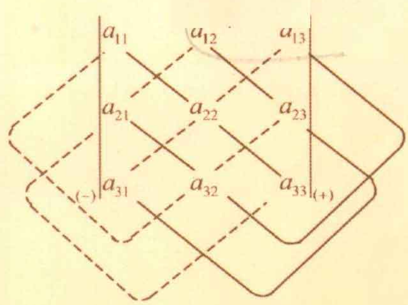
工业和信息化普通高等教育“十二五”规划教材
立项项目

线性代数

■ 谭福锦 黎进香 主编

■ 邓艳平 农吉夫 卢若飞 莫愿斌 副主编



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

立项项目

教育“十二五”规划教材

线性代数

谭福锦 黎进香 主编

邓艳平 农吉夫 卢若飞 莫愿斌 副主编

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 谭福锦，黎进香主编. -- 北京 : 人民邮电出版社，2012.8
ISBN 978-7-115-28525-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①谭… ②黎… Ⅲ. ①线性代数 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第142941号

内 容 提 要

本书共有7章，包括行列式、矩阵、矩阵的初等变换与线性方程组、n维向量与线性方程组的解的结构、矩阵的特征值与特征向量、二次型及其标准形、线性空间与线性变换。

本书在内容的总体安排上做到循序渐进，衔接自然，层次分明．各章内容编写力求由浅入深，联系实际，简明易懂，便于老师教学和学生自学。

本书可用作本科院校理工、农、医、经、管等各专业的“线性代数”课程教材，也可以用作专科和各种高职院校的教材，对科研工作者、工程技术人员及自学者也同样适用。

线性代数

◆ 主　　编　谭福锦　黎进香
　副 主 编　邓艳平　农吉夫　卢若飞　莫愿斌
　责任编辑　李海涛

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街14号
　邮编　100061　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　三河市潮河印业有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：10.5　　　　2012年8月第1版
　字数：264千字　　2012年8月河北第1次印刷

ISBN 978-7-115-28525-6

定价：28.00元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前言

Preface

高等教育的迅猛发展和科学技术的日新月异，加之计算机的广泛应用，对基础课特别是数学课教材提出了更新、更严格的要求．数学是本科院校几乎所有专业的公共必修课，更是理工、农、医、经、管各专业学生必须掌握的基础知识，其重要程度是不言而喻的．正是考虑了这些因素，我们在总结多年数学教学经验、探索数学教学发展动向、分析比较国内外同类教材优劣的基础上，吸收各家之精华编写出这本适合于高等院校各专业学生使用的线性代数教材．

本书依据教育部制订的“线性代数课程教学基本要求”进行编写，是由多位有丰富教学经验的第一线教师集思广益和通力合作完成的．本书力求“深化概念，加强计算，联系实际，注重应用”．遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用的原则，并充分考虑了线性代数课程教学课时减少的趋势．本书具有以下特色．

1. 突出数学的基本思想和基本方法．线性代数内容虽然抽象，但其中每一个基本概念都有自己的背景．本书注意对基本概念、定理和重要公式的几何背景和实际应用背景的介绍，以加深学生对它们的理解，力求使抽象的数学概念形象化．突出基本思想和基本方法的目的在于让学生在学习过程中较好地了解各部分知识的形成与内在联系，帮助学生理解基本概念和它们之间的联系与区别，会用学过的方法解决相关的问题．在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会数学的本质和数学的价值．

2. 加强基本能力培养．本书安排了较多的例题和习题，在解题方法方面有较深入的论述与指导，目的是让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程，掌握各种解题方法和技巧，最后达到熟练的程度，提高解题能力．

3. 强调实际应用．本书对基本概念的介绍，力求从身边的实际问题出发，引入自然．例题和习题多采用一些源自客观世界，如自然科学、工程技术领域、经济管理领域和日常生活中的现实问题，希望以此来提高学生学习线性代数的兴趣和利用线性代数知识解决实际问题的意识和能力．

