Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学
名师名家
线性代数
辅导讲义

清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武
主编

由多次参加**命题及阅卷的专家**亲自编写，内容系统、权威

严格按照最新考试大纲，深入解读，突出重点，引领复习

赠送MP3盘

考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学名师名家线性代数辅导讲义

清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武 主编

由多次参加**命题及阅卷的专家**亲自编写，内容系统、权威

严格按照最新考试大纲，深入解读，突出重点，引领复习

赠送MP3盘 考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学名师名家线性代数辅导讲义 / 王欢,王德军,童武主编. —北京:中国石化出版社,2012. 2
ISBN 978-7-5114-1392-5

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①王… ②王… ③童… Ⅲ. ①线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 013177 号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街 58 号
邮编:100011　电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www. sinopec-press. com
E-mail:press@ sinopec. com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092 毫米 16 开本 10. 5 印张 264 千字
2012 年 3 月第 1 版　2012 年 3 月第 1 次印刷
定价:25. 00 元(赠送 MP3 盘)

前　　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制订的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选1000题(理工类)》、《考研数学最新精选1000题(经济类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(理工

类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(经济类)》、《考研数学必做主观题600题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题600题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下:

1. 配合最新考试大纲，反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上，力求反映最新考试要求，紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　录

第一章 行 列 式

§1 排列与逆序

本节的知识点大纲不要求掌握，这里作为补充知识.

重点与难点介绍

一、基本概念

定义(n 元排列) 把 n 个不同的自然数元素排成 i_1，$i_2\cdots i_n$ 叫做这 n 个元素的 n 元全排列(简称为 n 元排列).

n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示，$P_n=n\cdot(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$.

定义(逆序与逆序数) 在一个 n 元排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就构成了一个逆序，一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数，用 $\tau(i_1,\ i_2\cdots i_n)$或 τ 表示排列 i_1，i_2，…，i_n 逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换；将相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

二、重要定理及公式

定理 对换改变 n 元排列的奇偶性.

定理 任一 n 元排列与排列 $1\ 2\ 3\ \cdots\ n$ 可以经过一系列对换互变，并且所作对换的次数与这个 n 元排列有相同的奇偶性.

典型例题精解

例 求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性：

(1) $n(n-1)(n-2)\cdots3\ 2\ 1$；

(2) $(2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$.

【解析】 (1) $\tau=0+1+1+2+2+\cdots+(k-1)+(k-1)+k=(1+k-1)(k-1)+k=k^2$，故所求排列的奇偶性与 k^2 的奇偶性相同.

(2) $\tau=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$. 当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，τ 为偶数，所给排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，τ 为奇数，所给排列为奇排列.

§2 n 阶行列式

考试大纲要求

（1）了解行列式的概念，掌握行列式的性质.

（2）会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

考点、重点与难点介绍

一、基本概念

定义　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式或 n 阶方阵 $D=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式，简记做 $\det(a_{ij})$，数 a_{ij} 称为为行列 $\det(a_{ij})$ 的元素，它的值是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和. 它由 $n!$ 项组成，即

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是由 1，2，…，n 这 n 个数构成的一个 n 元排列，$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

定义　在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\xlongequal{\text{简记为}}|a_{ij}|$$

中把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去，由此得到的 $(n-1)$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记做 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a_{ij}的代数余子式记为$\boldsymbol{A}_{ij}$，$\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

注　若A为n阶矩阵，则n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式用$|\boldsymbol{A}|$表示.

二、重要定理与性质

1. 行列式按行(列)展开定理

定理　设$D=|a_{ij}|$为n阶行列式，则有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{kj}=a_{i1}\boldsymbol{A}_{k1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{k2}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{kn}=\begin{cases}D,\ i=k,\\0,\ i\neq k;\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{ik}=a_{1j}\boldsymbol{A}_{1k}+a_{2j}\boldsymbol{A}_{2k}+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{A}_{nk}=\begin{cases}D,\ j=k,\\0,\ j\neq k\end{cases}$$

2. 行列式的基本性质

性质1　行列式与它的转置行列式相等.

性质2　互换行列式的两行(列)，行列式变号.

