考研数学强化突破

2012
人大考研

2012年 考研数学 模拟冲刺试卷（理工类）

主编／李恒沛　高文森　侯书会

覆盖考研数学全部内容　附最新试题与答案

根据最新考试大纲全新编写，覆盖考研数学重要知识点

十六套模拟试卷，精编精析，难度适中，贴近真题

2012年

考研数学模拟冲刺试卷（理工类）

主　编　李恒沛　高文森
侯书会

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

2012年考研数学模拟冲刺试卷：理工类/李恒沛，高文森，侯书会主编. —9版. —北京：中国人民大学出版社，2011.10

ISBN 978-7-300-14557-0

Ⅰ.①2… Ⅱ.①李…②高…③侯… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 211002 号

2012年考研数学模拟冲刺试卷（理工类）

主编 李恒沛 高文森 侯书会

2012 Nian Kaoyan Shuxue Moni Chongci Shijuan (Ligonglei)

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电 话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn(中国1考网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京东方圣雅印刷有限公司	**版 次**	2003年11月第1版
规 格	210 mm×285 mm 16开本		2011年10月第9版
印 张	12.75	**印 次**	2011年10月第1次印刷
字 数	384 000	**定 价**	28.00元

前　　言

全国硕士研究生入学数学试题是遵循考试大纲命制的，而且命题的基本原则是一贯的。从整体上看，有利于国家对高层次人才的选拔，有利于高等学校数学教学的改革，同时便于招考单位的录取工作，对于提高数学的教学质量有一定的促进作用。

数学考试内容涉及高等数学、线性代数及概率统计等三门课知识。试题考查的知识点要分布合理，能基本覆盖所要考的主要内容，知识涵盖面比较宽，试题题量与难度比较适中，试题设计科学规范，其信度和效度较高，力求整个试卷基本反映出数学考试大纲的规定和要求，较好地体现基本概念、基本理论和基本方法的能力考查，试题还着重考查知识的综合运用能力。与此同时，注意到试题标准（题型、题量、难易度比例、结构等）的连续性与试题难度的稳定，使考生心中有数，避免出现大起大落的现象。

对于考生来说，最迫切的问题是如何复习与备考，才能达到考试的要求，取得好的考试成绩。考生要处理好这个问题，首先必须深刻理解考试大纲中所规定的内容，分清主次，了解其深度与广度，注意到在试题中经常出现的题型，经过一段时间系统复习以后，还必须自我检验复习效果，了解自己哪部分内容掌握得较好，哪部分内容掌握得不够，以便进行针对性的补习，以期较快地提高成绩。拿这套模拟试卷来检验不失为一个行之有效的方法。

从历年研究生入学考试数学试题来看，试题有以下特点：**概念性强。**着重考查考生对基本概念的掌握，会运用基本定理完成对一些命题的证明，从不同角度、不同提法（即所谓变形、变式）来考查考生对其掌握的熟练程度。**综合性强。**一道试题着重考查一部分内容，而这部分内容又有很多知识点，不可能面面俱到，只能综合几个知识点来考查。这类题几乎年年试卷都有，旨在考查考生的能力与数学素质。**运算性强。**正确地运算基于正确的概念和方法，数学试题虽有一定的计算量，但只要考生基本概念清楚，基本理论融会贯通，基本方法运用自如，运算起来就能快捷正确。试题具有一定的灵活性，从不同侧面（或不同角度或相关的几个知识点）考查考生的能力，注意一题多解，好让考生临场发挥，运作自如。此外，试题还注意到论证性和应用性，考查考生逻辑推理的能力和综合应用的能力，这本是必不可少的，不论是对工学、经济学，还是管理学各专业的考生来说，都是这样，无一例外。

考研好比登山，不管有多少困难，只要肯登攀，就会到达顶点。加油啊，学子们，胜利就在前头。

编者

2011.9

目　录

全国硕士研究生入学统一考试

数学一　模拟试卷(1)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+xf(x)}{x^3}=1$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x+f(x)}{x^2}$等于

(A) 0.　　(B) $-\dfrac{2}{3}$.

(C) $\dfrac{4}{3}$.　　(D) ∞.