4. 本书在内容的总体安排上做到循序渐进，衔接自然，层次分明．各章内容编写力求由浅入深，联系实际，简明易懂，便于老师教学和学生自学．为方便读者自我检测学习效果，我们在每章的后面备有一套测试题，并在书后附有参考解答．同时为了扩大知识面，我们还在书后附录部分整理汇编了近7年来全国硕士研究生入学统一考试高等数学中有关线性代数内容的试题，供教师教学与深造者参考，这些同时也是本书区别于其他同类教材的重要特色之一．

考虑到不同专业的需求有所差别，一些章节用星号“*”标出，供相关专业选择．本书共有7章，包括行列式、矩阵、矩阵的初等变换与线性方程组、n维向量与线性方程组的解的

结构、矩阵的特征值与特征向量、二次型及其标准形、线性空间与线性变换．讲授全部内容需要 55 ~ 60 课时，各校可根据本校的教学课时选择其中部分或全部内容讲授．各章后面配有习题，第一章至第六章后面还配有测试题，书后附有全部习题和测试题的参考答案．

本书各章（含习题、测试题及其答案或解答）的编写分工如下：第一章和第七章由谭福锦编写；第二章由莫愿斌编写；第三章由邓艳平编写；第四章由农吉夫编写；第五章和附录部分由黎进香编写；第六章由卢若飞编写．全书由谭福锦审查和统稿．

由于编者学识水平有限，加之时间仓促，书中难免有不足甚至是错误之处，敬请专家、同行和读者批评指正．

编者

2012 年 4 月

目录

Contents

第一章 行 列 式

行列式是在研究线性方程组的解的过程中引进的一个概念．它不仅是线性代数中研究线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性等问题的一种重要工具，而且是数学许多分支和其他学科中的一种常用计算工具，有着非常广泛的应用．本章主要介绍一般 n 阶行列式的定义及其一些基本性质，行列式展开定理，以及著名的克莱姆（Cramer）法则等内容．

本章的重点是行列式的计算和克莱姆法则；难点是一般的 n 阶行列式的计算．一般而言，对于4 阶及4 阶以上的高阶行列式的计算，通常都先用行列式的性质将之化为某些容易计算的具有特殊结构的行列式，或展开成低阶行列式再进行计算．

第一节 n 阶行列式

一、二阶和三阶行列式

首先，我们来回顾一下用消元法解含有未知量 x_1，x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

即以 a_{22}乘第 1 个方程两端，以 a_{12}乘第 2 个方程两端，然后将所得的两式相减，消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\ x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

类似地消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\ x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

设 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

此即为二元线性方程组（1.1）的解的公式．但此公式不便于记忆，为便于记忆和使用上述公式，我们引进记号

$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22} \tag{1.2}$$

称 D 为**二阶行列式**，横写的称为**行**，从上到下分别称为第 1 行、第 2 行；竖写的称为**列**，从左到右分别称为第 1 列、第 2 列．行列式中的数称为行列式的元素．其中，元素 a_{ij}（$i=1$，2；$j=1$，2）的第 1 个下标 i 表示它所在行的行数，第 2 个下标 j 表示它所在列的列数．

二阶行列式（1.2）的右端又称为行列式的**展开式**．

二阶行列式的展开式可以用所谓的对角线法则得到，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中从左上角至右下角的连线（用实线表示）称为行列式的**主对角线**；从右上角到左下角的连线（用虚线表示）称为行列式的**次（副）对角线**．因此，二阶行列式的展开式（值）实际上等于主对角线上两**元素** a_{11}，a_{22}的乘积，减去次对角线上两**元素** a_{12}，a_{21}的乘积．

由式（1.2）可知，二阶行列式共有 2！ =2 项的代数和，一项是主对角线上两元素的乘积，取正号；另一项是次对角线上两元素的乘积，取负号．

据此定义，可以计算出以下两个二阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

这样，当 $D\neq 0$ 时，方程组（1.1）的解的公式可简单地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}\quad ,\ x_2 = \frac{D_2}{D} \tag{1.3}$$

