高等工程數學

習題詳解

1991 年 第 三 版

上 冊

P. V. 奧尼爾　原著
黃慶堂　黃慶怡　等譯著

曉園出版社
世界圖書出版公司

高等工程数学习题详解（上）第3版
P.V.奥尼尔　原著
黄庆堂、黄庆怡等　译著
*
晓园出版社出版
世界图书出版公司北京公司重印
北京朝阳门内大街137号
北京中西印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1994年11月第　一　版　　开本：711×1245　1/24
1994年11月第一次印刷　　印张：31.5
印数：0001—600　　字数：26万字
ISBN: 7-5062-1920-4/O·131
定价：39.60元　(WB9403/1)

前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精徵的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

O'Neil高等工程數學習題詳解

(上 冊 目 錄)

第〇章　緒　　論

下列各問題均描述一個物理過程，綜合一些經實驗證實的觀察，以及在某些情況下，將其簡化的假定。在例題1至5的內容中，導出一個支配著過程的微分方程式。在標示及定義一些變數，或對於導數每個基本步驟予以說明時，均需清楚交代。若有幫助，可利用繪圖來說明變數。

1. **牛頓冷却定律**。牛頓以實驗證明出，一物體的表面溫度藉物體溫度與其周遭介質（如空氣）的差，以正比的變率而改變。假設空氣溫度爲恒定。試依據牛頓定律，對於在空氣中冷却之物體溫度，寫出一微分方程式。

解　設物體表面溫度爲T，周遭空氣溫度爲C（常數）

由物理現象知，物體表面溫度變率$\left(\dfrac{dT}{dt}\right)$和物體表面溫度與周遭介質（空氣）之差（$T-C$）成正比，即

$$\frac{dT}{dt} \propto (T-C) \qquad \therefore\ \frac{dT}{dt} = -K(T-C)$$

K爲常數（通常前加一負號，以使在解微分方程時使K爲正值。）

2. **人口數模型**　假設在任何時間t，培養皿中細菌總數的變化率是以與細菌總數成比例的速率變化，寫出細菌數$P(t)$對任一時間t的微分方程。

解　設任一時間t時，細菌總數爲$P(t)$，由題意知細菌總數變化率

$\dfrac{d}{dt}P(t)$正比於細菌總數$P(t)$，即$\dfrac{d}{dt}P(t)\propto P(t)$，

$\therefore\ \dfrac{d}{dt}P(t)=KP(t)$，其中$K$爲某一常數。

3. **人口模式**。假設在任何時間t，美國的出生率和死亡率均爲該時刻人口的恒定倍數（不一定爲相同的常數）。假設移入及移出的人口爲零，試對時間t的人口寫出一微分方程式。

解　設在任一時間t時，人口爲$P(t)$

則由題意知，出生人口爲$A\cdot P(t)$

死亡人口爲$B\cdot P(t)$　A，B爲常數

$$\therefore\ \frac{dP(t)}{dt} = (A-B)P(t)$$

4. Boyle-Mariotte **氣體定律**。在恒溫及低壓 P 時，在壓力下，氣體體積 V 的改變率，與 $-V/P$ 成比例， 試對 V，以 P 的形式求一微分方程式，然後以積分解此方程式。

解 由題意知，氣體體積的變化率 $\dfrac{dV(p)}{dp}$ 和 $-\dfrac{V}{P}$ 成比例

$$\therefore \quad \frac{dV(p)}{dp} = -C\frac{V}{p} \qquad \therefore \quad \frac{dV}{V} = -C\frac{dp}{p}$$

