KOALAGOGO
考拉进阶

薛金星·教材全解 畅销18年
全国一亿读者首选

依据教育部最新本科数学教学大纲和考研大纲编写
配高教社《高等数学》第六版 同济大学数学系 编

大学教材全解

高等数学（下册）

同步辅导+考研复习

考拉进阶《大学教材全解》编委会 编
王新心 李 红◎主 编

同济·第六版

教材解析最详 方法技巧最全

- 知识要点全解
- 典型例题精讲
- 课后习题详解
- 考研真题精析

赠 历年考研真题及高等数学重要公式手册，请登陆考拉进阶官方网站www.koalagogo.com下载。

中国海洋大学出版社

内附 中奖卡

KOALAGOGO

考拉进阶

大学教材全解

高等数学（下册）

同济·第六版

主　编：王新心　李　红

副主编：罗媛媛

中国海洋大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册／王新心，李红主编．-- 青岛：中国海洋大学出版社，2011.8
（大学教材全解）
ISBN 978－7－81125－732－8

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①王…　②李…　Ⅲ.①高等数学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 138039 号

出版发行　中国海洋大学出版社
社　　址　青岛市香港东路 23 号
邮政编码　266071
网　　址　http://www.ouc－press.com
责任编辑　矫恒鹏
印　　制　北京泽宇印刷有限公司
版　　次　2012 年 1 月第 1 版
印　　次　2012 年 1 月第 1 次印刷
成品尺寸　148mm×212mm
印　　张　12.5
字　　数　345 千字
定　　价　15.80 元

前言

“教材全解”系列图书十多年来一直是初高中学生的首选辅导材料，每年销售量位居同类辅导书首位，帮助千万学子取得了理想的成绩。为帮助广大读者学好《高等数学》这门课程（该课程不仅是理工、经济、管理类等专业学生必修的一门课程，同时也是全国硕士研究生入学考试的重点科目），我们特邀请了全国各地治学严谨、业务精湛的一线名师，严格遵循教育部高等院校教学指导委员会审订的“本科数学基础课程教学基本要求”（教学大纲）和教育部最新的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”，精心编写了这本《大学教材全解——高等数学》。希望通过“教材全解”系列全心全意、解疑解难的独有特色，帮助读者全面透彻地解析高等数学知识，真正做到学好教材，提升解题能力与数学思维水平，轻松达到期中、期末、考研等各项考试的测试要求。

本书是同济大学数学系编写的《高等数学》下册（第六版，高等教育出版社）的配套用书。其章节内容与教材保持一致，讲解顺序与课堂授课完全同步，非常贴近读者的学习习惯，每章内容编写如下：

本章知识结构图解　以清晰的结构图形式，展现本章的知识体系及知识点间的内在逻辑关系。

本节考试出题点　概括本节在考试时重点考查知识点的哪些方面，出哪些类型的试题。重要考点和题型一目了然，为考试复习指明方向，使备考更加轻松、高效。

教材内容全解　这部分突出必须掌握或考频较高的核心内容，以知识点进行分类，对重点和难点，在知识点后进行标注，方便读者在课后复习及期末考试复习时快速查找本节重点。与众不同的是，本书在重要知识点后面配了相应例题，而且特别注重讲解知识点实际应用时易混淆、不容易理解之处以及解题过程中需要注意的事项，并列举与此知识点相关、在解题中广泛使用的核心结论，帮助读者学好、吃透本节重要概念、定理（公理）、公式、性质等。

常考基本题型　以每节的重点问题为主线，对每节涉及的学校期中、期末考试，全国硕士研究生入学考试等常考基本题型做全面、详尽分析，揭示解题思路、传授方法技巧。部分例题给出多种解法，培养读者从不同角度思考问题、解决问题的能力。

课后习题全解　这部分给出了配套教材中各节习题过程步骤最详尽，方法技巧最全面的解答过程，并且还对重要步骤和较难理解之处做了注解，这也是本书的一大特色。

本章解题方法归纳　归纳、提炼本章涉及的重要解题方法，培养读者运用数学思想独立思考问题、解决问题的能力。为满足读者获得高分以及通过考研的更高需求，每种方法下面所配的例题以近几年的考研真题为主，让读者在初次学习本课程时就对研究生入学考试的难度和要求有初步认识，为考研打下坚实基础。