对于三元线性方程组，如果用消元法求解，过程将更加复杂，最后得到的解的表达式也更难以记忆．为简化求解过程和便于记忆求解的公式，我们专门地引进三阶行列式的概念．

由 3 行、3 列（共 $3^2=9$ 个元素）构成的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.4}$$

称式（1.4）左端记号为**三阶行列式**，右端为三阶行列式的**展开式**．

由上述定义可见，三阶行列式的展开式有 3！ =6 项的代数和．每项均为不同行、不同列的 3 个元素的乘积．其运算规则可以用下列**对角线法**则来表示和记忆．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) & (+) \end{matrix} \begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

其中沿主对角线方向的每条实线上 3 个元素之积带正号；沿次对角线方向的每条虚线上 3 个元素之积带负号．所得 6 项的代数和，即为三阶行列式的展开式．

有了三阶行列式的定义，我们就可以方便地求解三元线性方程组.

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

其中 D 为系数行列式，D_i（$i=1, 2, 3$）为将 D 中的第 i 列元素依次换为方程组（1.5）中的常数项 b_1，b_2，b_3 所得的三阶行列式.

若按规定计算出 D_1，D_2，D_3，发现三者恰为用消元法解方程组（1.5）所得的解 x_1，x_2，x_3 的表达式的分子，而且 x_1，x_2，x_3 的分母同为 D. 因此，当 $D\neq 0$ 时，方程组（1.5）的公式解可简洁地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1.6}$$

例 1.1 计算二阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 $D=4\times 2-(-3)\times 1=8+3=11.$

例 1.2 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$=3\times(-5)\times(-1)+0\times 0\times 1+1\times 2\times 1-1\times(-5)\times 1-0\times 1\times(-1)-3\times 2\times 0=22.$$

例 1.3 解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12 \\ 2x_1+x_2=1 \end{cases}.$$

解 由于系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3\times 1-(-2)\times 2=7\neq 0,\ D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12\times 1-(-2)\times 1=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3\times 1-12\times 2=-21.$$

因此，由公式（1.3）得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3$$

例 1.4 解三元线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=-2\\2x_1+x_2-3x_3=0\\-x_1+x_2-x_3=1\end{cases}.$$

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\-1&1&-1\end{vmatrix}$$

$$=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times1\times2-1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1$$

$$=-5\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-2&-2&1\\0&1&-3\\1&1&-1\end{vmatrix}=1,\ D_2=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&0&-3\\-1&1&-1\end{vmatrix}=-5,\ D_3=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\2&1&0\\-1&1&1\end{vmatrix}=-1.$$

由公式（1.6）得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{1}{5},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{1}{5}.$$

二、排列与逆序数

为引出一般 n 阶行列式的定义，以下先介绍有关排列和逆序数等概念.

定义 1.1 由 1，2，…，n 共 n 个数码组成的一个有序数组，称为一个 n 级排列.

例如，213，14523，n（$n-1$）…21 分别是 3 级排列，5 级排列，n 级排列.

值得注意的是上述定义中“有序”两个字，比如 123 和 213 虽然都是 3 级排列，但是它们是两个不同的 3 级排列.

由定义 1.1 不难知道，所有 n 级不同排列的总数有 $n\cdot(n-1)\ 2\cdot1=n!$ 个.

定义 1.2 在一个排列中的两个数，如果排在前面的数大于排在后面的数，则称它们构成一个**逆序**；一个排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**. n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$（其中 p_i 为 1，2，…，n 中的某个数）的逆序数记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

例如，在 3 级排列 321 中，由于 3 与 2 构成一个逆序，3 与 1 也构成一个逆序，另外 2 与 1 也构成一个逆序. 因此 $\tau(321)=3$.

定义 1.3 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 1.5 计算 $\tau(31452)$ 和 $\tau(41352)$.

