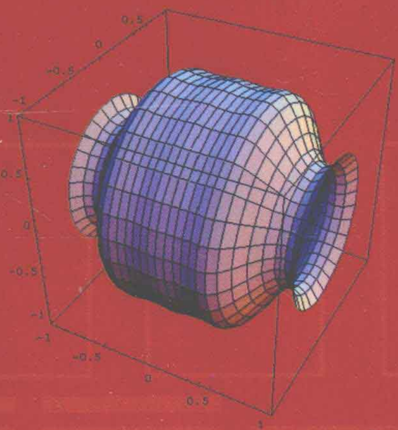

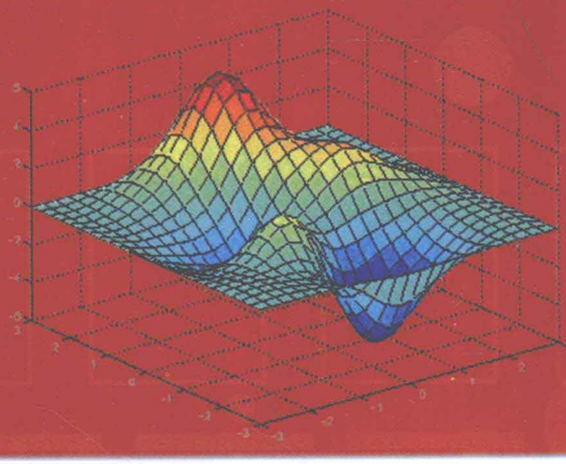

普通高等学校“十二五”规划教材

线性代数

王春华　魏云超　沙荣方　主编
刘刚剑　朱红鲜　叶超荣　于晓爽　副主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十二五”规划教材

线性代数

主　编　王春华　魏云超　沙荣方
副主编　刘刚剑　朱红鲜　叶超荣　于晓爽

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 提 要

本书是依据教育部数学基础课程教学指导委员会制定的理工、经济管理类本科生线性代数课程的教学基本要求编写，同时也根据教学实际作了适当的修改。本书本着“理论联系实际，培养逻辑思维能力，注重抽象问题应用，提高学生学术素质”的宗旨，着重培养学生的分析问题能力、解决问题能力与运算能力。全书的主要内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、向量组、相似矩阵和二次型、线性空间与线性变换。每章均有典型例题分析，并在书后附有习题答案。

本书适合作为高等院校理工科专业线性代数课程的教材或者参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王春华，魏云超，沙荣方主编. —北京：中国铁道出版社，2010.9

普通高等学校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-113-11666-8

Ⅰ.①线… Ⅱ.①王… ②魏… ③沙… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 173768 号

书　　名：线性代数
作　　者：王春华　魏云超　沙荣方　主编

策划编辑：祁　云　路　璐
责任编辑：李小军　　　　**读者热线电话：**400-668-0820
封面设计：付　魏　　　　**封面制作：**李　路
编辑助理：何　佳　　　　**责任印制：**李　佳

出版发行：中国铁道出版社(北京市宣武区右安门西街 8 号　　**邮政编码：**100054)
印　　刷：三河市华业印装厂
版　　次：2010 年 9 月第 1 版　　2010 年 9 月第 1 次印刷
开　　本：787mm×1092mm　1/16　**印张：**9.5　**字数：**216 千
印　　数：3 000 册
书　　号：ISBN 978-7-113-11666-8
定　　价：22.00 元

前 言

近几年来，随着各种大学新专业的兴起，对线性代数的要求发生着一定程度的改变，而随着网络的发展，人们获取信息的渠道愈发广阔，教育界和社会各方面对高等教育的期望与要求也越来越多样化、立体化。为适应这种形势，满足不同阶段、不同层次的人才学习需求，我们推出了这本《线性代数》教材。本教材主要内容依据教育部数学基础课程教学指导委员会制定的理工、经济管理类本科生线性代数课程的教学基本要求确定，同时也根据教学实际作了适当的修改。一方面是对我们这几年在本科实践教学环节的心得与体会作一个总结，另一方面也是为了满足广大学生学习线性代数课程的需要，期望对保证和提高线性代数课程的教学质量，对广大学生掌握基本知识结构做出有益的探索。