積分上式 $\displaystyle\int\frac{dV}{V} = -C\int\frac{dP}{P}$

$$\therefore \quad \ln V = -C\ln P + K \qquad \therefore\ V = -AP^{-c}$$

（ A，K，C 為常數）

5. 有一質量 m 的球，由地球表面向上拋，作用於球上的力是重力引起的定加速度，以及正比於速度的空氣阻力。試對球的運動寫出一微分方程式。

解 球在運動過程中所受的力為

① 重力 $G = m \cdot g$

② 空氣阻力 $R = Kv(t)$

由牛頓第二運動定律 $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$ 知

$$m \cdot g + Kv(t) = m \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

6. 有一道光束朝下射入海洋中，當穿過海水時，有部份被吸收，其強度以正比於任何已知深度時強度的比率減少。以強度作為深度的函數，試寫出其微分方程式。

解 設深度 h 時之強度為 $I(h)$

由題意知 $\dfrac{dI(h)}{dh} = -CI(h)$（負號表減少）

7. 冰凍湖上冰的厚度，以正比於時間平方根的比率增加。在任何時間 t，試對厚度寫出一微分方程式。

解 設在時間 t 時，冰的厚度為 $h(t)$

由題意知 $\dfrac{dh(t)}{dt} \propto \sqrt{t}$

$$\therefore \quad \frac{dh(t)}{dt} = K\sqrt{t} \quad (K\text{為常數})$$

8. **子彈的速度**。有一重 1 盎斯的子彈由地表垂直向上發射。槍口速度是 1500 feet/second，作用在子彈上的力為(1)空氣阻力，此約為 $v^2/1000$（v 為速度），及(2)地心引力。忽略其他的力（如風），在時間 t 時，對

速度 $v(t)$ 求出一微分方程式。

解 今子彈所受之力爲：①空氣阻力—— $\dfrac{v^2(t)}{1000}$

②重力 ——— $m \cdot g = \dfrac{1}{16}$ 磅

由牛頓第二運動定律 $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$ 知〔設力往上↑爲（＋）〕

$$m \cdot \frac{dv(t)}{dt} = -mg - \frac{v^2(t)}{1000}$$

$$\therefore \frac{dv(t)}{dt} = -g - \frac{v^2(t)}{1000\,m} = -32 - \frac{64\,v^2(t)}{125}$$

9. **複利**。有一人以 6％的利息投資 \$ 4000 元，以連續複利計算。試對於此人在任何稍後的時間（假設沒有收回），於帳戶內將會有的數量寫出一微分方程式，以積分解此式。在什麼時間 t 時他將成爲一個百萬富翁？

解 設於時間 t 時之本利和爲 $A(t)$

由題意知 $\dfrac{dA(t)}{dt} = 0.06\,A(t)$

積分上式 $\displaystyle\int \frac{dA}{A} = \int (0.06)\,dt$

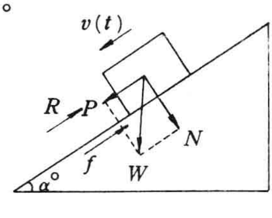
$\therefore \ln A = 0.06\,t + C \Rightarrow A = Ke^{0.06t}$

邊界條件 $t = 0$ 時 $A = 4000$ 代入 $\quad\therefore A = 4000\,e^{0.06t}$

如欲達到一百萬 $\Rightarrow 10^6 = 4000\,e^{0.06t}$

$\therefore t = 16.67 \ln(250) \doteqdot 92$ (year)

10. **斜面上的運動**。一個 50 磅的木塊，在一個與水平成 30° 角的斜面頂端由靜止釋放。空氣阻力爲 $v/2$，在此 v 爲速度，摩擦係數爲 0.34。因此作用於物體上的摩擦力爲 $0.34N$，其中 N 是由物體上的平面垂直於斜邊的作用力。假設物重、空氣阻力和摩擦力爲作用於木塊上的所有力，在時間 t 時，對其速度 $v(t)$，寫出一微分方程式。



解 木塊所受的力爲空氣阻力—— $R = \dfrac{1}{2}v(t)$

摩 擦 力—— $f = \mu N$

下 滑 力—— $P = W\sin\alpha$

由牛頓第二運動定律知 $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$ 知

$$P - f - R = \frac{W}{g} \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\therefore W\sin\alpha - \mu N - \frac{1}{2}v(t) = \frac{W}{g} \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

將數值代入（ $\alpha = 30^\circ$ ，$\mu = 0.34$ ，$W = 50$ ，$g = 32.2$ ，$N = 50\cos 30^\circ$ ）

$$\Rightarrow 25 - 14.72 - 0.5v(t) = 1.55\frac{dv(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow 10.28 - 0.5v(t) = 1.55\frac{dv(t)}{dt}$$