推论　如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

性质3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数k，等于用数k乘此行列式.

推论　行列式中某一(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质4　行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

性质5　若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，如第i列的元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则D等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6　把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

注　(1) 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均匀为n阶矩阵，一般地，$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

（2）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均匀为 n 阶矩阵，一般地，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，但是

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}|$$

（3）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$，切记 $|k\boldsymbol{A}|\neq k|\boldsymbol{A}|$.

3. 行列式的重要公式与结论

（1）上(下)三角行列式等于其主对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$$

（2）$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

（3）设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

$$\begin{vmatrix} * & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

（4）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^T$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，用 $|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{A}^T|$ 表示对应 n 阶方阵的行列式，则有

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^T|$$

（5）设方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.

（6）$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$（$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵）.

（7）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，注意 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

（8）设 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

（9）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，则

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

但一般地 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

（10）范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j),$$

其中记号“Π”表示全体同类因子的乘积.

典型例题精解

1. 按行列式定义计算行列式

例1 （1）在四阶行列式中，取负号且包含因子a_{23}和a_{31}的项是________；

（2）设

$$f(x)=D=\begin{vmatrix}2x & 3 & 1 & 2\\ x & x & 0 & 1\\ 2 & 1 & x & 4\\ x & 2 & 1 & 4x\end{vmatrix},$$

则x^3项的系数________，x^4的系数________，常数项为________.

【答案】 （1）$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ （2）-14，8，-2

【解析】 （1）由行列式的定义可知，包含因子a_{23}和a_{31}的项必为$a_{1i}a_{23}a_{31}a_{4j}$，所以i，j定为2，4或4，2；又因为此项符号为负号，所以$i=4$，$j=2$，故答案为$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

（2）含有x^3的项是$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$和$-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$即$-12x^3$和$-2x^3$，故$x^3$的系数为$-14$；含有$x^4$的项是$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，即$8x^4$，故$x^4$的系数为8；常数项为$f(0)$，即

$$f(0)=\begin{vmatrix}0 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=-2$$

2. 利用行列式性质计算行列式

例2 设$\boldsymbol{A}$为三阶方阵，$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{A}_3$表示$\boldsymbol{A}$中三个列向量，则$|\boldsymbol{A}|=$________.

（A）$|\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|$ （B）$|\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_1|$

（C）$|-\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|$ （D）$|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3|$

【答案】 D

【解析】 由行列性质，用排除法

设$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3)$则$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|$由行列式性质$|\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|=-|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|$故(A)不对. $|-\boldsymbol{A}_1,-\boldsymbol{A}_2,-\boldsymbol{A}_3|=-|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|$

故(C)不对$|\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{A}_1|=2|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|$故(B)不对.

所以，此题正确答案应为D.

3. 三阶、四阶行列式的计算

例3 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}\alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma\\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma\\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1\end{vmatrix}$$

【解析】 为记号简便起见，本书用 r_i 表示第 i，c_j 表示第 j 列.

$$D\overset{\frac{r_1}{\alpha},\frac{r_2}{\beta},\frac{r_3}{\gamma}}{\underset{\frac{c_1}{\alpha},\frac{c_2}{\beta},\frac{c_3}{\gamma}}{=}}\alpha^2\beta^2\gamma^2\begin{vmatrix}1+\frac{1}{\alpha^2} & 1 & 1\\ 1 & 1+\frac{1}{\beta^2} & 1\\ 1 & 1 & 1+\frac{1}{\gamma^2}\end{vmatrix}$$

$$=\alpha^2\beta^2\gamma^2\left[\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{1}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\right)+1+1-1-\frac{1}{\beta^2}-1-\frac{1}{\alpha^2}-1-\frac{1}{\gamma^2}\right]$$

$$=\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{1}{\beta^2\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\right)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1.$$

例 4 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}$ 的值为________.

【答案】 -3

【解析】 将 2、3、4 列全加到第一列上得

$$\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&1&0\\3&1&0&1\\3&0&1&1\\3&1&1&1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&-1&0&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-3$$

例 5 设

$$F(x)=\begin{vmatrix}x-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14}\\ -a_{21} & x-a_{22} & -a_{23} & -a_{24}\\ -a_{31} & -a_{32} & x-a_{33} & -a_{34}\\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x-a_{44}\end{vmatrix},$$

求：(1)x^4 的系数；(2)x^3 的系数；(3)常数项.

