与“综合例题解析”中对本章的定义、定理、性质作了概括性阐述，并由浅入深地安排了许多不同层次的例题，对具体的方法和技巧作进一步的分析与讲解。在“基本知识脉络图”中将每章的知识点以脉络图的方式给出。在“自我测试题”中，精选了一些有代表性的习题及近年来的考研题，并全部给出参考答案。

本书融思想、问题与方法于一体，从不同于教材的另一个侧面对初学者加以引导，其重点在于通过具体问题对基本定义、定理与典型方法加以阐述，并尽可能地与《高等数学》教材联系起来，有助于读者较好地把握教材的重点与难点。

本书第 1 章、第 2 章、第 5 章、第 11 章由孙璐编写，第 3 章由张亚平编写，第 4 章由徐秀艳编写，第 6 章由刘龙编写，第 7 章至第 10 章由孙秀娟编写，第 12 章由赵淑莹编写；全书由刘龙统稿，朱捷主审。

本书在编写中得到了黑龙江科技学院理学院领导和广大教师的支持和帮助，更得到学校各级领导的帮助和指导，在此一并表示感谢。

作者在编写本书过程中，参阅了相关教材和专著，在此向各位原作者致谢。

由于编者的水平有限，书中难免存在不妥之处，恳切希望广大读者批评指正。

编　者

2012 年 1 月

目　　录

第 1 章　函数与极限

1.1 基 本 要 求

1. 理解函数的概念,了解函数奇偶性、单调性、周期性和有界性;理解复合函数的概念,了解反函数的概念.

2. 理解极限的概念,掌握极限四则运算法则.

3. 了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则),会用两个重要极限.

4. 了解无穷小、无穷大以及无穷小阶的概念,会用等价无穷小求极限.

5. 理解函数在一点连续的概念,了解间断点的概念,并会判别其间断点的类型.

6. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质.

1.2 基本内容和典型例题

1.2.1 函数

1. 复合函数

设有函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$,若 $R_g\cap D_f\neq\varnothing$,则称定义在

$$\{x\mid x\in D_g,g(x)\in D_f\}$$

上的函数 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ 为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数,其中 u 为中间变量.

构成复合函数的条件是 $g(x)$ 的值域与 $f(x)$ 的定义域内的交集不是空集.

2. 函数的性质

(1) 有界性:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,在区间 $I\subset D$,若存在正数 M,使得 $\forall x\in I$,都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界.

(2) 单调性:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,在区间 $I\subset D$,若 $\forall x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加或称递增,$f(x)$ 是区间 I 上的单调增加函数,区间 I 称为单调增加区间. 若对于 $\forall x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少或称递减,$f(x)$ 是区间 I 上的单调减少函数,区间 I 称为单调减少区间. 单调增加或单调减少函数统称为单调函数.

(3) 奇偶性:设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若 $\forall x\in D$,都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为奇函数;若 $\forall x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为偶函数.

（4）周期性：设函数$f(x)$的定义域为D，若存在正数T，使得$\forall x\in D, x\pm T\in D$且$f(x\pm T)=f(x)$，则称$f(x)$为周期函数，$T$称为$f(x)$的一个周期. 满足上式的最小正数$T$称为函数$f(x)$的最小正周期.

3. 分段函数与初等函数

分段函数是指对于自变量的不同取值范围需要用不同的表达式表示的函数. 初等函数是指由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合并能用一个式子表示的函数. 因此不能随便说分段函数不是初等函数.

例如，函数$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0.\end{cases}$是一个分段函数，可是$f(x)$可以用一个式子来表示，即$f(x)=\sqrt{x^2}$.

因此，一个函数是不是初等函数，关键看它是否满足初等函数的定义，即能否由基本初等函数的有限次四则运算、有限次复合的一个式子来表示.

4. 单调函数与反函数

函数$f(x)$在其定义域D上是单调函数仅是其存在反函数的充分而非必要条件，即$f(x)$单调则其反函数必存在；但若其反函数存在，$f(x)$并不一定是单调函数. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0;\\ x+1, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

在区间$[-1,1]$上不单调，但其反函数存在，即

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x-1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

5. 对类似$f(x+2)$，$f(\sin x)$这样的函数记号的说明

$f(x+2)$，$f(\sin x)$这样的记号都是表示复合函数的记号. 以$y=f(x+2)$为例，若令$u=x+2$，则$f(x+2)$表示由$f(u)$和$u=x+2$复合而成的函数. 对于复合函数，必须掌握以下两个问题：(1)已知函数，会求由它们复合而成的函数；(2)已知复合函数，能找出它是由哪几个函数复合而成的.

