全国十二大考研辅导机构指定用书

2013 全国硕士研究生入学统一考试

高等数学（微积分）
辅导讲义

主　编　曹显兵　刘喜波

★ 概念方法贴近考生　★ 精心编制思考练习
★ 例题解析侧重实战　★ 破解考研难点疑点

海豚出版社
DOLPHIN BOOKS
中国国际出版集团

全国十二大考研辅导机构指定用书

2013全国硕士研究生入学统一考试

高等数学（微积分）辅导讲义

主　编　曹显兵　刘喜波

海豚出版社
DOLPHIN BOOKS
中国国际出版集团

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(微积分)辅导讲义 / 曹显兵，刘喜波主编. 一北京：
海豚出版社，2011.12
ISBN 978-7-5110-0700-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①曹… ②刘… Ⅲ.①微积分一研究生一入
学考试一自学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 256586 号

敬告读者

本书封面贴有专用防伪标识，凡有防伪标识的为正版图书，请读者注意识别。

书　　名：高等数学(微积分)辅导讲义
主　　编：曹显兵　刘喜波
责任编辑：董锋　徐婵媛
出　　版：海豚出版社
网　　址：http://www.dolphin-books.com.cn
地　　址：北京市百万庄大街 24 号
邮　　编：100037
电　　话：010-68997480(销售)
　　　　　010-68998879(总编室)
传　　真：010-68994018
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：17.25
字　　数：358 千字
版　　次：2012 年 3 月第 1 版
印　　次：2012 年 3 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5110-0700-1
定　　价：32.00 元

图书如有印装质量问题，请与印刷厂联系调换　　电话：(010)51906740

前 言

考研数学中，高等数学(或微积分，后面统称微积分)部分在数学一、三试卷中的分值为82分，占总分的55%；在数学二试卷中的分值为116分，占总分的77.3%。显然，考生复习好这门课程是取得考研数学成功的关键。

微积分课程一般安排在大学一年级、分两个学期开设。许多同学的感觉是这门课程虽然时间花了很多，但效果不理想，尤其是应对考试没有“底”。究其原因，作者认为主要有两个方面：一是微积分经历了几代数学家的精雕细刻和千锤百炼，其知识结构的系统性、逻辑性和连续性都非常强，如果前面的内容没有掌握好，一定会严重影响后续内容的学习，并最终影响整个课程的掌握；二是微积分的题型变化多样，解题技巧也丰富多彩，如果学习过程中不善于归纳总结解题思路和方法就很难达到举一反三，触类旁通的境界。作者主讲考研数学课程已有十多年，积累了比较丰富的教学经验与体会。本书正是根据作者这十多年来的辅导讲稿精心提炼、浓缩而写成的，目的是帮助考生进行归纳总结，大幅提高数学逻辑思维和综合运用所学知识解决问题的能力，花最少的时间达到最佳的复习效果，在较短时间内复习好微积分，最终取得优异成绩，实现自己的人生梦想。

本书共分十二章，对数学一、二、三的不同考试内容均作了明确的说明，适合于所有考生使用。每章由以下四部分构成：

一、考试要求与考试内容精讲

本部分给出最新考研大纲所规定的考试要求，并且对考试内容作了规范、精炼的描述与讲解，让考生一目了然，知道考什么、达到什么要求。

二、重要公式与结论

本部分针对每一章中的重点、难点以及需要进一步提高掌握的公式与结论进行了归纳总结。特别对一些重要的一般教材不明确给出而考研又要求的中间结论或者隐含条件进行了归纳总结，目的在于让考生站在更高的层次“看”考题，大幅提高考生分析问题和解决问题的能力。更好地把握考试的重点、难点，掌握解题的基本方法及基本技巧。

三、典型题型与例题分析

本部分力求用最少的篇幅来大幅提高考生的“实战”能力。一方面，作者通过精心选取或重新命制题目，使得本书所选例题更具代表性，考生更容易理解基本概念，掌握基本方法、基本原理；另一方面，借助于典型例题的评注以及每个题型后的小结，帮助考生更快地掌握解题思路和方法，全方位地提高应试能力和应试技巧，达到事半功倍的复习效果。

