GaoDengShuXue(2)
XianXing DaiShu Yu GaiLv TongJi

高等数学（二）

线性代数与概率统计

王守祯 雷孟京 主编

经济科学出版社
Economic Science Press

高等数学（二）

线性代数与概率统计

王守祯　雷孟京　主编

经济科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（二），线性代数与概率统计/王守祯，雷孟京主编．—北京：经济科学出版社，2011.12

ISBN 978 -7 -5141 -1255 -9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… ②雷… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材③概率论-高等学校-教材④数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①013②0151.2③021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 231763 号

责任编辑：王　丹
责任校对：杨晓莹
版式设计：代小卫
技术编辑：王世伟

高等数学（二）
线性代数与概率统计
王守祯　雷孟京　主编
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
总编部电话：88191217　发行部电话：88191540
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
北京欣舒印务有限公司印刷
三佳装订厂装订
787×1092　16 开　16 印张　300000 字
2011 年 12 月第 1 版　2011 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 978 -7 -5141 -1255 -9　定价：32.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　　言

高等数学（二）线性代数与概率统计是高等院校经济管理专业的基础课之一，它是在经济管理、质量控制、数量经济、信息论、预测理论和最优化理论中有着广泛应用的基础课程。

本书是为了适应继续教育经济管理类本科学生的实际需要而编写的。编者在总结多年教学实践经验的基础上，根据继续教育的特点，在编写中力求内容完整，做到重点突出、深入浅出、通俗易懂，既体现了学科上的系统性和科学性，又体现了教学上的灵活性和实用性。

本书由王守祯、雷孟京任主编，执笔人员为王守祯（第一章至第四章）、雷孟京（第五章至第九章）、付小芹（第十章），第一部分（第一章至第四章）由黄惠青审定，第二部分（第五章至第十章）由付小芹审定。

本书可以作为高等院校经济管理类相应课程的教材或参考书，也可以作为高等自学考试中高等数学（二）的自学参考书。

由于编者水平有限，书有难免存在缺点、错误，敬请读者和同行指正。

编　者

2011 年 12 月

目　录

第一部分　线性代数

第二部分 概率统计

第一部分

线性代数

第一章　行　列　式

行列式是研究线性方程组的一个重要工具，而线性方程组又是线性代数的一个重要部分．本章先介绍二、三阶行列式，再引出 n 阶行列式的概念，并给出 n 阶行列式的性质和计算方法，最后介绍解 n 元线性方程组的克莱姆法则．

§1.1　行列式的定义

一、二阶与三阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 x_1，x_2 为未知量；a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}为未知量的系数；b_1，b_2 为常数项．

解此方程组，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了便于记忆，引入符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.3}$$

称为二阶行列式，记为 D，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}称为二阶行列式的元素，这四个元素排成一个正方形，横排称为行，竖排称为列．二阶行列式有两行两列，每个元素 a_{ij}（i、$j=1$，2）的第一下标 i 表示元素所在的行，j 表示元素所在的列，右端称为二阶行列式的展开式，展开式共有2！项，每一项为取自不同行不同列两个元素的乘积．

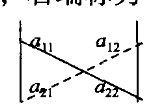

图 1－1

上述行列式，可用对角线法则来记忆，如图 1－1 所示．

按照(1.3)式的记号，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}$，

其中 D_i（i、$j=1$，2）表示把 D 中第 i 列换为方程组右边的常数项列元素所得到的

行列式，当方程组的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可用行列式表示出方程组（1.1）的解 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$.

例 1 解二元线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2=-2 \end{cases}$.

解 系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$，方程组有唯一解，又

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3,\ D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-5,$$

得方程组的解 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{3}{1}=3$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-5}{1}=-5$.

类似地利用加减消元法求解三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$ 的过程中，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.4}$$

称为三阶行列式，（1.4）式行列式，可用对角线法则来记忆，如图 1－2 所示.

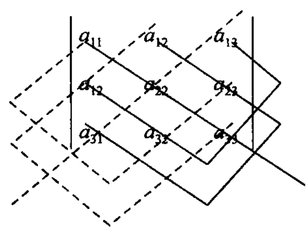

图 1－2

图 1－2 中每条实线的三个元素相乘取正号，每条虚线的三个元素相乘取负号，所得 6(3!) 项的代数和就是三阶行列式的值.

当方程组的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，方程组有唯一解 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}$，其中 $D_i(i、j=1, 2, 3)$ 表示把 D 中第 i 列替换为方程组右边的常数项列元素所得到的行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 2 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \end{vmatrix}$

解 $D=1\times5\times2+(-2)\times1\times6+4\times8\times3-4\times5\times6-(-2)\times3\times2-1\times8\times1=-22.$

例 3 解三元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=8 \\ x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1+2x_2+x_3=8 \end{cases}$.

解 系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$,

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2,\ D_2=\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix}=-4,\ D_3=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix}=-6,$$

得方程组的解 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=2$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=3.$

用对角线法则计算行列式，虽然直观，但是对于四阶及更高阶行列式，该方法就不适用了，为了给出 n 阶行列式的定义，先介绍排列及其逆序数的概念及性质.

二、排列与逆序数

定义 1.1 由 n 个数码 1，2，3，…，n 组成的一个没有重复数码的有序数组称为一个 n 级排列，记为 $i_1i_2\cdots i_n$.