【解析】(1) 含 x^4 的项必为$(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})$，可见 x^4 的系数为1.

(2) 含 x^3 的项为

$$-[a_{11}(x-a_{22})(x-a_{33})(x-a_{44})+a_{22}(x-a_{11})(x-a_{33})(x-a_{44})+$$
$$a_{33}(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{44})+a_{44}(x-a_{11})(x-a_{22})(x-a_{33})],$$

可见 x^3 的系数为 $-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$.

(3) 常数项即为 $x=0$ 时的 $F(x)$的值：

$$F(0)=\begin{vmatrix}-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14}\\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24}\\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34}\\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

例 6 求方程

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 3x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=0$$

的解.

【解析】 将$f(x)$按行列式性质计算:

$$f(x)\overset{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1\\c_4-c_1}}{=}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}\underline{\underline{c_4+c_2}}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=(-x)(-5x+5)=5x(x-1)$$

所以$f(x)=0$ 的解为 $x=0$ 或 $x=1$

4. *n* 阶行列式的计算

例 7 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

【解析】 由行列式性制质，有

$$D_n\ \underline{\underline{r_1+r_2+\cdots+r_n}}\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1}}{\underset{\substack{\cdots\cdots\\c_n-c_1}}{=}}[a+(n-1)b]\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

注 此种方法适用于各行(或列)各元素之和相等的行列式.

例 8 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & & b_{n-1} & \\ & & \ddots & & ⋰ & & \\ & & & a_1 \quad b_1 & & & \\ & & ⋰ & & \ddots & & \\ & c_{n-1} & & & & d_{n-1} & \\ c_n & & & & & & d_n \end{vmatrix}$$

【解析】 由行列式展开定理，有

$$D_{2n} \xlongequal{\text{按第一行展开}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & \\ 0 & & & & & & d_n \end{vmatrix}$$

$$+b_n(-1)^{1+2n} \begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & c_1 & d_1 & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_nd_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix} - b_nc_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (a_nd_n - b_nc_n)D_{2(n-1)}$$

于是

$$\begin{aligned} D_{2n} &= (a_nd_n - b_nc_n)D_{2(n-1)} = (a_nd_n - b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1})D_{2(n-2)} \\ &= \cdots = (a_nd_n - b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1})\cdots(a_1d_1 - b_1c_1) \end{aligned}$$

注　此题是通过运用行列式展开定理来求解的，并应用了类推法.

例 9　计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 4 & \cdots & 2^n \\ 3 & 9 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$$

【解析】 利用行列式性质得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix} = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$$

$$=(n!)\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$$
$$=(n!)(2-1)(3-1)\cdots(n-1)\cdot(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)]$$
$$=(n!)[(n-1)!][(n-2)!]\cdots(2!)(1!)$$
$$=(n!)[(n-1)!][(n-2)!]\cdots 2\cdot 1$$

注　本题关键的一步是：提取各行的公因子，变成范德蒙行列式

例 10　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1\\ n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

【解析】 D 中不为零的元素为 $a_{12}=1$，$a_{23}=2$，…，$a_{n-1,n}=n-1$，$a_{n1}=1$，故在 $n!$ 项中，非零项只有 $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=n!$，其列标排列 $2\ 3\ 4\cdots(n-1)1$ 的逆序数为 $n-1$. 因此

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1\\ n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n=(-1)^{n-1}n!$$

注　利用行列式定义计算（适用于行列式中有较多元素为零的情形）.

例 11　证明

$$D_n=\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\mathrm{ocs}\alpha\end{vmatrix}=\cos n\alpha$$

证　应用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，命题显然成立.

当 $n=2$ 时，有 $\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1\\ 1 & 2\cos\alpha\end{vmatrix}=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$. 命题亦成立.

