第 1 章　线性规划基础

人们在生产和经营活动中，常常会遇到如何运用现有资源如人力、资金、原材料等，安排生产和经营活动，使产值最大或利润最高的问题;或者，对于给定的任务，如何统筹安排，以便用最少的资源消耗去完成. 对于这种在生产、经营活动中从计划与组织角度提出的最大或最小目标问题的研究，构成了运筹学的一个重要组成部分——数学规划论. 线性规划则是规划论中发展最早、理论比较成熟、应用最为广泛的重要分支.

早在 1939 年，苏联数学家康特洛维奇研究了运输和下料问题，编著了《生产组织与计划中的数学方法》一书. 尔后，Dantzing 和 Kuhu 等数学家提出了求解线性规划的单纯形法和对偶理论，使线性规划的理论和计算方法日趋完善成熟. 随着电子计算机的普及与广泛应用，线性规划在工业、商业、交通运输业、军事、建筑等行业的计划、管理及决策分析中得到了广泛深入的应用，并取得了良好的效果. 目前，线性规划正以它理论与实践并茂的特点成为工程技术人员、管理人员和经济工作者的最佳管理技术和决策工具.

本章重点介绍线性规划问题及其特点，线性规划数学模型及其标准型等基础知识.

1.1　线性规划问题及其数学模型

例 1.1　某工厂生产 A, B 两种产品，都需使用铜和铝两种金属材料，有关资料如表1 - 1所示. 问如何确定 A, B 产品的产量，使工厂获取的总利润最大?

表 1 - 1

原材料	A 产品单耗	B 产品单耗	可供材料数
铜(t)	2	1	40
铝(t)	1	3	30
单位产品利润(万元)	3	4	

解　将上述问题用数学语言描述:设 x_1 和 x_2 分别表示 A 和 B 的产量. 因为一个 A 产品消耗 2 t 铜,一个 B 产品消耗 1 t 铜,生产 x_1 和 x_2 个 A,B 产品共消耗 $(2x_1 + x_2)$ t 铜,所消耗的铜不能超过可供数量,即可用不等式表示为

$$2x_1 + x_2 \leqslant 40$$

对铝材的消耗得出如下不等式

$$x_1+3x_2\leqslant 30$$

若用 Z 表示工厂总利润，可知

$$Z=3x_1+4x_2$$

综合上述，将题意归纳为满足条件

$$\begin{cases}2x_1+x_2\leqslant 40\\x_1+3x_2\leqslant 30\\x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}\tag{1-1}$$

使得 $Z=3x_1+4x_2$ 达到最大.

我们称上述数学模型中式(1-1)为约束条件，而称 $Z=3x_1+4x_2$ 为目标函数.

例 1.2 甲、乙两地分别有货物 80 t 和 100 t，要运送到 a,b,c 三个地方，数量分别是 70 t，60 t 和 50 t，它们之间的距离(km)如表 1-2. 现在要制订出最佳运输方案，使总的吨公里达到最小.

表 1-2

收点 / 距离(km) / 发点	a	b	c	发货量(t)
甲	5	4	8	80
乙	8	6	2	100
收货量(t)	70	60	50	

解 设第 i 个发点送到第 j 个收点的货物吨数为 x_{ij}($i=$ 甲，乙；$j=a,b,c$)，根据所给资料和要求，建立线性规划模型如下：

$$x_{甲a}+x_{甲b}+x_{甲c}=80$$
$$x_{乙a}+x_{乙b}+x_{乙c}=100$$
$$x_{甲a}+x_{乙a}=70$$
$$x_{甲b}+x_{乙b}=60$$
$$x_{甲c}+x_{乙c}=50$$
$$x_{ij}\geqslant 0(i=甲,乙;j=a,b,c)$$

使 $\min S=5x_{甲a}+4x_{甲b}+8x_{甲c}+8x_{乙a}+6x_{乙b}+2x_{乙c}$

其中，总发量(180 t)应等于总的收量(180 t).

上述两例描述的问题就是线性规划问题，线性规划问题的数学模型就是线性规划模型.

从数学上看，所有线性规划问题都具有以下共同特征：

(1)每一问题都可以用一组变量($x_1, x_2, \cdots, x_n$)表示某一方案. 一般情形下,变量的取值是非负的.