例1 （1998，Ⅰ）设$f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且$\varphi(x)\geqslant 0$，求$\varphi(x)$的定义域.

分析 解出$\varphi(x)$然后确定其定义域.

解 因为$f(x)=e^{x^2}$，所以
$$f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}$$
又因为
$$f[\varphi(x)]=1-x$$
所以
$$e^{\varphi^2(x)}=1-x$$
所以
$$\varphi^2(x)=\ln(1-x)$$
由$\varphi(x)\geqslant 0$可得

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$$

因此 $\varphi(x)$ 的定义域为 $\qquad \ln(1-x)\geqslant 0$

即 $\qquad \{x\,|\,x\leqslant 0\}$ 或 $x\in(-\infty,0]$

1.2.2　数列极限的定义

1. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 自然数 $N>0$，当 $n>N$ 时恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$ 的充要条件是：当 $n>N$ 的一切 x_n 都落在 a 的 ε 邻域 $U(a,\varepsilon)$ 内，在 $U(a,\varepsilon)$ 的外边至多有 N 项.

例 2　设 $x_n>0$，且 $x_n\to 0(n\to\infty)$，若存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=l$，则 $l\leqslant 1$.

证明　用反证法，若结论不真，即假定 $l>1$，则由题设可知，对 ε_0 有 $0<\varepsilon_0<l-1$，存在 N，使得

$$l-\varepsilon_0<\frac{x_{n+1}}{x_n}<l+\varepsilon_0\quad(n>N)$$

因为 $l-\varepsilon_0>1$，所以有 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}>1$ 或 $x_{n+1}>x_n(n>N)$.

这与题设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 矛盾，即得所证.

评注　若要例 2 的逆命题也成立，只需要求 $l<1$，即若 $x_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=l$ 存在，且 $l<1$，则 $x_n\to 0(n\to\infty)$，这是一个判断 x_n 以零为极限的好方法.

例 3　证明函数 $f(x)=x\sin x$，当 $x\to+\infty$ 时，无极限也非无穷大.

证明　取 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，当 $x_n\to+\infty$ 时，有 $\lim\limits_{x_n\to+\infty}f(x_n)=+\infty$

又取 $x_n=2n\pi$，当 $x_n\to+\infty$ 时，有 $\lim\limits_{x_n\to+\infty}f(x_n)=0$

由此可知，$f(x)$ 无极限也非无穷大.

1.2.3　函数极限的定义

1. 函数在有限点处的极限

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. 函数在 x_0 处的左、右极限

(1) $f(x)$ 在 x_0 处的左极限记作 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ 或 $f(x_0-0)$，$f(x_0-0)=A$ 的定义是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) $f(x)$ 在 x_0 处的右极限记作 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ 或 $f(x_0+0)$，$f(x_0+0)=A$ 的定义是：$\forall\varepsilon>0$，

$\exists\delta>0$,当 $0<x-x_0<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充要条件是$f(x_0-0)$与$f(x_0+0)$都存在且相等.

3. 函数在无穷大处的极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的定义是:$\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$ 时,当 $|x|>X$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义是:$\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$,当 $x>X$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义是:$\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$,当 $x<-X$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在的重要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$都存在且相等.

(3) 以上三个极限存在的几何意义均为曲线 $y=f(x)$存在水平渐近线 $y=A$.

1.2.4 极限的性质

1. 唯一性:极限若存在必唯一.

2. 有界性:收敛数列必有界,在 x_0 处存在极限的函数必在 x_0 的某去心邻域内有界.

3. 保号性:存在非零极限的数列当 n 充分大后,x_n 与极限值同号;在 x_0 处存在非零极限的函数$f(x)$在 x_0 的某去心邻域内,$f(x)$与极限值同号.