本章总习题　习题全解　给出了每章章末总习题的详尽解析，对重要步骤和较难理解之处均做了注释，对典型习题，给出了两种及两种以上的解法。

除此之外，本书还附上了期末考试模拟试卷及相应答案解析，方便读者进行期末考试考前自测，检测学习效果。

本书内容贯彻了“教材全解”系列讲解细致、层次清晰、深入浅出的特点，并在此基础上突出了三大亮点：

1. 解题过程最详，方法技巧最全。

对“常考基本题型”、“本章解题方法归纳”和“课后习题全解”这些板块，本书不仅设置了“题型解析”、“解题提示”、“方法技巧”、“特别提醒”等栏目，而且每一道题均给出了详细的解题步骤。不仅如此，针对有代表性的习题，本书给出了两种及两种以上的解法，使读者举一反三，达到事半功倍的学习效果。

2. 习题难度分级，关键步骤加批注，讲解更到位。

在“课后习题全解”和“本章总习题 习题全解”里面，根据习题难易及重要性程度，将全书习题分三个等级：基础题，多知识点综合题，灵活题和难题，分别以易、中、难的标志标记在题号前。在给出详尽解题过程的同时，关键步骤间还加了注解释疑，帮助读者理解解题的每一个步骤。

3. 密切联系考研，精选并详细解析历年考研真题。

在“常考基本题型”、“本章解题方法归纳”里，以近几年考研真题为载体，详细阐述解题方法和技巧，针对典型例题还给出了多种解法，让读者在初学本课程时就对研究生入学考试有较好的认知。

参与本书的编者长期主讲《高等数学》，教龄均在 27 年以上，在本领域有着丰富的研究成果和教学经验，在编写过程中，我们重点突出解题思路和方法，力求将多年的成果与经验渗透到本书内容中。在本书市场调研与选题策划阶段，高红伟教授给予了大力支持，提出许多宝贵意见和建议，在此，致以衷心的感谢！

本书可作为：高等学校理工科和其他非数学专业学生学习高等数学的辅导用书，参加硕士研究生入学考试的复习用书；教师讲授高等数学课程的教学参考书。

由于时间仓促及编者水平有限，书中定会存在不当和疏漏之处，敬请读者批评指正。

考拉进阶教育研究院

“大学教材全解”编委会

目录

第八章　空间解析几何与向量代数

本章知识结构图解

- 向量代数
  - 向量的概念
    - 表示方法：$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$
    - 模 → $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ → 单位向量、零向量
    - 方向 → 方向角、方向余弦
  - 向量的运算
    - 线性运算
      - 几何表示 → 平行四边形法则、三角形法则
      - 坐标表示 → $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$，$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$
    - 数量积
      - 几何表示 → $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$
      - 坐标表示 → $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$
    - 向量积
      - 几何表示 → 模：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$；方向：垂直 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在平面，右手法则
      - 坐标表示 → $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$
    - 混合积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$
  - 向量的位置关系
    - 两向量垂直 → $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ → $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$
    - 两向量平行 → $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ → $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$
    - 三向量共面 → $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$ → $\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=0$

- 解析几何
  - 平面方程
    - 点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
    - 一般式：$Ax+By+Cz+D=0$
    - 截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$
  - 直线方程
    - 一般式：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$
    - 对称式：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$
    - 参数式：$x=x_0+mt, y=y_0+nt, z=z_0+pt$
  - 线面关系
    - 面面关系
      - 夹角：$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
      - 平行：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$
      - 垂直：$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
    - 线线关系
      - 夹角：$\cos\theta=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$
      - 平行：$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$
      - 垂直：$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
    - 线面关系
      - 夹角：$\sin\theta=\frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
      - 平行：$mA+nB+pC=0$
      - 垂直：$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$
  - 曲面
    - 旋转曲面
    - 柱面
    - 二次曲面
  - 曲线
    - 一般式
    - 参数式
    - 投影曲线

第一节　向量及其线性运算

一　本节考试出题点

本节在考试中的出题点主要体现在以下方面：

1. 利用向量的几何运算求解几何问题.
2. 与空间两点间的距离有关的问题.
3. 求向量的模，单位向量，方向余弦，方向角，投影.

二　教材内容全解

知识点 1　向量的概念

对向量概念的理解应注意的问题

(1) 向量是由模和方向共同决定的量，两向量相等的充分必要条件是模相等，方向相同.

(2) 模为 1 的向量为单位向量，$\boldsymbol{a}$ 的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$；模为 0 的向量为零向量，其方向任意，记为 $\mathbf{0}$.

(3) 向量通常是指自由向量，根据需要，向量的起点均可移动到坐标原点或任意指定的点，起点为坐标原点的向量称为向径.