[　　]

(2) 函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处可微的充分条件是

①$f'_x(x_0,y_0)$ 与 $f'_y(x_0,y_0)$ 都存在.

②$f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 在点(x_0,y_0)的某邻域内都连续.

③$\Delta f-f'_x(x_0,y_0)\Delta x-f'_y(x_0,y_0)\Delta y\to 0$,当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$.

④ $\dfrac{\Delta f-f'_x(x_0,y_0)\Delta x-f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\rho}\to 0$,当 $\rho\to 0$.

$(\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0))$

上述四个命题中正确的是

(A) ①②.　　(B) ②③.　　(C) ①③.　　(D) ②④.

[　　]

(3) 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 必绝对收敛.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 必收敛.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n}-a_{2n-1})$ 必收敛.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 必收敛.

[　　]

(4) 设$\sum$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$,$\sum_1$ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$,则有

(A)$\oiint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma_1}z\mathrm{d}S$.　　(B)$\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=0$.

(C)$\oiint\limits_{\Sigma}z^3\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma_1}z^3\mathrm{d}S$.　　(D)$\oiint\limits_{\Sigma}z^2\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma_1}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

[　　]

(5) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为 2 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{B}^*$ 分别为$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的伴随矩阵,若$|\boldsymbol{A}|=2$,$|\boldsymbol{B}|=3$,则分块矩阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$的伴随矩阵为

(A) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&3\boldsymbol{B}^*\\2\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&3\boldsymbol{A}^*\\2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&2\boldsymbol{A}^*\\3\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$.

[　　]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}$ 经过若干次初等行变换后的矩阵记成 $\boldsymbol{B}$,则

(A)$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{b}$ 同解.

(B)$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 不同解.

(C) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

(D)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大线性无关组的向量个数相同.

[ ]

(7) 设连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上的值为零,在区间 $(0,+\infty)$ 内的值大于零且满足微分方程 $f'(x)=-2f(x)$,则 $E(X)$ 等于

(A) $\frac{1}{2}$. (B)1. (C)2. (D)4.

[ ]

(8) 设 $X\sim N(10,4)$,从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,样本均值为 $\overline{X}$. 如果概率 $P\{9<\overline{X}<11\}\geqslant 0.95$,则 n 至少取

(A)3. (B)4. (C)15. (D)16.

[ ]

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(9) 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2\,011}}{x^n-(x-1)^n}=\dfrac{1}{2\,012}$,则 $n=$ ________.

(10) 平面 $Ax+By+Cz=0\,(C\neq 0)$ 与柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 相交所成椭圆的面积为________.

(11) 微分方程 $y'''+6y''+13y'=0$ 的通解为________.

(12) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx=$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,有特征值 $1,2,3$,$f(x)=x^3-6x^2+11x-10$,则 $f(\boldsymbol{A})=$ ________.

(14) 设 $P(\overline{A})=0.3,P(AB)=0.5,P(\overline{A}B)=0.1$,则 $P(\overline{B}\mid A\cup B)=$ ________.

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 10 分)

设 S 为锥体的侧面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=0\,(0\leqslant z\leqslant b)$,计算 $\displaystyle\iint_S\sqrt{x^2+y^2}\,dS$.

(16)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数,且满足

$$x\int_0^x f(t)dt=(x+1)\int_0^x tf(t)dt,\ f(1)=2, \text{求 } f(x).$$

(17)(本题满分 10 分)

计算 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{2}{y}f(xy^2)dydz-\frac{1}{x}f(xy^2)dzdx+\left(x^2z+y^2z+\frac{z^3}{3}\right)dxdy$,其中 $f(t)$ 具有连续导数,$\sum$ 为下半球面 $x^2+y^2+z^2=1\,(z<0)$ 的上侧.

(18)(本题满分 10 分)

求曲线 $y=\ln x$ 上某一点 $(t,\ln t)$ 的一条切线,使该切线与直线 $x=1,x=5$ 及曲线 $y=\ln x$ 所围图形的面积最小.

(19)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 连续,$x\in[a,b]$,且可导,试证在 (a,b) 内存在一点 ξ,使 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$.