四、本章小结

本部分明确指出了这一章的重点所在，有利于考生提高复习效率，节省宝贵的复习时间。

在成书过程中，作者参考了众多著作和教材，由于篇幅所限不一一列出，在此谨向相关作者表示衷心感谢！

由于编者水平所限，书中一定还存在许多不足之处，敬请广大读者、同行专家批评指正。

最后，祝各位考研同学复习顺利，快乐考研，心想事成！

曹显兵　刘喜波

2012 年 3 月于北京

目　录

第一章　函数、极限与连续

■ 考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

第一节　函数

■ 考试内容精讲

一、函数、邻域的概念及表示法

1. **函数**　设 x 和 y 是两个变量（均在实数 $\mathbf{R}$ 内取值），D 是一个给定的非空数集，如果对于任意 $x \in D$，按照一定的法则，变量 y 总有一个确定的值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$，其中 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量，函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域. 函数表示法有：公式法、表格法、图形法等.

要注意函数定义中的两个要素：

(1) 定义域 D 表示 x 的取值范围.

(2) 对应法则 f 表示给定 x 值,求 y 值的方法.

因此:① 对于两个给定的函数,当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时,才能说它们是相同的函数,否则它们就是不同的函数. ② 求函数 f 的定义域,就是求使 y 的取值和运算有意义的自变量 x 的取值范围.

2. **邻域** 设 $\delta>0$,实数集合 $U(x_0,\delta)=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$ 称为点 x_0 的半径为 δ 的邻域.若不必指出邻域半径 δ 的大小,则简记为 $U(x_0)$,指 x_0 的某邻域,有时也简单说成在 x_0 的附近.实数集合 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 称为点 x_0 的半径为 δ 的去心邻域.读者可类似给出 x_0 的左、右邻域概念.

二、函数的性态 —— 有界性,单调性,周期性,奇偶性

1. **有界性** 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果存在正数 M,对于任意 $x\in I$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有界**;如果这样的 M 不存在,则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上**无界**.如果存在数 M_1,对于任意 $x\in I$,恒有 $f(x)\leqslant M_1$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有上界**;如果存在数 M_2,对于任意 $x\in I$,恒有 $f(x)\geqslant M_2$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有下界**.易知函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是它在 I 上既有上界又有下界.

几个常见的有界函数

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上,有

$$|\sin x|\leqslant 1,\ |\cos x|\leqslant 1,\ |\arctan x|<\frac{\pi}{2},\ |\operatorname{arccot} x|<\pi(\text{或 } 0<\operatorname{arccot} x<\pi).$$

在区间 $[-1,1]$ 上,有 $|\arcsin x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $|\arccos x|\leqslant\pi$(或 $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$).

注意:(1) 函数 $y=f(x)$ 有界或无界是相对于某个区间而言的,例如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界,但在区间 $[\dfrac{1}{8},1]$ 上是有界的.

(2) 区分无界函数和无穷大:在某一变化过程中,若 $f(x)$ 为无穷大,则存在对应的区间使 $f(x)$ 无界;但是若 $f(x)$ 在某个区间上无界,则 $f(x)$ 不一定为无穷大.例如 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界,但这函数不是 $x\to 0^+$ 时的无穷大.

(3) 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界,则 $f(x)$ 的导函数和原函数在区间 I 上不一定有界.例如 $y=\sqrt{x}$ 在 $[0,1]$ 上有界,但其导函数 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1]$ 上是无界的;$y=1+\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,但其原函数 $F(x)=x+\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是无界的.

2. **单调性** 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果对于任意 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(或单调减少).

3. **周期性**　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的常数 T，使得对于任一 $x \in D$，有 $x \pm T \in D$ 且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

4. **奇偶性**　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任意 $x \in D$，恒有 $f(-x) = f(x)$[或 $f(-x) = -f(x)$]，则称函数 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数). 偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称.

注意：(1) 若函数的定义域关于原点不对称，则此函数既不是奇函数，也不是偶函数.

(2) 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，则 $f(x)$ 一定可以表示成奇函数与偶函数的和. 事实上，$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$，式中前者为奇函数，后者为偶函数.

三、常见函数类型

1. **复合函数**　设 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$ 为两个函数，若 $u = \varphi(x)$ 的值域与 $y = f(u)$ 的定义域有非空交集，则由 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 可复合而成复合函数 $y = f[\varphi(x)]$，u 称为中间变量.