解 在 5 级排列 31452 中，有逆序（3，1），（3，2），（4，2），（5，2）. 因此，$\tau(31452)=4$，这是一个偶排列. 而在 5 级排列 41352 中，有逆序（4，1），（4，3），（4，2），（3，2），（5，2）. 因此，$\tau(41352)=5$，这是一个奇排列.

注 计算 n 级排列的逆序数的简便方法之一是

$$\begin{aligned}\tau(p_1p_2\cdots p_n)=&\ \tau(p_1)\,(p_1\text{ 后面比 }p_1\text{ 小的数的个数})+\\&\ \tau(p_2)\,(p_2\text{ 后面比 }p_2\text{ 小的数的个数})+\cdots+\\&\ \tau(p_{n-1})\,(p_{n-1}\text{后面比 }p_{n-1}\text{小的数的个数})\end{aligned}$$

由此方法容易求得

$\tau(14532)=0+2+2+1=5$，14532 为奇排列.

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

所以当 $n=4k$，$4k+1$ 时为偶排列；当 $n=4k+2$，$4k+3$ 时为奇排列.

注意由于 $\tau(123\cdots(n-1)n)=0$，故 $123\cdots(n-1)n$ 常称为**自然排列**.

定义 1.4 把一个排列中某两个数的位置互换，而剩余的数不动就得到另一个排列，这样的一个变换称为一个**对换**.

注意到，在例 1.5 中，31452 是个偶排列，经互换 2 与 1 的位置得到排列 32451. 而 $\tau(32451)=5$. 故排列 32451 为奇排列. 事实上，这其中蕴涵着一个一般性的规律.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

证明 首先考虑相邻两数对换的情形. 设排列

$$a_1\cdots a_s pq b_1\cdots b_t \tag{1.7}$$

将 p，q 对换变成

$$a_1\cdots a_s qp b_1\cdots b_t \tag{1.8}$$

显然，在排列式（1.7）、式（1.8）中，p 或 q 与前面和后面的各数所构成的逆序数都相同，不同的只是 p、q 的次序. 如果式（1.7）中 p、q 构成一个逆序，则经过对换，排列（1.8）比排列（1.7）的逆序数减少一个；如果式（1.7）中 p、q 不构成一个逆序，则经过对换，排列（1.8）比排列（1.7）的逆序数增加一个，不论增加一个还是减少一个，排列（1.7）与排列（1.8）的逆序数的奇偶性肯定不同了.

再考虑不相邻的两数的对换情形，设排列

$$a_1\cdots a_s p c_1\cdots c_r q b_1\cdots b_t \tag{1.9}$$

经过 p、q 对换变成

$$a_1\cdots a_s q c_1\cdots c_r p b_1\cdots b_t \tag{1.10}$$

不难看出，该对换可以通过若干次相邻两数的对换来实现. 比如先把排列（1.9）经过 $r+1$ 次相邻两数的对换变成

$$a_1\cdots a_s c_1\cdots c_r qp b_1\cdots b_t \tag{1.11}$$

再把排列（1.11）经过 r 次相邻两数的对换变成式（1.10），于是，总共进行了 $2r+1$ 次相邻两数的对换. 把排列（1.9）变成了排列（1.10），$2r+1$ 是奇数. 而前面已证明相邻两数的一个对换改变排列的奇偶性. 因而奇数次相邻两数的对换改变排列的奇偶性.

定理 1.2 全部 n（$n\geqslant 2$）级排列中奇偶排列各占一半，且为 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明 设全部 n 级排列中有 s 个奇排列和 t 个偶排列，则 $s+t=n!$. 把每个奇排列的最左边的两个数对换. 由定理 1.1 可知 s 个奇排列都变成偶排列，且它们彼此不同. 所以 $s\leqslant t$；把每个偶排列的最左边的两个数对换，同理可得 $t\leqslant s$. 故必有 $s=t=\frac{n!}{2}$.

比如，三级排列中，在所有 $3!=6$ 种排列中，有 3 个奇排列：321，213，132；偶排列有 3 个：123，231，312.