11. **水中鹽份的混合**。在起始時間 $t = 0$ ，S_0 磅的鹽溶於槽中 500 加侖的水內。在每個 $t > 0$ 的時間，2 磅／加侖的鹽以 6 加侖／分的速率倒入槽中。攪拌使鹽溶解，然後鹽水以 6 加侖／分的速率由開口抽出。在任何時間 $t > 0$ 時，對槽中鹽的數量寫出一微分方程式。用直接積分來解所得的微分方程式。利用此解，描述當 $t \to \infty$ 時，槽中鹽的數量會有何結果？

解 設鹽總重 W

由題意知，鹽以定速率 2 磅／加侖 × 6 加侖／分 = 12 磅／分 加入槽中

同理，溶液以定速率 6 加侖/分 抽出

$\therefore$ 鹽以 $\dfrac{W}{500}$ 磅／加侖 × 6 加侖／分 $= \dfrac{3}{250}W$ 磅／分由槽中取出

即 $\dfrac{dW}{dt} = 12 - \dfrac{3}{250}W = \dfrac{-3}{250}(W - 1000)$

$$\Rightarrow \frac{dW}{W - 1000} = \frac{-3}{250}dt$$

積分之 $\ln|W - 1000| = \dfrac{-3}{250}t + C' \quad \Rightarrow \quad W = 1000 + Ce^{\frac{-3}{250}t}$

B.C. $t = 0$ ，$W = S_0 \quad \therefore S_0 = 1000 + C \quad C = S_0 - 1000$

$$\therefore \quad W = 1000\left(1 - e^{\frac{-3}{250}t}\right) + S_0 \cdot e^{\frac{-3}{250}t}$$

當 $t \to \infty$ 時，$e^{\frac{-3}{250}t} \to 0 \qquad \therefore W \to 1000$

12. 質量 m 的物塊，通過一油性混合物中而落下，在其中所作用的力爲重力引起的加速度，及正比於 v 的阻力，此處 v 爲在時間 t 的速度。對 v 導出一微分方程式。

解 物塊所受的力爲 ①重力——$m \cdot g$ 　　g 爲重力加速度

②阻力——$K \cdot v(t)$ 　　K 爲常數

由牛頓第二運動定律 $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$ 知

$$-K \cdot v(t) + m \cdot g = m \cdot \frac{dv(t)}{dt} \quad \text{（往下爲正）}$$

$$\therefore \quad \frac{dv(t)}{dt} = \frac{-K}{m} \cdot v(t) + g$$

13. 有一球體，半徑R，質量m，掉入一稠密的油性物質內，在此液體中，作用在球體 t 的力爲(1)重力引起的加速度，(2)相當於由球體所排開油性物重量的浮力，及(3)由 $6\pi\mu Rv$ 所得的阻力，其中 v 是球體速度，μ 是油性物質的黏滯係數，爲一常數。對 v 求一微分方程式。

解　球體在稠密油性物質中所受的力爲

① 重力—— $G=m\cdot g$

② 浮力—— $B=g\cdot V\cdot\rho=\left(\dfrac{4}{3}\pi R^3\right)\cdot\rho\cdot g\cdots$（$\rho$ 爲油質之密度）

③ 阻力—— $P=6\pi\mu Rv(t)$

由牛頓第二運動定律 $\mathbf{F}=m\cdot\mathbf{a}$ 知

$$mg-6\pi\mu Rv(t)-\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\rho g=m\cdot\frac{dv(t)}{dt}$$

14. 有一木塊浮在水中，設此木塊上下浮動，故其頂端與底部均保持水平，而側邊爲垂直，試對其運動導出微分方程式。

解　設木塊靜止在水中，深度爲 h 時，所受的力爲

① 浮力—— $B=\rho_w abhg$

（ab 爲木塊之截面積，ρ_w 爲水的密度）

② 重力—— $G=m\cdot g$

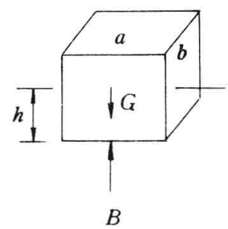
由阿基米德原理知，兩者達成平衡

$B=G \quad\Rightarrow\quad m=\rho_w abh$

若木塊再往下壓 y，則 $F=mg-\rho_w ab(h+y)g$

$$\Rightarrow\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-\rho_w g\,aby \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{g}{h}y$$