本书本着“理论联系实际，培养逻辑思维能力，注重抽象问题应用，提高学生学术素质”的宗旨，在概念的引入上，力求自然，通过实例来阐述其直观背景和现实意义；在基本理论上，力求直观，通俗易懂，着眼于培养学生的分析问题、解决问题的能力；在基本技能的培养上，注重基本运算能力和方法的训练。本书的主要内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、向量组、相似矩阵和二次型、线性空间与线性变换。由于线性代数课程具有较强的抽象性、逻辑性和应用性，要求读者进行积极的思维探索。为方便于教学和自学，每章包括教学基本内容、典型方法与范例、习题、复习题四个部分，其中复习题大多数选自与各章节内容相关的历年的研究生入学考试的典型试题，并给出了相应的参考答案，供一部分学有余力和考研的读者自测和复习。书后附习题参考答案。本书适合作为高等院校理工科专业线性代数课程的教材或者参考书。

全书共分六章。其中第1章由王春华编写，第2章由刘刚剑编写，第3章由叶超荣编写，第4章由魏云超编写，第5章由于晓爽、沙荣方编写，第6章由朱红鲜编写，陈付广校正。本书编者都是从事教学多年的一线教师，他们从切身的体会中，把这套教材用由浅入深、通俗易懂的语言进行了重新组织，使读者在学习中真正领悟到线性代数的思想内涵。

限于编者水平，虽然做了许多努力，但错漏在所难免，欢迎专家和读者批评指正。

编 者

2010年7月

目　录

第1章　行　列　式

行列式是一种重要的数学工具，它在求解线性方程组以及数学的其他分支中有广泛的应用. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质，以及行列式的计算.

1.1　行列式的概念

1.1.1　全排列、逆序数和对换

排列以及全排列的有关概念在中学已经有所介绍. 在此作一简单介绍和补充，先看一个例子.

例 1　用 1、2、3 三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解　这个问题可以这样理解，把三个不同的数字排成一列，共有多少种不同的排法？其可以有 6 种不同的排法：123，231，312，132，213，321.

在数学中，我们把如上考察的数字称为**元素**，因此对上述问题加以推广有如下问题：对于 n 个不同的元素排成一列，共有多少种不同的排法？

定义 1　把 n 个不同的元素排成一列称为 n 个元素的**全排列**，或简称为**排列**.

从例 1 中我们可以看出，三个元素放置不同的位置，可以按照如下方法进行放置：从三个元素中任取一个放在第一个位置上，有 $3(C_3^1)$ 种方法；再在剩下的两个元素中任取一个放在第二个位置上，有 $2(C_2^1)$ 种方法；最后一个元素放在第三个位置上，有 1 种方法. 因此，总的排法共有 $3\times2\times1=6$ 种. 我们仿照例 1，可以给出定义 1 的排列数：$P_n=n\times(n-1)\times\cdots\times3\times2\times1=n!$.

一般常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示一个 n 元排列，其中 j_1 是该排列的第 1 个数，j_2 是该排列的第 2 个数，依此类推. 若 $j_1<j_2<\cdots<j_{n-1}<j_n$，我们称其为**标准排列**，显然，由标准排列 $12\cdots n$ 组成的所有排列的种数为 $n!$.

定义 2　在一个 n 元排列中，若某两个元素的次序与标准排列不同时就构成一个**逆序**. 一个 n 元排列中逆序的总数，称为该排列的**逆序数**，记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 如果逆序数是偶数，则称之为**偶排列**；如果逆序数是奇数，则称之为**奇排列**.

我们假设排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 为标准排列 $12\cdots n$ 的一个排列，现考虑数列中的第 i 个位置上的数 $j_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 j_i 大的且排在 j_i 前面的数有 a_i 个，则 j_i 的逆序数就是 a_i，那么该排列总的逆序数就为：

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

例 2　求排列 4132 的逆序数.

解　在排列 4132 中，4 的逆序数为 $a_1=0$；1 的逆序数 $a_2=1$；3 的逆序数 $a_3=1$；2 的逆序数 $a_4=2$. 所以该排列的总逆序数 $a=a_1+a_2+a_3+a_4=0+1+1+2=4$. 并且该排列为偶排列.

定义 3　在排列中，将任意两个元素对调，其余元素位置不变，得到新的排列的过程称为**对换**；将相邻两个元素对换，称为**相邻对换**.