(4) 两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角是指它们的正向所夹的角 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

例 1　下列关于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的论断正确的是(　　).

A. 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$　　　B. 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$

C. 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$　　　D. 若 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$

解　答案为 D.

向量相等必须同时满足两个条件：模相等，方向相同，故选项 A 错误；$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 不能确定向量方向相同或相反，故选项 B 错误；$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ 有可能 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 但方向不同，故选项 C 错误；模与方向二者有一个不同，向量必不等，故选项 D 正确.

知识点 2　向量的线性运算(重点)

向量的线性运算指的是向量的加法、减法以及数乘的运算.

1. 向量的线性运算的几何表示

(1) 向量的加法满足平行四边形法则(图 8-1)、三角形法则(图 8-2).

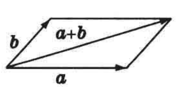

图 8-1

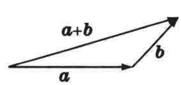

图 8-2

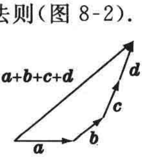

图 8-3

多于两个向量相加时，由三角形法则可得，将所有向量首尾相接，连接第一个向量

的起点与最后一个向量的终点所得的向量就是向量的和向量(图 8-3).

(2) 向量的减法 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 即将两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 放在同一起点，从 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点所得的向量就是两向量的差向量，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 8-4).

(3) 向量的数乘 $\lambda\boldsymbol{a}$，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向一致，模增大或减小 λ 倍；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反，模增大或减小 λ 倍.

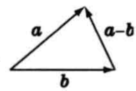

图 8-4

2. 向量的线性运算满足的运算规律

(1) 加法交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 加法结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3) 数乘结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(4) 数乘分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

3. 与向量的线性运算有关的重要结论

定理：设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

例 2 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则必有(　　).

A. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$　　B. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

C. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$　　D. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

解 答案为 C.

由条件 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 可知，以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形为矩形. 如图 8-5 所示，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，而矩形的对角线相等，故 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{DB}|$，即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

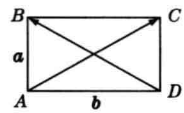

图 8-5

知识点 3 空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的定义

(1) 从空间某定点 O 作三条都以 O 为原点、长度单位相同且互相垂直的数轴，分别称为 x 轴、y 轴、z 轴，方向符合右手规则(图 8-6).

(2) 由三坐标轴确定了三个互相垂直的平面，它们分别是 xOy 面，yOz 面和 zOx 面. 三个坐标面将空间分为八个卦限，如图 8-7 所示.

(3) 与 x 轴、y 轴、z 轴正向方向一致的单位向量分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$.

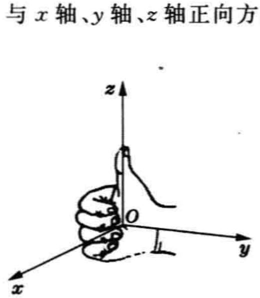

图 8-6

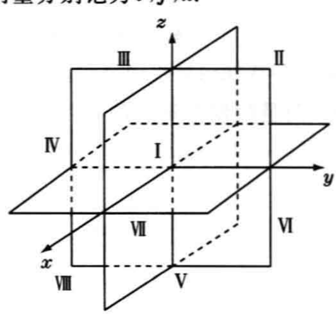

图 8-7

2. 空间直角坐标系的意义

(1) 确定空间点的坐标：从 P 点分别作 x 轴，y 轴，z 轴的垂面，三个垂面与 x 轴、y 轴、z 轴的三个交点在各自所在数轴上的坐标分别为 x,y,z，将三个坐标构成有序数对即为点 P 的坐标 (x,y,z). 为建立空间曲线、曲面方程奠定了基础.

(2)建立了点 $P(x,y,z)$ 与向量 $\overrightarrow{OP}$ 一一对应的关系，$\overrightarrow{OP}$ 在 x 轴，y 轴，z 轴上的分向量分别为 $x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$ 和 $z\boldsymbol{k}$，即 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 从而有向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标表示式 $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$. 向量的坐标式使向量的运算代数化成为可能.

3. 空间直角坐标系下特殊点的坐标

(1) 不同卦限的点的坐标. 如第一卦限的点 $P(x,y,z)$，$x>0,y>0,z>0$.

(2) 坐标轴上的点的坐标. 如 x 轴上的点 $P(x,0,0)$；y 轴上的点 $Q(0,y,0)$；z 轴上的点 $R(0,0,z)$.