(20)(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^3+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 化成标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$,求 a,b 及所用的正交变换.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_l$,且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l$ 线性无关,证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$ 也线性无关.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}, & -3<x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$Y=X^2+2X-1$,求:

(Ⅰ)Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(Ⅱ)X 与 Y 的协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}c^{\frac{1}{\theta}}\dfrac{1}{\theta}x^{-\left(1+\frac{1}{\theta}\right)}, & x\geqslant\\ 0, & x<c\end{cases}$$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 为未知参数,$c>0$ 是已知常数,从总体 X 中抽取样本观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,求:

(Ⅰ)θ 的矩估计值;

(Ⅱ)θ 的最大似然估计值.

参考解答及分析

一、选择题

(1) **分析**:由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos x+f(x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin2x+xf(x)}{x^3}-\frac{\sin2x-2x\cos x}{x^3}\right],$$

而
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin2x-2x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to0}2\cos x\cdot\frac{\sin x-x}{x^3}$$
$$=-2\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=-\frac{1}{3},$$

故
$$\lim_{x\to0}\frac{2\cos x+f(x)}{x^2}=1-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}.$$

解:应选(C).

(2) **分析**:$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处可微 $\Rightarrow f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 可导,但反之未必成立,说明 ① 不对;② 正确,这是教科书上的一条定理;④ 正确,这是全微分存在(即可微) 的定义;③ 不对,例如,$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点(0,0) 处偏导数存在,$f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$,同理 $f'_y(0,0)=0$,$\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-$

$f(0,0)=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}$，$\Delta f-f'_x(0,0)\Delta x-f'_y(0,0)\Delta y=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}\to 0$（当$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$），但$\dfrac{\Delta f-f'_x(0,0)\Delta x-f'_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\dfrac{\sqrt{|\Delta x||\Delta y|}}{\rho}\not\to 0(\rho\to 0)$. 故应选(D).

解:应选(D).

(3) **分析**:选项(A)、(B)、(C)都不对,可举反例说明,例如取$a_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散;$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散;$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n}-a_{2n-1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}}{\sqrt{2n(2n-1)}}$,

因$\dfrac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}}{\sqrt{2n(2n-1)}}>\dfrac{2\sqrt{2n-1}}{2n}=\dfrac{\sqrt{2n-1}}{n}>\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}}{\sqrt{2n(2n-1)}}$发散.

选项(D)对.事实上,(D)的前n项部分和$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})=a_1-a_{n+1}$,由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a_1$.

解:应选(D).

(4) **分析**:记D_{xy}为曲面$\sum$在xOy坐标面上的投影域,

因$\displaystyle\oiint_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_上}z\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_下}z\mathrm{d}S$

$\displaystyle=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{xy}}(-\sqrt{1-x^2-y^2})\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,故选项(B)对,从而(A),(C)不对,经运算,(D)也不对.

解:应选(B).

(5) **分析**:由于分块矩阵$\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\mathbf{0}\end{bmatrix}$的行列式$\begin{vmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\mathbf{0}\end{vmatrix}=(-1)^{2\times2}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=2\times3=6$,即分块矩阵可逆,根据公式$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$,

$$\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\mathbf{0}\end{bmatrix}^*=\begin{vmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\mathbf{0}\end{vmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\mathbf{0}\end{bmatrix}^{-1}=6\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\mathbf{0}\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\dfrac{1}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{B}^*\\\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*&\mathbf{0}\end{bmatrix}$$

$$=6\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\dfrac{1}{3}\boldsymbol{B}^*\\\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^*&\mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\mathbf{0}\end{bmatrix}$$,故选(B).

解:应选(B).

(6) **分析**:因$\boldsymbol{A}$作初等行变换,$\boldsymbol{b}$没有动,故选项(A)不成立.至于$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$应是同解,故(B)不成立.由$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\boldsymbol{B}$,$|\boldsymbol{A}|$与$|\boldsymbol{B}|$可能相差一常数因子,故选项(C)也不成立.选项(D)成立,事实上,由$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\boldsymbol{B}$,不改变矩阵的秩,即$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,从而$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$矩阵的列向量组的极大线性无关组的向量个数相同,即其列秩相同,也即矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的秩.