2. **反函数**　设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 若对 $\forall y \in W$，存在惟一确定的 $x \in D$，满足 $y = f(x)$，则得到 x 是 y 的函数，记为 $x = \varphi(y)$，称为 $y = f(x)$ 的反函数. 习惯上将 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

注意：(1) 单调函数存在反函数.

(2) 反函数 $y = f^{-1}(x)$ 与函数 $y = f(x)$ 有相同的单调性.

(3) 函数 $y = f(x)$ 的图象与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图象重合，但与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

3. **隐函数**　设有关系式 $F(x, y) = 0$，若对 $\forall x \in D$，存在惟一确定的 y 满足 $F(x, y) = 0$ 与 x 相对应，由此确定的 y 与 x 的函数关系 $y = y(x)$ 称为由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数.

4. **基本初等函数与初等函数**　幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，即 $y = x^a$；$y = a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$；$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$；$y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$，$y = \sec x$，$y = \csc x$；$y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$，$y = \operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数.

初等函数：由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合运算所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数. 另外，注意下面四个恒等式：

$a^{\log_a x} = x \ (x > 0)$，　　$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \ (|x| \leqslant 1)$，

$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$，　　$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} (x \neq 0)$.

5. **分段函数**　在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，称为分段函数.

注意：(1) 分段函数的复合，分段函数在分段点的极限，连续性，可导性以及分段函数的

不定积分与定积分都是考试的重点和难点,必须引起考生足够的重视.

(2) 分段函数一般不是初等函数.

6. **参数方程确定的函数** 由$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$确定的函数$y=f(x), a \leqslant x \leqslant b$.

7. **幂指函数** $y=u(x)^{v(x)}$,其中$u(x)>0$.

幂指函数的讨论常利用恒等式 $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$.

8. **积分上限的函数** $y=\int_a^x f(t)\,dt$.

四、几个基本不等式与命题逻辑类型

1. 基本不等式

(1) 对任意实数x,有$|x| \geqslant 0$,且$0 \leqslant |x|+x \leqslant 2|x|$,即$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

(2) 三角不等式:对任意实数x,y有

$0 \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|$, $\quad ||x|-|y|| \leqslant |x-y| \leqslant |x|+|y|$.

(3) 平均值不等式:对任意实数x,y有 $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$.

特别,若$x>0,y>0$,则 $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.

(4) 对$0<x<\dfrac{\pi}{2}$,有 $\sin x<x<\tan x$.

2. 命题逻辑类型

(1) 若A,则B.此时称A为B的充分条件,B为A的必要条件.

(2) 若B,则A.此时称为(1)的逆命题.

(3) 若A非,则B非.此时称为(1)的否命题.

(4) 若B非,则A非.此时称为(1)的逆否命题.

注意:(1)与(2)同时成立时,A与B互为充分必要条件;(1)与(4)构成等价命题;任何数学定义都构成充分必要条件.

■ 重要公式与结论

一、函数的奇偶性、周期性的有关结论

1. 有限个奇函数的代数和仍是奇函数;有限个偶函数的代数和仍是偶函数.

2. 奇数个奇函数的积是奇函数,偶数个奇函数的积是偶函数;有限个偶函数的积是偶函数;奇函数与偶函数的积是奇函数.

3. 两个奇函数的复合是奇函数;两个偶函数的复合是偶函数;一个奇函数与一个偶函数的复合是偶函数.

4. 若$f(x)$是可导的偶函数,则$f'(x)$为奇函数,且$f'(0)=0$;若$f(x)$是可导的奇函数,则$f'(x)$为偶函数.

5. 设$f(x)$连续,若$f(x)$为偶函数,则$\int_0^x f(t)\,dt$为奇函数;若$f(x)$为奇函数,则对任意的

a，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数.

6. 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的任意原函数，即 $F'(x)=f(x)$，则

$f(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow F(x)$ 为偶函数，　　$f(x)$ 为偶函数 $\overset{\Leftarrow}{\nRightarrow} F(x)$ 为奇函数.

7. 可导的周期函数的导函数仍为同周期函数.

8. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x,\quad \int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

9. 奇函数在其对称区间的两边单调性相同，凹凸性相反，拐点关于原点对称.