4. 归并性:收敛数列的子数列也收敛,且都收敛于原数列的极限; 在 x_0 处存在极限的函数$f(x)$,对以 x_0 为极限的任意数列 $x_n(x_n\neq x_0)$,均有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

5. x_0 处函数极限的有界性和保号性这两条性质为什么只适用于 x_0 的某个去心邻域的局部范围内?

答 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,只能说明在 x_0 的某个去心邻域内$f(x)$具有某种变化趋势,据此也只能推得在该局部范围内$f(x)$是否有界,是否取确定的符号. 至于在此局部范围之外的$f(x)$的情况,我们是无从知道的. 注意数列的有界性是没有局部范围限制的,是整体有界.

6. 数列极限与子数列极限的关系与应用

数列极限与子数列极限的关系是:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a(\infty)\Leftrightarrow(x_n)_{n=1}^{\infty}$的任何子数列都以 a(或∞)为极限.

另一关系是:数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$无界$\Leftrightarrow$它存在一个发散到无穷大的子数列.

数列和子数列关系的应用:

(1) 证明数列 x_n 发散,只需找出它的一个发散的子数列,或找出两个收敛于不同值的子数列;

(2) 证明数列 x_n 无界,只需找出它的一个发散到无穷大的子数列;

(3) 证明数列 x_n 不是无穷大,只需找出它的一个收敛于某个常数的子数列.

7. 函数极限的归并性的应用

(1) 证明函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在时,只需找出一个数列 $x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$,使数列$f(x_n)$发

散;或找出两个数列:$x_n \to x_0(x_n \neq x_0)$和$y_n \to x_0(y_n \neq x_0)$,使数列$f(x_n)$和$f(y_n)$有不同的极限.

(2) 证明函数$f(x)$在数集D上无界,只需找出数列$(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset D$,而数列$f(x_n)$发散到无穷大.

(3) 证明$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \infty$,只需找出一个数列$x_n \to x_0(x_n \neq x_0)$使数列$f(x_n)$收敛.

(4) 为求$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,可先找出一个数列$x_n \to x_0(x_n \neq x_0)$,求出数列$f(x_n)$的极限,并在此基础上证明函数的极限是同一值.

例 4 设$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0; \\ a+x, & x \geqslant 0. \end{cases}$ 问a为何值时,$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在?

解 由于

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(a+x) = a$$

所以当$a=1$时,即$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$时,$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在.

例 5 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$

1.2.5 极限的运算法则

1. 无穷小的运算性质

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A+\alpha$,其中$\alpha$为$x\to x_0(x\to\infty)$时的无穷小.

(2) 有限个无穷小之和是无穷小.

(3) 有界函数与无穷小之积为无穷小,特别地,常数与无穷小之积为无穷小.

2. 无穷小与无穷大的关系:在自变量的同一变化过程中,若$f(x)$为无穷大(非零无穷小),则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小(无穷大).

3. 无穷大的几何意义:若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0+0 \\ (x\to x_0-0)}} f(x) = \infty$,则直线$x=x_0$为曲线$y=f(x)$的铅直渐近线.

4. 极限的运算法则:设$\lim\limits_{x} f(x)$与$\lim\limits_{x} g(x)$均存在,则

$$\lim_{x}[\lambda f(x) \pm \mu g(x)] = \lambda \lim_{x} f(x) \pm \mu \lim_{x} g(x) \ (\lambda,\mu \text{ 为常数})$$

$$\lim_{x}[f(x)g(x)] = \lim_{x} f(x) \cdot \lim_{x} g(x)$$

$$\lim_{x}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x} f(x)}{\lim\limits_{x} g(x)} \quad (\lim_{x} g(x) \neq 0)$$

$$\lim_{x}[f(x)]^{g(x)} = [\lim_{x} f(x)]^{\lim\limits_{x} g(x)} (\lim_{x} f(x) > 0)$$

5. 复合函数的极限法则(极限的变量代换法则)

设$f(u)$和$u=u(x)$构成复合函数$f[u(x)]$,若$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0$,且当$x\neq x_0$时,$u(x)\neq u_0$,则有

$$\lim_{x\to x_0}f[u(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$$

6. 极限的单调性

若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$与$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)$均存在,且在$\mathring{U}(x_0,\delta)$内($|x|$充分大后)$f(x)\geqslant g(x)$,则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\geqslant\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,$P(x)$与$Q(x)$为多项式,$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$为有理分式. 设$a_0,b_0\neq 0$,则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n;\\ 0, & m<n;\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