解:应选(D).

(7) **分析**:当$x>0$时,微分方程$f'(x)=-2f(x)$的通解为

$f(x)=Ce^{-2x}$,其中C是任意正数.

由于

$$\int_{-\gg\gg\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}Ce^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{C}{2}=1.$$

因此 $C=2$. X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

所以

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}2xe^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

解:应选(A).

(8) **分析**:由于

$$u=\frac{\overline{X}-10}{2/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$$

因此

$$P\{9<\overline{X}<11\}=P\left\{\frac{9-10}{2/\sqrt{n}}<\frac{\overline{X}-10}{2/\sqrt{n}}<\frac{11-10}{2/\sqrt{n}}\right\}$$

$$=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-1\geqslant 0.95,$$

得

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\geqslant 0.975.$$

因为标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 是单调增加的,而 $\Phi(1.96)=0.975$,所以

$$\frac{\sqrt{n}}{2}\geqslant 1.96,$$

$$n\geqslant(2\times 1.96)^2=15.3664,$$

n 至少应取 16.

解:应选(D).

二、填空题

(9) **分析**:利用二项式展开并化简可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2011}}{x^n-(x-1)^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2011}}{nx^{n-1}+\cdots+(-1)^{n+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^{n-1-2011}+\cdots+(-1)^{n+1}x^{-2011}}\overset{\text{题设}}{=\!=}\frac{1}{2012}$$

$\Rightarrow n=2012$.

解:应填 2 012.

(10) **分析**:D:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$,$z=\frac{Ax+By}{-C}$.

$$S=\iint_D \mathrm{d}S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\sqrt{1+\left(-\frac{A}{C}\right)^2+\left(-\frac{B}{C}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi ab\sqrt{1+\left(\frac{A}{C}\right)^2+\left(\frac{B}{C}\right)^2}$$

$$=\frac{\pi ab}{|C|}\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

解:应填$\frac{\pi ab}{|C|}\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

(11) **分析**:相应的特征方程为

$$r^3+6r^2+13r=0$$

$$\Rightarrow r(r^2+6r+13)=0$$

$$\Rightarrow r=0,-3\pm 2i.$$

于是原方程的通解为

$$y=C_1+\mathrm{e}^{-3x}(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)\quad (C_1,C_2,C_3\text{ 为任意常数}).$$

解:应填 $y=C_1+\mathrm{e}^{-3x}(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)\quad (C_1,C_2,C_3$ 为任意常数).

(12) **分析**:令 $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$,因积分区间关于 $x=0$ 对称,故有$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$.

而 $f(x)+f(-x)=\dfrac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}+\dfrac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{x}}=\sin^2 x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}+\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)=\sin^2 x$.

因此,原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi-2}{8}$.

解:应填$\dfrac{\pi-2}{8}$.

(13) **分析**:由 $f(x)=x^3-6x^2+11x-10=(x-1)(x-2)(x-3)-4$,知

$$f(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})-4\boldsymbol{E} \qquad ①$$

由设,$\boldsymbol{A}$ 有三个互不相同的特征值 1,2,3,从而 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$,使

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix},$$

于是 $\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}^{-1}$,

代入式 ①,得

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{A})&=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}^{-1}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}^{-1}-3\boldsymbol{E})-4\boldsymbol{E}\\&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\Lambda}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\Lambda}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^{-1}-4\boldsymbol{E}\\&=\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}-4\boldsymbol{E}\\&=-4\boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

解:应填 $-4\boldsymbol{E}$.

(14) **分析**:由 $B=(AB)\cup(\overline{A}B)$,得

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=0.5+0.1=0.6,$$

从而得

$$\begin{aligned}P(\overline{B}\mid A\cup B)&=\frac{P(\overline{B}(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}\\&=\frac{1-P(\overline{A})-P(AB)}{1-P(\overline{A})+P(B)-P(AB)}=\frac{1-0.3-0.5}{1-0.3+0.6-0.5}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

解:应填$\dfrac{1}{4}$.