10. 偶函数在其对称区间的两边单调性相反，凹凸性相同，拐点关于 y 轴对称.

二、单调函数的导函数和原函数都不一定仍为单调函数

例如 $y=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加，而其导函数 $y'=1$ 与原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内都不单调.

■ 典型题型与例题分析

题型一　复合函数

【例 1.1】 已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，试求函数 $\varphi(x)$ 的定义域.

【详解】 由于 $1-x^2=f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)$，故 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$. 于是 $-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$，即 $0\leqslant x^2\leqslant 2$. 所以函数 $\varphi(x)$ 的定义域为 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

【例 1.2】 设 $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 0, & |x|>2,\end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

【详解】 $f(f(x))=\begin{cases}4-f^2(x), & |f(x)|\leqslant 2,\\ 0, & |f(x)|>2.\end{cases}$

进一步，由下列不等式确定 x 取值范围，从而可得 $f(x)$ 的表达式，再代入上面式子：

(1) 由 $|f(x)|\leqslant 2$ 有 $\begin{cases}|4-x^2|\leqslant 2,\\ |x|\leqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|0|\leqslant 2,\\ |x|>2.\end{cases}$ 即 $\sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant 2$ 或 $|x|>2$.

(2) 由 $|f(x)|>2$ 有 $\begin{cases}|4-x^2|>2,\\ |x|\leqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|0|>2,\\ |x|>2.\end{cases}$ 即 $|x|<\sqrt{2}$.

故
$$f(f(x))=\begin{cases}4, & |x|>2,\\ 4-(4-x^2)^2, & \sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant 2,\\ 0, & |x|<\sqrt{2}.\end{cases}$$

【例 1.3】 设 $f(\tan x)=\tan x+\sin 2x$，其中 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$，求 $f(\cot x)$.

【分析】 先求出 $f(x)$ 的表达式，再求 $f(\cot x)$.

【详解】 因为　$f(\tan x)=\tan x+\sin 2x=\tan x+2\sin x\cos x$

$$= \tan x + 2\tan x \cdot \cos^2 x = \tan x + 2\tan x \cdot \frac{1}{\sec^2 x}$$

$$= \tan x + \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x},$$

所以 $$f(x) = x + \frac{2x}{1+x^2},$$

于是 $$f(\cot x) = \cot x + \frac{2\cot x}{1+\cot^2 x} = \cot x + \sin 2x.$$

【小结】 函数的复合,包括分段函数的复合,本质上是函数关系的建立问题,而建立函数关系是进一步研究函数性质的基础.

1. 假设有关系式 $f(g(x)) = \varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$ 的表达式已知,有两种情况:

(1) 已知 f,求 g. 这相当于求反函数 $g(x) = f^{-1}(\varphi(x))$;

(2) 已知 g,求 f. 一般作变量代换 $g(x) = u \Rightarrow x = g^{-1}(u)$,于是有 $f(u) = \varphi(g^{-1}(u))$,再根据函数关系与变量字母无关,得 $f(x) = \varphi(g^{-1}(x))$.

2. 求函数的定义域时注意:

(1) 分式中分母不能为零;

(2) 根式中负数不能开偶次方根;

(3) 对数函数中,底数要大于零不等于1,真数要大于零;

(4) 正切函数 $\tan x$,正割函数 $\sec x$,$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$,余切函数 $\cot x$,余割函数 $\csc x$,$x \neq k\pi$,k 为整数;

(5) 反正弦函数和反余弦函数 $\arcsin x$,$\arccos x$,$-1 \leqslant x \leqslant 1$.

3. 求复合函数 $f(g(x))$ 的表达式. 先由外层函数 f 写出复合函数的表达式,同时写出内层函数 g,即中间变量的取值范围. 然后按内层函数 $g(x)$ 的取值范围确定自变量 x 的取值范围和复合函数 $f(g(x))$ 的表达式.

题型二　函数特性

【例 1.4】 判别下列函数的奇偶性:

(1) Dirichlet 函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$

(2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

(3) $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$,其中 a 为常数,$f(x)$ 为可积的奇函数.

【详解】 (1) 因为 $D(-x) = D(x)$,故 $D(x)$ 为偶函数.

(2) 因为 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = \ln \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$= -\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = -f(x).$$

故 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.