(3) 坐标面上的点的坐标. 如 xOy 面上的点 $P(x,y,0)$；如 yOz 面上的点 $P(0,y,z)$；xOz 面上的点 $P(x,0,z)$.

例 3　在空间直角坐标系中，位于第八卦限的点是(　　).

A. $(1,-2,3)$　　B. $(3,4,-5)$　　C. $(1,-2,-5)$　　D. $(-3,-4,8)$

解　答案为 C.

因为 $(1,-2,3)$ 在第四卦限，$(3,4,-5)$ 在第五卦限，$(1,-2,-5)$ 在第八卦限，$(-3,-4,8)$ 在第三卦限.

知识点 4　利用坐标作向量的线性运算(重点)

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

(1) $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$；

(2) $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$.

(3) 若向量的起点为 $A(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $B(x_2,y_2,z_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，故

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

(4) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

例 4　向量 $\overrightarrow{PQ}=(4,-4,7)$ 的终点为 $Q(2,-1,7)$，则起点 P 的坐标为(　　).

A. $(-2,3,0)$　　B. $(2,-3,0)$　　C. $(4,-5,14)$　　D. $(-4,5,14)$

解　答案为 A.

设 P 的坐标为 (x,y,z)，由向量的坐标表示式

$$\overrightarrow{PQ}=(2-x,-1-y,7-z)=(4,-4,7),$$

则

$$2-x=4,-1-y=-4,7-z=7,$$

所以 P 的坐标为 $(-2,3,0)$.

例 5　若向量 $\boldsymbol{a}=(a,1,5)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(2,10,50)$ 平行，则 $a=$________.

解　因为 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即 $(2,10,50)=(\lambda a,\lambda,5\lambda)$. 由于向量相等，其对应坐标相等，故 $\lambda=10$，从而 $a=\dfrac{1}{5}$.

知识点 5　向量的模、方向角、投影(重点)

1. 向量的模与两点间的距离公式

(1) 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$；

(2) 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则

$|M_1M_2|=|\overrightarrow{M_1M_2}|$

$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

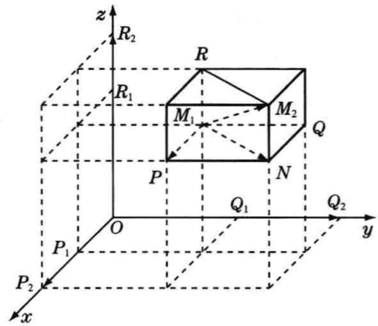

图 8-8

2. 向量的方向角、方向余弦

(1) 非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴，y 轴，z 轴正向的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦.

(2) 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，则 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量就是它的方向余弦，即

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\right)$$
$$=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

3. 向量在轴上的投影

(1) 给定 u 轴及其坐标原点 O，向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，过 M 作 u 轴的垂面交 u 轴于 M'，$\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分向量；M' 在 u 轴上的坐标 x_0 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影，记为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$ 或 $(\boldsymbol{r})_u$.

(2) 向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 在 x 轴，y 轴，z 轴上的投影向量分别为 $a_x\boldsymbol{i},a_y\boldsymbol{j},a_z\boldsymbol{k}$；投影分别为 a_x,a_y,a_z.

(3) 向量的投影具有与其坐标相同的性质，即

性质 1　$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\theta$，其中 θ 为向量与 u 轴的夹角.

性质 2　$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$.

性质 3　$\mathrm{Prj}_u\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$.

例 6　设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 的方向余弦；在 x 轴上的投影及在 y 轴上的投影向量.

解　因为 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})$

$$=(12+6-5)\boldsymbol{i}+(20-12-1)\boldsymbol{j}+(32-21+4)\boldsymbol{k}$$
$$=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k},$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{13^2+7^2+15^2}=\sqrt{443},$$

所以
$$\cos\alpha=\frac{13}{\sqrt{443}},\cos\beta=\frac{7}{\sqrt{443}},\cos\gamma=\frac{15}{\sqrt{443}};$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 13，在 y 轴上的投影向量为 $7\boldsymbol{j}$.

特别提醒　注意审题，投影是数量，投影向量是向量，不能将二者混淆.

三、常考基本题型

题型Ⅰ　利用坐标表示求向量模、单位向量、方向角、方向余弦及投影

题型解析　利用坐标表示求解与向量有关的问题，一定要对应分量相加减(乘以同一个数)或对应坐标相加减(乘以同一个数). 利用所求各量的定义及公式求解.