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{g}{h}y=0$$



15. 有一簡諧單擺，長度以 v 的穩定變率而增加，單位是英吋／分。在此，t 是時間，L_0 爲起始長度，且

$$x=\frac{L_0+vt}{v}$$

試導微分方程式

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{d\theta}{dx}+\frac{g}{v}\frac{1}{x}\theta=0$$

解　由右圖知切線方向的力爲 $mg\sin\theta$，切線方向的加速度爲 $\ell\ddot{\theta}+2\dot{\ell}\dot{\theta}$

其中 $2\dot{\ell}\dot{\theta}$ 爲科氏加速度，由於運動方向和角度增加方向相反

$\therefore\quad -mg\sin\theta=m(\ell\ddot{\theta}+2\dot{\ell}\dot{\theta})\cdots\cdots$①

$\because \dfrac{d\ell}{dt}=v \quad \therefore \ell=vt+C$ 代入 B.C. $\ell(0)=L_0 \Rightarrow \ell=vt+L_0$

$\because \quad x=\dfrac{L_0+vt}{v} \Rightarrow \ell=v\cdot x$ 且 $\dfrac{dx}{dt}=1$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{d\theta}{dx}$$

$\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\theta}{dx}\right)=\dfrac{d^2\theta}{dx^2}$ 代入①式，取 $\sin\theta\approx\theta$

$$\ddot{\theta}+2\frac{\dot{\ell}}{\ell}\dot{\theta}+\frac{g}{\ell}\theta=0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{\dot{\ell}}{\ell}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{\ell}\theta=0$$

$\because \dfrac{d\ell}{dt}=v$ ， $\ell=vx \Rightarrow \dfrac{d^2\theta}{dx^2}+\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{d\theta}{dx}+\dfrac{g}{v}\cdot\dfrac{1}{x}\theta=0$

第一章　一階微分方程式

1.0　緒　論

在 1 ～ 10 各題中，試求已知函數是否爲已知微分方程式的一解，C 恆表一常數。

1. $2yy'=1$ ； $\varphi=\sqrt{x-1}$

解　$y'=\left[(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]'=\dfrac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}$

$$\therefore 2yy'=2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-1}}=1$$

$\therefore y=\sqrt{x-1}$　爲其一解。

2. $y'+y=0$ ； $\varphi=Ce^{-x}$

解　$y=Ce^{-x}\ \Rightarrow\ y'=-Ce^{-x}$

$\therefore y'+y=-Ce^{-x}+Ce^{-x}=0$

$\therefore\ y=Ce^{-x}$ 爲其一解。

3. $y'=-\dfrac{2y+e^x}{2x}$ ，$x>0$; $\varphi=\dfrac{C-e^x}{2x}$ ，$x>0$

解　$y=\dfrac{C-e^x}{2x}$

$$y'=\frac{(-e^x)(2x)-(C-e^x)(2)}{4x^2}=\frac{-2xe^x-2C+2e^x}{4x^2}-\frac{2y+e^x}{2x}$$

$$=-\left(\frac{\frac{2C-2e^x}{2x}+e^x}{2x}\right)=\frac{-2xe^x-2C+2e^x}{4x^2}$$

$\therefore y=\dfrac{C-e^x}{2x}$ 爲 $y'=-\dfrac{2y+e^x}{2x}$ 之一解。

4. $y' = \dfrac{2xy}{2-x^2}$ ，$x \neq \pm\sqrt{2}$；$\varphi = \dfrac{C}{x^2-2}$，$x \neq \pm\sqrt{2}$

解 $y = \dfrac{C}{x^2-2} \Rightarrow y' = \dfrac{-2Cx}{(x^2-2)^2} = -\dfrac{(2x)\dfrac{C}{x^2-2}}{(x^2-2)} = \dfrac{2yx}{2-x^2}$

$\therefore\ y = \dfrac{C}{x^2-2}$ 爲其之一解。

5. $xy' = -y + x$；$\varphi = \dfrac{x^2-3}{2x}$，$x \neq 0$

解 $y = \dfrac{x^2-3}{2x} \Rightarrow y' = \dfrac{(2x)(2x)-2(x^2-3)}{(4x^2)} = \dfrac{2x^2+6}{4x^2}$

$x\left(\dfrac{2x^2+6}{4x^2}\right) + \dfrac{x^2-3}{2x} - x = \dfrac{x^2}{x} - x = 0$