三、解答题

(15) **分析**:按第一型曲面积分计算之.

解:$z^2=\dfrac{b^2}{a^2}(x^2+y^2)\Rightarrow z=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{b}{a}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}S&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r\\&=\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

(16) **分析**:对等式两端求导变成微分方程.利用初始条件,解出 $f(x)$,再由 $f(x)$ 的连续性,求出 $f(0)$,即得 $f(x)$ 的表达式.

解:等式两端对 x 求导,得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+x(x+1)f(x)$$

$$\Rightarrow\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)$$

$$\Rightarrow f(x)=xf(x)+2xf(x)+x^2f'(x)$$

$$\Rightarrow x^2f'(x)+3xf(x)-f(x)=0$$

$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow\ln f(x)=-\frac{1}{x}-3\ln x+\ln C$$

$$\Rightarrow\ln f(x)=\ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}x^{-3}C)$$

$$\Rightarrow f(x)=Cx^{-3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

当 $x=1$ 时,$f(x)=2,2=C\mathrm{e}^{-1}$,得 $C=2\mathrm{e}$,

故 $\qquad f(x)=2x^{-3}\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}\qquad(0<x\leqslant1)$.

又 $\qquad \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\qquad$(由题设),

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}2\mathrm{e}x^{-3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=2\mathrm{e}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x^3}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}2\mathrm{e}\lim_{t\to+\infty}\frac{t^3}{\mathrm{e}^t}=0.$$

故得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}, & 0<x\leqslant1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(17) **分析**:添加平面 $z=0$,使积分域成为封闭曲面,利用高斯公式计算.

解:添加平面 $P:z=0$,$\sum\cup P$ 为封闭曲面,

$$\iint\limits_{\Sigma}=\oiint\limits_{\Sigma\cup P}-\iint\limits_{P}.$$

$$\oiint\limits_{\Sigma\cup P}\frac{2}{y}f(xy^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{1}{x}f(xy^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(x^2z+y^2z+\frac{z^3}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{2y^2}{y}f'(xy^2)-\frac{2xy}{x}f'(xy^2)+(x^2+y^2+z^2)\right]\mathrm{d}v$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{2}{5}\pi.$$

而 $\iint\limits_{P}=0$，

故 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{2}{y}f(xy^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{1}{x}f(xy^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(x^2z+y^2z+\frac{z^3}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{5}\pi.$

(18) **分析:** 曲线 $y=\ln x$ 在点 $(t,\ln t)$ 处的切线为

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)\text{，即 }y-\ln t=\frac{1}{t}x-1\quad(t>0)\text{，}$$

利用定积分写出该切线与给定曲线所围成的图形面积，再求其最小值，最后求出相应的 t 值及相应的切线方程.

解: 曲线 $y=\ln x$ 在点 $(t,\ln t)$ 处的切线为 $y-\ln t=\frac{1}{t}x-1$. 所围图形面积为

$$S=\int_1^5(\ln t-1+\frac{x}{t}-\ln x)\mathrm{d}x$$

$$=(\ln t-1)x\Big|_1^5+\frac{x^2}{2t}\Big|_1^5-(x\ln x-x)\Big|_1^5$$

$$=4\ln t+\frac{12}{t}-5\ln 5\quad(t>0).$$

求 t，使 S 最小：$S'=\frac{4}{t}-\frac{12}{t^2}=\frac{4}{t^2}(t-3)$，令 $S'=0$，得 $t=3$，$S''=\frac{24-4t}{t^3}$，当 $t=3$ 时，$S''>0$，故 $t=3$ 为极小值点，也是最小值点，因此所求切线方程为

$$y-\ln 3=\frac{1}{3}(x-3).$$

(19) **分析:** 欲证 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$，

或 $f(\xi)-f(a)=f'(\xi)(b-\xi)$，

即 $f'(\xi)(b-\xi)-[f(\xi)-f(a)]=0$

$$\Rightarrow bf'(\xi)-[\xi f'(\xi)+f(\xi)]+f(a)=0$$

$$\Rightarrow[bf(x)]'\Big|_{\xi}-[xf(x)]'\Big|_{\xi}+[f(a)x]'\Big|_{\xi}=0$$

$$\Rightarrow[bf(x)-xf(x)+f(a)x]'\Big|_{\xi}=0$$

$$\Rightarrow[(b-x)(f(x)-f(a))+bf(a)]'\Big|_{\xi}=0$$

$$\Rightarrow[(b-x)(f(x)-f(a))]'\Big|_{\xi}=0.$$

取辅助函数

$$F(x)=(b-x)[f(x)-f(a)]\text{，}$$

容易验证 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件，即可证得.