例6 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(4-\dfrac{3}{x^2}\right)^3\left(3-\dfrac{2}{x}\right)^4}{\left(6+\dfrac{7}{x^2}\right)^5}=\dfrac{4^3\cdot 3^4}{6^5}=\dfrac{2}{3}$

例7 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}(a>0)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{3\times5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

解 (1) 原式$=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{x-a}{(\sqrt{x-a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=0$

(2) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\times3}{2^2}\cdot\frac{2\times4}{3^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{50}}=\frac{2^{20}\cdot3^{30}}{2^{50}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$

(5) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sin[\pi(\sqrt{n^2+1}-n)+n\pi]$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$$

例 8 已知 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，求 a,b 的值.

解 当 $x\to2$ 时，$x^2-x-2\to0$，且分式极限存在，所以分子的极限必为 0，即 $\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$. 由此得 $4+2a+b=0$，即 $b=-2a-4$.

所以
$$x^2+ax+b=x^2+ax-2a-4=(x-2)(x+a+2)$$

所以
$$原式=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to2}\frac{x+a+2}{x+1}=\frac{a+4}{3}=2$$

即
$$a=2$$

从而
$$b=-8$$

1.2.6 极限存在准则与两个重要极限

1. 极限存在的夹逼准则

(1) 函数情形：设函数 $f(x),g(x),h(x)$ 满足

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

且 $\lim\limits_{x}g(x)=\lim\limits_{x}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x}f(x)=A$.

(2) 数列情形：设数列 $(x_n)_{n-1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty},(z_n)_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n,\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}z_n=a$$

则
$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

2. 数列的单调有界收敛准则：单调有界数列必有极限.

3. 两个重要极限：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\text{ 或}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

4. 使用单调有界收敛准则需注意的问题

(1) 在求数列极限时，常会遇到用递推公式给出的情况，此时必须先证明数列单调有界，即数列有极限时，才可以对递推公式两端取极限，从而求出极限值.

(2) 判断数列 x_n 的单调性的基本方法是：一减二比，即计算 $a_{n+1}-a_n$ 或 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，有时也可以根据前几项的特点判断出数列是单调递增或递减，再用数学归纳法进行证明.

(3) 当已知一个递推数列是单调数列时，为探求它的有界性，不妨先假定其极限存在并求其极限值. 此时，若由此导出的结果不妥，则表明该数列极限不存在；否则其极限值就可当作数列的界，递增数列为上界，递减数列为下界.

例 9 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

解 因为 $x\neq 0$ 时，$\left|\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)\right|\leqslant x^2\sin\dfrac{1}{x}\leqslant x^2$.

则
$$0\leqslant\left|\frac{1}{x}\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\right|\leqslant|x|$$

由夹逼准则，得
$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\right|=0$$

1.2.7 无穷小的比较

1. 无穷小的比较

设 $\alpha(x),\beta(x)$ 是在 x 的同一变化过程中（记作 $\lim\limits_{x}$）的两个无穷小，$\alpha(x)\neq 0$.

若 $\lim\limits_{x}\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$，则称 α 是比 β 低阶的无穷小；

若 $\lim\limits_{x}\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 β 是与 α 同阶的无穷小；

若 $\lim\limits_{x}\dfrac{|\beta|}{|\alpha|^k}=c\neq 0$，则称 β 是 α 的 k 阶无穷小（当 $\beta(x)$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小时，常取 $\alpha(x)=x$）；

若 $\lim\limits_{x}\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

2. 等价无穷小的性质

性质 1 β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件是 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

性质 2 （代换性质）

(1) 设 $\alpha\sim\bar{\alpha},\beta\sim\bar{\beta}$，且 $\lim\limits_{x}\dfrac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$ 存在，则 $\lim\limits_{x}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x}\dfrac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$；

(2) 设 $\alpha\sim\bar{\alpha}$，$\lim\limits_{x}\alpha f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x}[\alpha f(x)]=\lim\limits_{x}[\bar{\alpha}f(x)]$.