$\therefore\ y = \dfrac{x^2-3}{2x}$ 爲其之一解。

6. $y' + y = 1$；$\varphi = 1 + Ce^{-x}$

解 $y' = 0 - Ce^{-x}$

$\therefore\ y' + y = -Ce^{-x} + 1 + Ce^{-x} = 1$

$\therefore\ y = 1 + Ce^{-x}$ 爲其一解。

7. $x^2yy' = -1 - xy^2$；$\varphi = \dfrac{4-x^2}{2x}$，$x \neq 0$

解 $y' = \dfrac{(-2x)2x - 2(4-x^2)}{(2x)^2} = \dfrac{-2x^2-8}{4x^2}$

$x^2yy' = x^2\left(\dfrac{4-x^2}{2x}\right)\left(\dfrac{-2x^2-8}{4x^2}\right) = \dfrac{x^4-16}{4x}$

$-1-xy^2 = -1 - \dfrac{16-8x^2+x^4}{4x} \neq \dfrac{x^4-16}{4x}$

$\therefore\ y = \dfrac{4-x^2}{2x}$ 不爲其解。

8. $y' + 2y = 0$；$\varphi = \sin(3x) - 4$

解 $y = \sin(3x) - 4 \Rightarrow y' = 3\cos(3x)$

$\therefore\ y' + 2y = 3\cos(3x) + 2\sin(3x) - 8 \neq 0$

$\therefore y = \sin(3x) - 4$ 不爲其解。

9. $\sinh(x)y' + y\cosh(x) = 0$ ； $\varphi = \dfrac{-1}{\sinh(x)}$

解 $y = \dfrac{-1}{\sinh(x)} \Rightarrow y' = \dfrac{\cosh(x)}{\sinh^2(x)}$

$$\therefore \sinh(x)y' + y\cosh(x)$$
$$= \sinh(x)\frac{\cosh(x)}{\sinh^2(x)} + \frac{-1}{\sinh(x)}\cosh(x) = 0$$

$\therefore y = \dfrac{-1}{\sinh(x)}$ 爲其一解。

10. $y' - 3y = x$ ； $\varphi = \dfrac{-x}{3} + \dfrac{1}{3} + Ce^{3x}$

解 $y' = -\dfrac{1}{3} + 3Ce^{3x}$

$$\therefore y' - 3y = -\frac{1}{3} + 3Ce^{3x} - 3\left(\frac{-x}{3} + \frac{1}{3} + Ce^{3x}\right)$$
$$= x - \frac{4}{3} \neq x$$

$\therefore y = \dfrac{-x}{3} + \dfrac{1}{3} + Ce^{3x}$ 不爲其解。

問題 11 到問題 15 中，證明隱函數爲微分方程式的解。

11. $y^2 + xy - 2x^2 - 3x - 2y = C$ ；
$(y - 4x - 3) + (x + 2y - 2)y' = 0$

解 原式對隱函數 x 微分，
得 $2yy' + y + xy' - 4x - 3 - 2y' = 0$
整理得 $(y - 4x - 3) + (x + 2y - 2)y' = 0$