证:

令 $F(x)=(b-x)[f(x)-f(a)]$，

由题设知 $F(x)$ 连续，$x\in[a,b]$，且可导，

又 $\qquad F(a)=F(b)=0$，

故存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$.

由 $\qquad F'(x)=(b-x)f'(x)-[f(x)-f(a)]$，

得 $\qquad F'(\xi)=(b-\xi)f'(\xi)-[f(\xi)-f(a)]=0$，

即 $\qquad f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi},\xi\in(a,b)$.

(20) **分析**：此类问题的关键在于正确地写出二次型的矩阵.

解：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{bmatrix}$. 其标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$ 的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$. 显然有 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=0$，由此得 $a=b$.

又 1(或 2) 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，即 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$(或 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0$)，由此得 $a=b=0$.

由 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，取特征向量 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.

由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，取特征向量 $\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

由 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，取特征向量 $\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，

则所求正交变换为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$.

(21) **分析**：利用线性无关的概念证之.

证：设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_l\boldsymbol{\beta}_l=\boldsymbol{0}$

$\Rightarrow(k_1+k_2+\cdots+k_l)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+\cdots+k_l)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_l\boldsymbol{\alpha}_l=\boldsymbol{0}$，

由设知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l$ 线性无关，故有

$$\begin{cases}k_1+k_2+\cdots+k_l=0\\ \qquad k_2+\cdots+k_l=0\\ \qquad\quad\cdots\\ \qquad\qquad k_l=0\end{cases}，即$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{①}$$

因系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$,从而方程组①只有零解 $k_1 = k_2 = \cdots = k_l = 0$.

因此,$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_l$ 线性无关.

(22) **分析**:因为$Y = X^2 + 2X - 1 = (X+1)^2 - 2$,所以$Y$的分布函数

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{(X+1)^2 - 2 \leqslant y\} = P\{(X+1)^2 \leqslant y+2\}.$$

利用X的概率密度$f_X(x)$算出$F_Y(y)$,可得$f_Y(y) = F'_Y(y)$.要注意讨论y的取值情况.根据协方差的性质和计算公式,可解得(Ⅱ).

解:(Ⅰ)由分析可知

$$F_Y(y) = P\{(X+1)^2 \leqslant y+2\}.$$

当$y \leqslant -2$时,有$F_Y(y) = 0$;

当$-2 < y < -1$时,有

$$F_Y(y) = P\{-1-\sqrt{y+2} \leqslant X \leqslant -1+\sqrt{y+2}\} = \int_{-1-\sqrt{y+2}}^{-1+\sqrt{y+2}} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-1-\sqrt{y+2}}^{-1+\sqrt{y+2}} \frac{1}{6}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{y+2}}{3};$$

当$-1 \leqslant y < 2$时,有

$$F_Y(y) = P\{-1-\sqrt{y+2} \leqslant X \leqslant -1+\sqrt{y+2}\} = \int_{-1-\sqrt{y+2}}^{0} \frac{1}{6}\mathrm{d}x + \int_{0}^{-1+\sqrt{y+2}} \frac{1}{4}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{5}{12}\sqrt{y+2} - \frac{1}{12};$$

当$2 \leqslant y < 7$时,有

$$F_Y(y) = \int_{-3}^{0} \frac{1}{6}\mathrm{d}x + \int_{0}^{-1+\sqrt{y+2}} \frac{1}{4}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sqrt{y+2} + \frac{1}{4};$$

当$y \geqslant 7$时,有$F_Y(y) = 1$.