例 1　设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的对角线的长度.

解　由向量加减运算的三角形法则，对角线的长度分别为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

因为
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1+0)\boldsymbol{i}+[1+(-2)]\boldsymbol{j}+(0+1)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1-0)\boldsymbol{i}+[1-(-2)]\boldsymbol{j}+(0-1)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$
所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3},|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{11}$.

例 2　设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解　因为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-4,0-\sqrt{2},2-1)=(-1,-\sqrt{2},1)$，故
$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2,$$
方向余弦和相应的方向角为
$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\frac{1}{2};\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{3\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}.$$

题型Ⅱ　利用向量处理几何或物理问题

题型解析　几何命题的证明或求解首先将边看作向量，然后利用向量的线性运算找到结论中的量与已知量之间的关系，从而得到问题的结论.

例 3　已知 AD,BE,CF 是三角形 ABC 的中线，证明：$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$.

证　如图 8-9 所示，

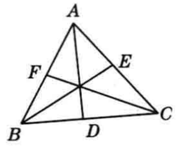

图 8-9

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD};\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF},$$
因此，
$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}$$
$$=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AF}.$$
由 AD,BE,CF 是三角形 ABC 的中线，可知 $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EA}$，于是
$$\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BD},$$
因此
$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}.$$

题型Ⅲ　与两点间的距离公式有关的问题

题型解析　空间两点间的距离公式通常用于求点的轨迹及证明几何问题.

例 4　在 xOy 面上求与两点 $A(-4,1,7),B(3,5,-2)$ 等距离的点的轨迹.

解　设 xOy 面上动点的坐标为 $M(x,y,0)$，因为 $|MA|=|MB|$，得
$$\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2+(0-7)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2+(0+2)^2},$$
整理得
$$14x+8y+28=0\text{ 且 }z=0.$$

四 课后习题全解

习题 8-1(原题目见教材 P12～P13)

易 1. **解** $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

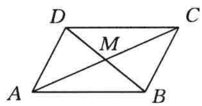

图 8-10

易 2. **证** 如图 8-10 所示,记四边形 $ABCD$ 中 AC 与 BD 交于点 M,由已知 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$,$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$,故

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC},$$

即 $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$,因此,四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

易 3. **解** 如图 8-11 所示,由题意知

$$\overrightarrow{BD_1}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},\overrightarrow{D_1D_2}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},\overrightarrow{D_2D_3}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},\overrightarrow{D_3D_4}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},$$

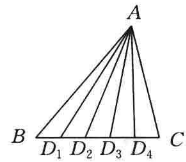

图 8-11

故

$$\overrightarrow{D_1A}=-\overrightarrow{AD_1}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_1})=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

$$\overrightarrow{D_2A}=-\overrightarrow{AD_2}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_2})=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

$$\overrightarrow{D_3A}=-\overrightarrow{AD_3}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_3})=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

$$\overrightarrow{D_4A}=-\overrightarrow{AD_4}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_4})=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

易 4. **解** $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,-1-1,0-2)=(1,-2,-2)$,

$-2\,\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4)$.

易 5. **解** 向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为

$$\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}}(6,7,-6)=\pm\left(\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{-6}{11}\right).$$

易 6. **解** A 点在第四卦限,B 点在第五卦限,C 点在第八卦限,D 点在第三卦限.

易 7. **解** 在坐标面上的点,其坐标的特征是至少有一个为零,具体是:xOy 面上的点的坐标形如$(x_0,y_0,0)$,xOz 面上的点的坐标形如$(x_0,0,z_0)$,yOz 面上的点的坐标形如$(0,y_0,z_0)$.

在坐标轴上的点,其坐标的特征是至少有两个为零,具体是:Ox 轴上的点的坐标形如$(x_0,0,0)$,Oy 轴上的点的坐标形如$(0,y_0,0)$,Oz 轴上的点的坐标形如$(0,0,z_0)$.

A 点在 xOy 面上,B 点在 yOz 面上,C 点在 x 轴上,D 点在 y 轴上.

易 8. **解** (1) 点(a,b,c)关于 xOy、yOz、zOx 面的对称点分别是$(a,b,-c)$、$(-a,b,c)$、$(a,-b,c)$;

(2) 点(a,b,c)关于 x、y、z 轴的对称点分别是$(a,-b,-c)$、$(-a,b,-c)$、$(-a,-b,c)$;

(3) 点(a,b,c)关于坐标原点的对称点是$(-a,-b,-c)$.