设 $n-1$ 时，命题成立，即 $D_{n-1}=\cos(n-1)\alpha$

现考虑 D_n 的情形，将 D_n 按最后一列展开，则有

$$D_n=(-1)^{n+n}2\cos\alpha D_n=\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n-1+n}\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2\cos\alpha D_{n-1}+(-1)^{4n-3}D_{n-2}$$

$$=2\cos\alpha\cdot\cos(n-1)\alpha-\cos(n-2)\alpha=\cos n\alpha$$

5. 抽象行列式的计算

例 12　已知实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足条件：

(1) $a_{ij}=\boldsymbol{A}_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$，其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 是 a_{ij} 的代数余子式；

(2) $a_{11}\neq0$. 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$.

【解析】

因为 $a_{ij}=\boldsymbol{A}_{ij}$，即　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} \\ \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{A}_{32} & \boldsymbol{A}_{33} \end{bmatrix}=(\boldsymbol{A}^*)^T$，

亦即 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^*$. 由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，故　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

两边取行列式，得　$|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^T|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|^3$.

从而　$|\boldsymbol{A}|=1$ 或 $|\boldsymbol{A}|=0$.

由于 $a_{11}\neq0$，对 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 1 行展开，有

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}\boldsymbol{A}_{11}+a_{12}\boldsymbol{A}_{12}+a_{13}\boldsymbol{A}_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2>0.$$ 故必有 $|\boldsymbol{A}|=1$.

例 13　已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1，0，1，令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$________，$|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|=$________.

【答案】　应填 0 和 -2

【解析】

令 $f(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2+1$，则 $\boldsymbol{B}=f(\boldsymbol{A})$，所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为

$$f(-1)=(-1)^3-2(-1)^2+1=-2,\ f(0)=1,\ f(1)=0,$$

故

$$|\boldsymbol{B}|=(-2)\times1\times0=0$$

又 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 -1，2，1，故 $|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|=(-1)\times2\times1=-2$.

注　$\boldsymbol{A}$ 的特征值互异，所以 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$，利用这一结果也可以求行列式.

同步辅导与强化训练

一、填空题

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 的值为________.

2. 在四阶行列式，包含因子 a_{31} 的项是________.

3. 设 A 为四阶方阵，B 为三阶方阵，且 $|A|=2$，$|B|=-1$，则 $\|A|B|=$________，$\|B|A|=$________.

4. 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中，x^3 的系数是________.

5. 设 A 是 n 阶方阵，$|A|=5$，则 $\left|A^*-\left(\frac{1}{10}A\right)^{-1}\right|=$________.

6. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & x & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 x 的代数余子式是________.

二、选择题

1. 五阶行列式的展开式中共有(　　)项.

(A) 5^2　　(B) $5!$　　(C) 10　　(D) 15

2. 设 A 为三阶方阵，A_1，A_2，A_3 表示 A 中三个列向量，则 $|A|=$____________.

(A) $|A_3, A_2, A_1|$　　(B) $|A_1+A_2, A_2+A_3, A_3+A_1|$

(C) $|-A_1, A_2, A_3|$　　(D) $|A_1, A_1+A_2, A_1+A_2+A_3|$

3. 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix}=0$，则 $x=$(　　).

(A) -2　　(B) 2　　(C) -3　　(D) 3

4. 设 A，B 是 $n(n>2)$ 阶方阵，则必有(　　).

(A) $|A+B|=|A|+|B|$　　(B) $|AB|=|BA|$

(C) $||A|B|=||B|A|$　　(D) $|A-B|=|B-A|$

5. 排列 $2\ 4\ 6\cdots(2n)\ 1\ 3\ 5\cdots(2n-1)$ 的逆序数为(　　).

(A) n　　(B) 0　　(C) $\frac{n(n-1)}{2}$　　(D) $\frac{n(n+1)}{2}$

6. 设三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} \alpha \\ 2\gamma_2 \\ 3\gamma_3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$，其中 α，β，γ_2，γ_3 均为三维行向量，且已知行列式 $|A|=18$，$|B|=2$，则行列式 $|A-B|$ 等于(　　).

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

三、计算与证明题

1. 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

其中 $a_i\neq 0(i=1, 2, \cdots, n)$.