例 3 求对排列 32145 的元素 2 和 4 进行一次对换得到的排列.

解 34125.

我们可以很快求出排列 32145 和排列 34125 的逆序数分别为 $0+1+2+0+0=3$ 和 $0+0+2+2+0=4$. 在这里可以发现,排列经过一次对换,其逆序数由奇数变成为偶数,是否所有排列经过一次对换其排列的奇偶性都会发生变化?我们有如下定理:

定理 1 一个排列中的任意两个元素经过一次对换,其排列的奇偶性改变.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1a_2\cdots a_labb_1b_2\cdots b_m$,对换 a 和 b,变排列为 $a_1a_2\cdots a_lbab_1b_2\cdots b_m$. 显然,这两个排列的逆序数与 a 和 b 有关. 当 $a<b$ 时,经过对换后,a 的逆序数增加 1,而 b 的逆序数不变;当 $a>b$时,经过对换后,a 的逆序数不变,而 b 的逆序数减少 1. 因此排列 $a_1a_2\cdots a_labb_1b_2\cdots b_m$和 $a_1a_2\cdots a_lbab_1b_2\cdots b_m$的奇偶性改变.

再证一般对换的情形.

设排列 $a_1a_2\cdots a_lab_1b_2\cdots b_mbc_1c_2\cdots c_n$,对它进行 n 次相邻对换,变成排列 $a_1a_2\cdots a_labb_1b_2\cdots b_mc_1c_2\cdots c_n$,再做 $m+1$ 次相邻对换,变成排列 $a_1a_2\cdots a_lbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$,总之,在这个过程中总共进行了 $2m+1$ 次相邻对换,使得排列 $a_1a_2\cdots a_lab_1b_2\cdots b_mbc_1c_2\cdots c_n$中的元素 a 和 b 对调,从而得到排列 $a_1a_2\cdots a_lbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$,所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 1 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数,偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

证 因为标准排列的逆序数是 0,因此是偶排列,又由定理 1 可知,对换的次数就是排列奇偶性的变化次数,因此结论成立.

1.1.2 二阶与三阶行列式

用消元法求解下列两元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1\\a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}. \tag{1.1}$$

用加减消元法不难求出,当 $a_{11}a_{22}\neq a_{12}a_{21}$时,得到解

$$x=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad y=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

现把方程组(1.1)式中的未知数系数按照下标次序排列在一起

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{matrix}. \tag{1.3}$$

从(1.2)分母可以看出,正好是(1.3)对角线乘积之差.

定义 4 将 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为排列(1.3)所确定的二阶行列式,记作

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

其中,a_{ij}表示第 i 行第 j 列(i,j 分别为行标和列标)位置上的元素.

由此,若记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\b_2 & a_{22}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\a_{21} & b_2\end{vmatrix}.$$

则(1.2)式可写成

$$x=\frac{D_1}{D},\quad y=\frac{D_2}{D}.$$

注意:在 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 中,从 $a_{11}a_{22}$ 到 $-a_{12}a_{21}$ 每个元素的 $a_{1j_1}a_{2j_2}$ 行标顺序是标准排列,而列标排列在 $a_{11}a_{22}$ 中的逆序数为0(偶数),它的系数为正数;在 $a_{12}a_{21}$ 中的列标排列逆序数为1(奇数),它的系数为负.这并非巧合,并且我们注意到 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 中的每一项中的元素均取自于不同行不同列,每一项前面的符号在行标为标准排列的前提下取决于列标排列的奇偶性.下面我们来观察三阶行列式.

定义5 设9个数按3行3列排列为

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.4}$$

那么称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

为一个三阶行列式.

对 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ 中的每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 进行观察,行标顺序均是标准排列,而列标排列从最左边一项到最右边一项分别是123,231,312;132,213,321.其逆序数分别为0,2,2;1,1,3.注意到正项的列标逆序均为偶数;而负项的列标逆序均为奇数.因此可以定义如下三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1,j_2,j_3)}(-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

其中 $j_1j_2j_3$ 表示123三个元素的全排列.