例如，321、213 都是三级排列，2413 是一个 4 级排列.

这里的排列就是中学代数里所说的 n 个不同元素的全排列，因此由数码 1，

2，…，n 所组成的所有不同的 n 级排列共有 $n!$ 个．例如，由数码 1，2，3 所组成的所有不同的 3 级排列共有 $3!=6$ 个．它们是：123、132、231、213、312、321，在以上所有的 3 级排列中，除排列 123 是按从小到大顺序排列（称此排列为自然排列）以外，其余的排列中，都有较大的数码排在较小的数码前面．

定义 1.2　在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果有较大的数码 i_t 排在较小 i_s 的数码的前面（$i_t>i_s$），则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序，记作 i_ti_s；一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

如果排列的逆序数是奇数称为奇排列，是偶数则称为偶排列．规定逆序数为零的排列为偶排列．

例如，排列 4235617 的逆序数 $\tau(4235617)=7$，它是奇排列．

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列，这样的变换称为对换，相邻两个数的对换称为相邻对换．

定理 1.1　一次对换改变排列的奇偶性．(证略)

例如，排列 4235617 的逆序数为 7，它是奇排列，现将数 2 和 6 对换，则排列 4635217 的逆序数为 12，它是偶排列．

定理 1.2　在所有的 n 级排列中（$n\geqslant 2$），奇排列与偶排列的个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个．(证略)

例如，在 3 级排列中，123、231、312 是偶排列，132、213、321 是奇排列，奇排列与偶排列的个数相等，各为 3 个．

三、n 阶行列式

为了给出 n 阶行列式的定义，先用排列的概念分析三阶行列式的特点．考查三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

容易看出三阶行列式具备以下几个特点：

（1）三阶行列式是所有位于不同行、不同列的元素乘积的代数和，共有 $3!=6$ 项，且正项和负项的项数各为总项数的一半．

（2）在不考虑符号的情况下，三阶行列式三个元素的行下标按 1，2，3 自然排列，而每一项三个元素的列下标为 1，2，3 的一个三级排列，三阶行列式的每一项都可表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中 $j_1j_2j_3$ 为 1，2，3 的一个三级排列．

(3) 每一项的符号由其列标构成的排列的奇偶性来决定，若 $j_1j_2j_3$ 为偶排列，则该项的符号取正号；若 $j_1j_2j_3$ 为奇排列，则该项的符号取负号.

因此三阶行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

其中“$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$”表示对所有的三级排列求和，$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$表示三阶行列式展开式的一般项.

类似分析二阶行列式的特点，也有同样的规律. 下面按照这种方式可以给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.3　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i、j=1, 2, \cdots, n)$ 构成的一个数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 其中横排称为行，纵排称为列，a_{ij}称为第 i 行第 j 列上的元素. 它表示 $n!$ 项的代数和，每项都是取自行列式不同行不同列的 n 个元素的乘积，各项的符号是：当这一项中元素的行标为自然排列时，若列标构成的排列为偶排列则取正号，若列标构成的排列为奇排列则取负号. 所以 n 阶行列式中的一般项可写成

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1.5}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有的 n 级排列时，则得到 n 阶行列式所表示的代数和中所有的项. 因此 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1.6}$$

其中“$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$”表示对所有的 n 级排列求和.(1.6) 式称为 n 阶行列式按行自然排列的展开式.

当 $n=1$ 时，规定 $|a|=a$，即由一个元素 a 构成的一阶行列式就是元素 a 本身.

例 4　计算下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 根据行列式定义，n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，但由于该行列式中有许多元素为零，含零元素的项等于零，因此只需求出那些不等于零的项进行计算．而 D 的一般项（1.5）式中，只有当 $j_1=1$，$j_2=2$，…，$j_n=n$ 时，乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 才可能不为零．所以

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\ .$$

行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线．仿照例 1 可得，上三角形行列式与对角形行列式的值，均等于主对角线上所有元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\ .$$

由于数的乘法满足交换律，所以行列式的一般项中各元素的位置可以任意交换．因此有如下结论．

定理 1.3 n **阶行列式的一般项可以写成**

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}\ . \tag{1.7}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 及 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列．(证略)

推论 n 阶行列式的展开式又可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}\ . \tag{1.8}$$

（1.8）式称为行列式按列自然排列的展开式．

例 5 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 根据（1.8）式，行列式中的一般项只有当 $i_1=n$，$i_2=n-1$，…，$i_{n-1}=2$，$i_n=1$ 时才可能不等于零，所以

$$D=(-1)^{\tau(n\cdots 21)}a_1a_2\cdots a_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

习 题 1-1

1. 计算下列二阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$；（3）$\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$；（3）$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$；（4）$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

3. 求下列排列的逆序数，并确定其奇偶性：

（1）347812596；（2）473596218；（3）671298345；（4）$n(n-1)\cdots 321$.

4. 写出 4 阶行列式展开式中含有 $a_{13}a_{32}$ 的项.

5. 证明 $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^2$.

6. 用行列式的定义计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$；（3）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

§1.2 行列式的性质

利用行列式的定义计算较高阶的行列式，计算量是相当大的，因此为了简化行列式的计算，有必要研究行列式的性质.