由此可得Y的概率密度为

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\sqrt{y+2}}, & -2 < y < -1, \\ \dfrac{5}{24\sqrt{y+2}}, & -1 \leqslant y < 2, \\ \dfrac{1}{8\sqrt{y+2}}, & 2 \leqslant y < 7, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(Ⅱ)X与Y的协方差为

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X, X^2+2X-1) = \mathrm{Cov}(X,X^2) + 2\mathrm{Cov}(X,X)$$
$$= E(X^3) - E(X)E(X^2) + 2\{E(X^2) - [E(X)]^2\}.$$

由于

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} \frac{x}{6}\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \frac{x}{4}\mathrm{d}x = -\frac{1}{4},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} \frac{x^2}{6}\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \frac{x^2}{4}\mathrm{d}x = \frac{13}{6},$$

$$E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{0}\frac{x^3}{6}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{x^3}{4}\mathrm{d}x=-\frac{19}{8},$$

因此

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=-\frac{19}{8}-\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{13}{6}+2\times\left[\frac{13}{6}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2\right]=\frac{57}{24}.$$

(23) **分析**:算出 $E(X)$,可求得(Ⅰ). 在求解(Ⅱ)时,要注意似然函数是分段函数.

解:(Ⅰ)总体 X 的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_{c}^{+\infty}xc^{\frac{1}{\theta}}\frac{1}{\theta}x^{-\left(1+\frac{1}{\theta}\right)}\mathrm{d}x=\frac{c}{1-\theta}.$$

令$\frac{c}{1-\theta}=\overline{x}$,解得 θ 的矩估计值为

$$\hat{\theta}=1-\frac{c}{\overline{x}}.$$

(Ⅱ)对于样本观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}c^{\frac{n}{\theta}}\dfrac{1}{\theta^n}(x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_n)^{-\left(1+\frac{1}{\theta}\right)}, & x_i\geqslant c(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $x_i\geqslant c(i=1,2,\cdots,n)$ 时,$L(\theta)>0$,取对数,得

$$\ln L(\theta)=\frac{n}{\theta}\ln c-n\ln\theta-\left(1+\frac{1}{\theta}\right)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

求导数,得

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{n}{\theta^2}\ln c-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

令$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$,解得 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\ln c.$$

全国硕士研究生入学统一考试

数学一　　模拟试卷(2)

一、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $f(x)=f(-x), x\in(-\infty,+\infty)$,且在 $(0,+\infty)$ 内,$f'(x)>0, f''(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内必有

(A) $f'(x)>0, f''(x)>0$.　　(B) $f'(x)>0, f''(x)<0$.

(C) $f'(x)<0, f''(x)<0$.　　(D) $f'(x)<0, f''(x)>0$.

[　　]

(2) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 连续是 $f(x,y)$ 在该点可微的

(A) 必要条件而非充分条件.　　(B) 充分条件而非必要条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非必要条件又非充分条件.

[　　]

(3) 下列论断正确的是

(A) 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 可导,则 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 必可导.

(B) 设 $f(x)$ 在点 a 的某邻域 $U(a,\delta)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 存在,则 $f'(a)$ 必存在.

(C) 设 $|a_n|\leqslant|b_n|\ (n=1,2,\cdots)$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

(D) 设 $|a_n|\leqslant b_n\ (n=1,2,\cdots)$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也发散.

[　　]

(4) 设 $f(x)$ 连续,$x\in(-\infty,+\infty)$,则下述论断错误的是

(A) $\forall a>0, \int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数.

(B) $\forall a>0, \int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)$ 为偶函数.

(C) $\forall a>0$,常数 T, $\int_{a}^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关 $\Leftrightarrow f(x)$ 有周期 T.

(D) $f(x+T)=f(x), \int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 有周期 $T \Leftrightarrow \int_{0}^{T}f(t)\mathrm{d}t=0$.

[　　]

(5) 设 $a_{ij}\ (i,j=1,2,3)$ 皆为整数,则方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=\dfrac{1}{2}x_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=\dfrac{1}{2}x_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=\dfrac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

(A) 无解.　　(B) 有唯一解.　　(C) 有无穷多解.　　(D) 解不定.

[　　]

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=0$,则 $\boldsymbol{A}$ 中