三、n 阶行列式的定义

为简便起见，在本章中我们总是在实数域 **R** 上来讨论问题. 事实上，所有后面的定义、定理都可以相应推广到复数域 **C** 上.

为了引出一般 n 阶行列式的定义，下面先来考察三阶行列式定义式（1.4）中右端代数和的特征：

（1）共有 $3!=6$ 项代数和，其最后结果是一个数值；

（2）每项有 3 个数相乘：$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，而每个数取自不同行不同列，其行足标固定为 123，列足标则是 1，2，3 的某个排列 $p_1p_2p_3$；

（3）每项前的符号由列足标排列 $p_1p_2p_3$ 的奇偶性决定，即 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 项前的符号是 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$.

故三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3} \tag{1.12}$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对所有不同的三级列足标排列 $p_1p_2p_3$ 的对应项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 求和，共有 $3!$ 项.

类似地，我们可以给出一般的 n 阶行列式的定义.

定义 1.5 由 n^2 个数组成的 n 行 n 列的 n 阶行列式，定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.13}$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有不同 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的对应项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 求和，共有 $n!$ 项.

n 阶行列式一般可以记为 D_n 或 D；有时也记作 det（a_{ij}）或 $|a_{ij}|$. 而 a_{ij}（i，$j=1$，2，$\cdots$，n）称为行列式中位于第 i 行第 j 列交叉位置上的**元素**.

特别地，一阶行列式 D_1 就是数 a_{11}.

显然，n 阶行列式的定义中，其展开式具有类似于三阶行列式的 3 个特征，即

（1）共有 $n!$ 项代数和，其最后结果为一个数值；

（2）每项有 n 个数相乘：$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$. 而每个数取自 n 阶行列式的不同行不同列，且行足标固定为自然排列 $12\cdots n$，列足标则是 n 级排列中的某个排列 $p_1p_2\cdots p_n$；

（3）每项的符号由列足标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的奇偶性决定，如 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 项前的符号是 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$. 由定理 1.2 可知，其中带正号和负号的项各占一半.

例 1.6 利用行列式的定义证明

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

证明 由定义 $D_4 = \sum\limits_{p_1p_2p_3p_4}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$.

它共有 4! 项代数和，其中含有零因子的项一定为 0，可不必考虑，故只需要考虑不为 0 的项. 在这样的项中，必然有一个因子来自第 1 行，因为 $a_{12}=a_{13}=a_{14}=0$，故只能是元素 a_{11}；也必然有一个因子来自第 2 行，可供选择的元素有 a_{21}，a_{22}，而 a_{21} 与 a_{11} 同在第 1 列，不会乘在一起，从而只能选 a_{22}；必然有一个因子来自第 3 行，有元素 a_{31}，a_{32}，a_{33} 可供选择，但元素

a_{31}和a_{11}同在第1列，a_{32}与a_{22}同在第2列，不会乘在一起，只能选a_{33}；必然有一个因子来自第4行，有元素a_{41}，a_{42}，a_{43}，a_{44}可供选择，但元素a_{41}与已选的a_{11}同在第1列，不会乘在一起，元素a_{42}与已选的a_{22}同在第2列，不会乘在一起，元素a_{43}与已选的a_{33}同在第3列，也不会乘在一起，故只能选a_{44}. 这说明可以不为0的项只有$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$这一项. 由于该项的列足标排列的逆序数τ（1234）=0. 所以该项前面应取正号. 因此$D_4=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

注 例1.6的结论可推广到一般n阶下三角行列式的情形：

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&0\\a_{21}&a_{22}&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即 **下三角行列式的值等于主对角线上的各元素之积**. 此结论今后在计算行列式时会经常用到.