例4 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

解 按三阶行列式的定义,有

$$\begin{aligned} D &=3\times2\times(-1)+(-6)\times6\times1+2\times5\times4-3\times6\times4- \\ &\quad(-6)\times5\times(-1)-1\times2\times2 \\ &=-6-36+40-72-30-4=-108. \end{aligned}$$

1.1.3 n 阶行列式

由三阶行列式的定义,我们给出 n 阶行列式的定义.

定义6 设 n^2 个数,按 n 行 n 列排列为

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix},$$

那么称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

为一个 n **阶行列式**. 它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和,简记为 $\det(a_{ij})$ 或者 $|a_{ij}|$;这里 a_{ij} 称为**行列式的元素**. 其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 表示 n 个元素 $1,2,\cdots,n$ 的不同排列. 称 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 为行列式的**一般项**.

注:①一阶行列式 $|a|=a$,不要与绝对值记号混淆.

② $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$(不包括元素本身所带的符号).

例 5 证明上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \boldsymbol{O} & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证 一般项是 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$,考虑不为零的项. 由于 D 的第 n 行元素除去 a_{nn} 外全是零,所以只要考虑 $j_n = n$ 的那些项;同理,D 的第 $(n-1)$ 行只要考虑 $j_{n-1} = n-1$. 这样逐步推导下去易得,在 D 的展开中,除去 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ 这项外,其余全为零,且此项前的系数为 $(-1)^{\tau(12\cdots n)} = 1$.

注:非对角线上元素全为 0 的行列式称为**对角行列式**,而对角线以下(上)的元素全为 0 的行列式称为**上(下)三角形行列式**.

另外,由这个结论可得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

和

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

定理 2 n 阶行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}.$$

证 按定义,原式有

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

记

$$D_1 = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}.$$

对于 D 中任一项 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$,总有且仅有 D_1 中的某一项经过乘法交换律与之相对应;反之,对于 D_1 中的任一项 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$,也总有且仅有 D 中的某一项经过乘法交换律与之相对应,于是 D 与 D_1 中的项可以一一对应并相等,所以两者是相等的.

定理 3 n 阶行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^s a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

其中 $s=\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

证 按照行列式定义有

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \tag{1.5}$$

令
$$D_1 = \sum (-1)^s a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}. \tag{1.6}$$

注意到交换式(1.6)的一般项中两元素的位置,相当于同时进行一个行标的对换和一个列标的对换.故交换位置后一般项的两下标排列逆序数之和的奇偶性保持不变.即交换式(1.6)的一般项中两元素的位置,其符号保持不变.这样我们总可以经过有限次的位置交换,使其行标换为自然数顺序排列,即变为式(1.5)的一般项,因此 D 的一般项也可以记为式(1.6)的形式.

例 6 在六阶行列式中,下列两项各带什么符号:

(1)$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$; (2)$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$.

解 (1)按定义 5 和定理 3 计算:

$$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}=a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65},$$

而 431265 的逆序数 $N=0+1+2+2+0+1=6$,
所以 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 前边应带正号.

(2)按定理 3 计算:

行标排列 251463 的逆序数为 $N=0+0+2+1+0+3=6$,

列标排列 136254 的逆序数为 $N=0+0+0+2+1+2=5$,
所以 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 前边应带负号.

习题 1.1

1. 求下列排列的逆序数，并说明奇偶性：

(1)3 1 2 6 4 5；　　(2)36715284；

(3)$n(n-1)\cdots 2\ 1$.

2. 写出六阶行列式中下列各元素乘积应取什么符号：

(1)$a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$；　　(2)$a_{21}a_{53}a_{16}a_{44}a_{32}a_{65}$.

3. 用行列式的定义计算下列行列式：

(1)$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix}$；　　(2)$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$；

(3)$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$；　　(4)$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

4. 写出四阶行列式中含有 $a_{12}a_{23}$ 的项.

1.2 行列式的性质

定义 称行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的转置行列式，记为 D^{T}.

性质 1 行列式和它的转置行列式相等.

证 根据行列式定义可得

$$D^{\mathrm{T}} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n},$$

再由 1.1 节定理 2 即可得出结论.

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

为了便于书写，往往以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列. 交换两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j (i \neq j)$，交换两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j (i \neq j)$.