12. $xy^3 - y = C$ ； $y^3 + (3xy^2 - 1)y' = 0$

解 原式對隱函數 x 微分，
得 $y^3 + 3xy^2y' - y' = 0$
整理得 $y^3 + (3xy^2 - 1)y' = 0$

13. 類似問題 11 的作法。

14.、15. 類似問題 12 的作法。

在問題16到19中，藉直接積分找出微分方程式的通解，使用相同座標軸，藉由不同參數選定畫出此通解的函數圖形，並找出滿足初始條件的特解，並畫出特解的圖形。

16. $y'=2x$ ； $y(2)=1$

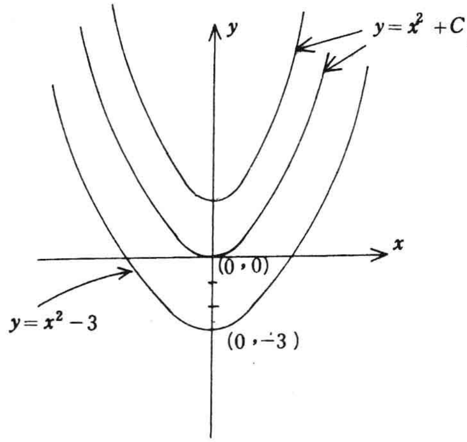
解 $\dfrac{dy}{dx}=2x$

通解爲： $y=x^2+C$

$y(2)=1$

$\therefore \quad C=-3$

特解爲： $y=x^2-3$



17. $y'=e^{-x}$ ； $y(0)=2$

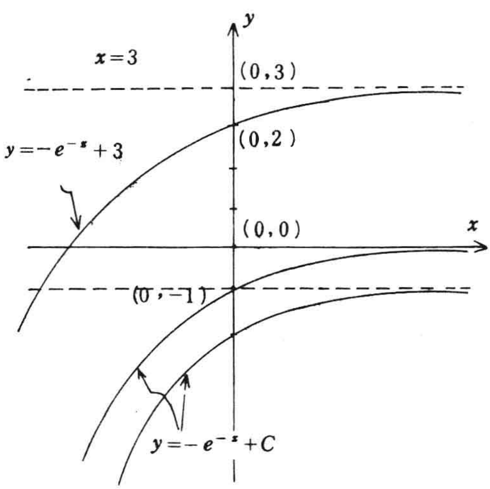
解 $\dfrac{dy}{dx}=e^{-x}$

通解爲： $y=-e^{-x}+c$

$y(0)=2$

$\therefore \quad C=3$

特解爲： $y=-e^{-x}+3$



18.、19. 參考問題16的作法。

1.1 可分離微分方程式

在習題1到16中，試求方程式是否爲可分離。若是，求其通解；若不是，可以不用再繼續算。並藉著代回微分方程式來驗算各解。

1. $\dfrac{y^2}{x}\dfrac{dy}{dx}=1+x^2$

解　$y^2dy=(x+x^3)dx$

$$\int y^2dy=\int(x+x^3)dx$$

$$\frac{y^3}{3}=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+C_1$$

通解爲　$y=\left(\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{3x^4}{4}+C\right)^{1/3}$

驗算：將通解代入原式

$$\frac{y^2}{x}\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{3x^4}{4}+C\right)^{2/3}}{x}\cdot\frac{d\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{3x}{4}+C\right)}{dx}=1+x^2$$

（通解無誤）

2. $y+x\dfrac{dy}{dx}=0$

解　$\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{dx}{x}\quad\Rightarrow ln\mid y\mid=-ln\mid x\mid+c$

$\Rightarrow$　通解爲 $y=\dfrac{c}{x}$

驗算：　$y+x\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{c}{x}+x\cdot\left(-\dfrac{c}{x^2}\right)=0$　　（通解無誤）

3. $\cos(y)\dfrac{dy}{dx}=\sin(x+y)$

解　（此爲不可分離之微分方程式）

4. $(2x+xy)\cdot\dfrac{dy}{dx}=1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}$

解　$\therefore(y+2)dy=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}\right)dx$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}y^2+2y=\ln|x|-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}+c'$$

$\Rightarrow \quad y^2+4y=2\ln|x|-\dfrac{8}{x}-\dfrac{4}{x^2}+c$ #　　經驗算後無誤

5.　$3\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x}{y^2}$

解　$3y^2dy=4x\ dx$

$\Rightarrow y^3=2x^2+c$

通解：　$y=\sqrt[3]{2x^2+c}$

驗算

$$3\frac{dy}{dx}-\frac{4x}{y^2}=3\cdot\frac{1}{3}(2x^2+c)^{-\frac{2}{3}}\cdot(4x)-\frac{4x}{(2x^2+c)^{2/3}}$$

$=0$（通解無誤）

6.　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x+1)^2-2y}{y}$

解　（此爲不可分離之微分方程式）

7.　$\dfrac{dy}{dx}+y=y[\sin(x)+1]$

解　$\dfrac{dy}{dx}=y\sin(x)$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{y}=\sin(x)\ dx$

$\Rightarrow \ln|y|=-\cos(x)+c$

$\Rightarrow y=ce^{-\cos(x)}$

驗算

$$\frac{dy}{dx}+y=c\sin(x)e^{-\cos(x)}+ce^{-\cos(x)}$$

$=ce^{-\cos(x)}[\sin(x)+1]$

$=y[\sin(x)+1]$（通解無誤）

8.　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x+xy^2}{2x+x^2y}$

解　（此爲不可分離之微分方程式）