易 9. **解**　如图 8-12 所示，点 P_0 关于 xOy、yOz、zOx 面的垂足坐标分别为 $(x_0,y_0,0)$、$(0,y_0,z_0)$、$(x_0,0,z_0)$. 点 P_0 关于 x、y、z 轴的垂足坐标为 $(x_0,0,0)$、$(0,y_0,0)$、$(0,0,z_0)$.

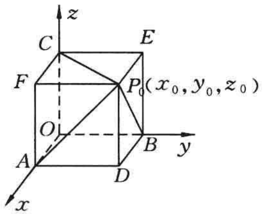

图 8-12

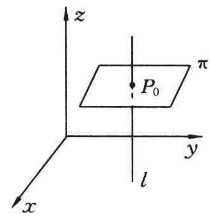

图 8-13

易 10. **解**　如图 8-13 所示，过 P_0 且平行于 z 轴的直线上点的坐标特点是：它们的横坐标不变纵坐标也不变. 过点 P_0 且平行于 xOy 面的平面上点的坐标特点是：它们的竖坐标 z_0 相同.

易 11. **解**　如图 8-14 所示，已知 $AB=a$，故 $OA=OB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，于是各顶点的坐标分别为：

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right),B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right),C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right),$$

$$D\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right),E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right),F\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right),$$

$$G\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right),H\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right).$$

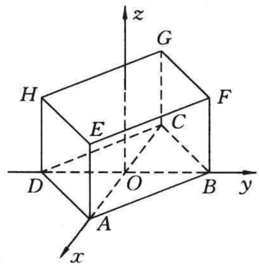

图 8-14

易 12. **解**　点 M 到 x 轴的距离 $d_1=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$，点 M 到 y 轴的距离 $d_2=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$，点 M 到 z 轴的距离 $d_3=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$.

中 13. **解**　设所求点为 $D(0,y,z)$，由已知，$|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DC}|$，可得点 D 的坐标 y、z 应满足的方程组

$$\begin{cases}3^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2,\\4^2+(y+2)^2+(z+2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2.\end{cases}$$

解得 $y=1,z=-2$，所求点为 $(0,1,-2)$.

中 14. **证**　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$,

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=7\sqrt{2}$,

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7$,

知 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$ 且 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2$，故 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

易 15. **解**　$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(3-4)^2+(0-\sqrt{2})^2+(2-1)^2}=2$,

$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,-\sqrt{2},1)$，则

$\cos\alpha=\frac{-1}{2},\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\frac{1}{2},\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{3\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$.

易 16. **解** (1)当 $\cos\alpha=0$ 时,该向量与 x 轴垂直,平行于 yOz 面.

(2)当 $\cos\beta=1$ 时,$\beta=0$,则该向量与 y 轴正向一致,垂直于 xOz 面.

(3)当 $\cos\alpha=\cos\beta=0$ 时,知 $\cos^2\gamma=1,\gamma=0$ 或 $\gamma=\pi$,则该向量平行于 z 轴,垂直于 xOy 面.

易 17. **解** $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\theta=4\cos 60°=2$.

易 18. **解** 设起点 A 的坐标为(x,y,z),则$\overrightarrow{AB}=(2-x,-1-y,7-z)$,则 $2-x=4,-1-y=-4,7-z=7$,故 $x=-2,y=3,z=0$,即所求起点为$(-2,3,0)$.

中 19. **解题提示** 利用向量线性运算可求得向量 $\boldsymbol{a}$,由向量在坐标轴上的投影及向量在坐标轴上的分向量的概念,可求得向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影及其在 y 轴上的分向量.

解 $\boldsymbol{a}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$,
则向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 13,向量 $\boldsymbol{a}$ 在 y 轴上分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

方法技巧 向量线性运算及其坐标表示是向量运算的重要方法.

特别提醒 向量各个坐标与向量在坐标轴上投影的关系,以及与向量在坐标轴上分向量的关系,是求解此类题目的基础和关键.

第二节　数量积　向量积　*混合积

一　本节考试出题点

本节在考试中的出题点主要体现在以下方面:

1. 与数量积、向量积公式有关的运算.
2. 两向量垂直或平行的位置关系.
3. 向量积的几何应用.

二　教材内容全解

知识点 1　数量积(重点)

1. 数量积的计算公式

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,其中 θ 为两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角.

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

2. 数量积的运算规律

(1) 交换律:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

(3) 结合律:$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$,$\lambda$ 为数.