设行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{s+t} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n},$$

交换行列式中的第 i 行与第 j 行的对应元素 $(i \neq j)$，得到新的行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{s'+t} a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n}.$$

考虑乘积 $a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}$. 它在 D 和 D_1 中都是取自不同行和不同列，因此 $a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} = a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n}$. 其中

$$s = \tau(1 \cdots i \cdots j \cdots n), \quad s' = \tau(1 \cdots j \cdots i \cdots n), \quad t = \tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n).$$

由 1.1 节定理 1 可知 $(-1)^{s+t} = -(-1)^{s'+t}$，即行列式 D 和 D_1 中的一般项奇偶性相反，因此 $D = -D_1$.

推论 1 若行列式有两行(列)完全相同，则行列式为零.

证 把这两行互换，有 $D = -D$，有 $2D = 0$，故 $D = 0$.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以此行列式. 即

$$kD = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

第 i 行(列)乘以 k，记作 $r_i \times k (c_i \times k)$.

推论 2 行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

由推论 1 和性质 3 直接可得推论 2. 例如：行列式 $D = \det(a_{ij})$ 中的第 i 行元素是对应的第一行元素的 k 倍，则有如下运算：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

性质 4 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots \end{vmatrix},$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots \end{vmatrix}.$$

证 由定义，左边$=D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots \end{vmatrix}$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (a_{ij_i} + a'_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a'_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots \end{vmatrix}$$

$=$右边.

性质 5 把行列式中的某一行(列)的各元素乘以同一个数加到另一行(列)对应的元素上去，所得到的行列式的值不变.

例如，以数 k 乘第 j 行(列)加到第 i 行(列)上，记作 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$，有：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1.$$

证 由性质 4 可知

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+0$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D.$$

例 1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-2r_1]{r_2-2r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & -8 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & -12 & -5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&6&0&-2\\0&-4&-1&2\\0&-8&-3&5\\0&-12&-5&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-3r_2]{r_3-2r_2}-\begin{vmatrix}1&6&0&-2\\0&-4&-1&2\\0&0&-1&1\\0&0&-2&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-2r_3+r_4}-\begin{vmatrix}1&6&0&-2\\0&-4&-1&2\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=4.$$

注:计算行列式时常利用行列式的性质,把它化为三角行列式来计算.

例 2 证明行列式

$$\begin{vmatrix}a_1+b_1x&a_1x+b_1&c_1\\a_2+b_2x&a_2x+b_2&c_2\\a_3+b_3x&a_3x+b_3&c_3\end{vmatrix}=(1-x^2)\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}.$$

证 利用性质 4:

$$\begin{vmatrix}a_1+b_1x&a_1x+b_1&c_1\\a_2+b_2x&a_2x+b_2&c_2\\a_3+b_3x&a_3x+b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1+b_1x&a_1x&c_1\\a_2+b_2x&a_2x&c_2\\a_3+b_3x&a_3x&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1+b_1x&b_1&c_1\\a_2+b_2x&b_2&c_2\\a_3+b_3x&b_3&c_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1&a_1x&c_1\\a_2&a_2x&c_2\\a_3&a_3x&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1x&a_1x&c_1\\b_2x&a_2x&c_2\\b_3x&a_3x&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1x&b_1&c_1\\b_2x&b_2&c_2\\b_3x&b_3&c_3\end{vmatrix}.$$

利用性质 3 可得

$$\text{原式}=x\begin{vmatrix}a_1&a_1&c_1\\a_2&a_2&c_2\\a_3&a_3&c_3\end{vmatrix}+x^2\begin{vmatrix}b_1&a_1&c_1\\b_2&a_2&c_2\\b_3&a_3&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}b_1&b_1&c_1\\b_2&b_2&c_2\\b_3&b_3&c_3\end{vmatrix}.$$

利用推论 1 可得

$$\text{原式}=x^2\begin{vmatrix}b_1&a_1&c_1\\b_2&a_2&c_2\\b_3&a_3&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}.$$

再利用性质 2 可得

$$\text{原式}=(1-x^2)\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}.$$

必须注意:以下做法是错误的.

$$\begin{vmatrix}a_1+b_1x&a_1x+b_1&c_1\\a_2+b_2x&a_2x+b_2&c_2\\a_3+b_3x&a_3x+b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_1x&c_1\\a_2&a_2x&c_2\\a_3&a_3x&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1x&b_1&c_1\\b_2x&b_2&c_2\\b_3x&b_3&c_3\end{vmatrix}.$$