例1.7 $\begin{vmatrix}3&0&0&0&0\\-2&4&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\1&2&5&1&0\\2&1&0&3&1\end{vmatrix}=3\times4\times(-1)\times1\times1=-12.$

在n阶行列式的定义1.5中，为了决定每一项的正负号，我们把n个元素的行足标按自然顺序排列起来. 事实上，数的乘法是可以交换的，因此这n个元素的次序是可以任意写的. 我们同样也可以将各项的列足标按自然顺序排列. 于是n阶行列式又可定义为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn} \tag{1.14}$$

以下证明定义式（1.14）与定义式（1.13）是等价的. 即证明

$$\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

假设这些因子经过m次的位置对换而完成，于是排列$q_1q_2\cdots q_n$经过m次对换成自然顺序排列$12\cdots n$；与此同时排列$12\cdots n$经同样的m次对换成排列$p_1p_2\cdots p_n$，具有相同的奇偶性. 因此

$$\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

事实上，n阶行列式更一般的定义是

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{n!}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n} \tag{1.15}$$

交换等式左端和式中各项$a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$的乘积因子$a_{iq_i}$的位置，使得

$$a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}=a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

第二节　行列式的基本性质

当行列式的阶数 n 较大时，直接用定义去计算行列式的值是很困难的．本节介绍行列式的若干基本性质，利用这些性质可以帮助我们简化计算行列式．

定义 1.6　把行列式 D 的行与列对应互换后得到的行列式称为 D 的**转置行列式**．记为 D^{T}（或 D'）即

$$若\quad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad 则\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1.8　若 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=3\times4-2\times1=10$，则

$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=3\times4-1\times2=10$，即 D 与 D^{T} 的值相等．

事实上这个结论具有一般性．

性质 1　$D=D^{\mathrm{T}}$.

证明　将 D^{T} 记为 $|b_{ij}|$，即

$b_{ij}=a_{ji}$（i，$j=1$，2，…，n）．将 D^{T} 按式（1.14）展开，有

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}b_{q_11}b_{q_22}\cdots b_{q_nn}=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1_{q_1}}a_{2_{q_2}}\cdots a_{n_{q_n}}=D.$$

这表明行列式中行与列地位平等．因此，下面对于行成立的性质，对列的相应的性质也成立．故以下性质只对行进行证明即可．

例 1.9　计算上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

解　利用性质 1 和例 1.6 的结论直接可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

显然，对于对角形行列式有：$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

综上所述，我们有如下常用的重要结论：**上（下）三角形或对角形行列式的值等于主对角线上各元素的乘积**．

性质 2　互换行列式中任意两行（列）的位置，行列式的值变号．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.16}$$

证明 设式（1.16）左端的行列式为 D，交换 D 中第 i 行和第 k 行（$i<k$），所得的行列式记为 D_1，将 D_1 的展开式中的行足标取作排列 $12\cdots k\cdots i\cdots n$. 则由行列式的定义式（1.15）有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(12\cdots k\cdots i\cdots n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= (-1)^{\tau(12\cdots k\cdots i\cdots n)}\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= -\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

而行列式 D 的行足标按自然排列 $12\cdots n$ 的展开式为

$$D = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

故 $D_1=-D$.

推论 1 如果行列式中有两行（列）对应元素相同，则此行列式的值为零.

证明 由于元素相同的两行交换得到的行列式仍是原来的行列式，但由性质 2 得 $D=-D$，故 $D=0$.

如 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3+2+0-2-0-(-3)=0.$

性质 3 以数 k 乘行列式中某一行（列）中所有元素，等于用 k 去乘此行列式. 换言之，若行列式某一行（列）所有元素有公因子 k，则可将 k 提到行列式记号外相乘，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 左端 $= \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n}$

$= k\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} =$ 右端.

推论 2 若行列式中有某一行（列）的元素全为 0，则此行列式的值等于 0.

注 此即性质 3 中 $k=0$ 的情形.

性质 4 若行列式中有两行（列）元素对应成比例，则此行列式的值等于零.

证明 第一步由性质 3 提出比例因子，第二步由性质 2 的推论即得证.

性质 5 若行列式中某一行（列）的元素都是两数之和，则此行列式可表示成两个行列式