(2)约束条件用线性等式或线性不等式表示.

(3)都有一个目标函数,且这个目标函数可表示为一组变量的线性函数.

(4)每一问题要求目标函数实现最大化(max)或者最小化(min).

由于问题的性质不同,线性规划模型也有不同的形式. 一般地,总可以描述为:

$$\max/\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \\ x_j \geqslant 0 (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

为方便,称 $c_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 为目标系数或价值系数,$a_{ij} (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 为消耗系数或技术系数,$b_j (i = 1, 2, \cdots, m)$ 为资源系数.

1.2　线性规划模型的标准型及其转化

线性规划模型中约束条件出现了三种形式(≤, =, ≥),目标函数存在两种形式(max,min). 这种多样性对讨论问题带来不便. 因此规定了线性规划模型的标准型:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \\ b_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \end{cases}$$

建立标准型的好处在于: 我们可以只针对这种标准形式来研究它的求解方法。至于其他条件形式的线性规划问题, 我们可以先将非标准型变成标准型, 然后再用标准型的求解方法求解.

通常, 线性规划模型的标准型还可以表述为以下形式.

(1)缩写形式

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i (i = 1, 2, 3, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, 3, \cdots, n) \end{cases}$$

其中 $b_i \geqslant 0$,若有 $b_i < 0$ 时,等式左右两端乘 -1,使 b_i 满足 $b_i \geqslant 0$.

(2) 向量形式

$$\max Z = \boldsymbol{CX}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b} \\ x_j \geqslant 0 (j = 1,2,3,\cdots,n) \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{C} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$.

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \boldsymbol{P}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

(3)矩阵形式

$$\max Z = \boldsymbol{CX}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_n)$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为资源约束方程组的系数矩阵($m \times n$ 阶). 在一般情况下 $m < n$, 即约束等式的个数少于变量数.

线性规划的求解需要借助标准型来实现,而具体问题的线性规划模型一般都不是标准型. 因此需要将非标准型转化为标准型.

下面介绍将非标准型模型转化为标准型模型的方法.

(1)若目标函数 $\min Z = \boldsymbol{CX}$,可令 $Z = -Z'$,使 $\max Z' = -\boldsymbol{CX}$. 亦即在原目标函数式 $\boldsymbol{CX}$ 中的各项上乘 -1.

(2)约束不等式的转化.

①约束条件不等式为"$\leqslant$"时. 在不等式左边加上一个松弛变量,将不等式变为等式方程. 松弛变量的经济意义是没有被利用的资源.

②约束条件不等式为"$\geqslant$"时, 如果在不等式左边减去一个剩余变量,则不等式的约束条件变为等式约束方程.

有时将松弛变量和剩余变量统称为附加变量或虚变量, 附加变量对目标函数不产生影响,故在目标函数中,附加变量的目标系数为零.

③在非标准模型中存在无非负要求的变量，如 x_k 无论取正值或负值时都可以，这时令 $x_k = x'_k - x''_k$，其中 $x'_k \geqslant 0, x''_k \geqslant 0$，由 x'_k 和 x''_k 的大小决定 x_k 的正负.

可见任何形式的线性规划模型都可以转化为标准型. 现用例 1.3 作综合说明.

例 1.3　将下列线性规划模型化为标准型.

$$\min S = 6x_1 - 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leqslant 60 \\ 4x_1 + 3x_2 + 9x_3 \geqslant 80 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 70 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 (x_3 \text{为自由变量}) \end{cases}$$

解　先将自由变量 x_3 变为 $x_3 = x'_3 - x''_3, x'_3 \geqslant 0, x''_3 \geqslant 0$. 再引入松弛变量 x_4 和剩余变量 x_5，得

$$\max Z = -6x_1 + 4x_2 - 3x'_3 + 3x''_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 7x'_3 - 7x''_3 + x_4 = 60 \\ 4x_1 + 3x_2 + 9x'_3 - 9x''_3 - x_5 = 80 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x'_3 - 5x''_3 = 70 \\ x_1, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.3　线性规划问题解的概念

将非标准的线性规划问题化为标准的线性规划问题后，我们讨论线性规划问题解的概念.

给出线规划问题的标准型为

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \tag{1-2}$$

$$\boldsymbol{X} \geqslant 0 \tag{1-3}$$

$$\max Z = \boldsymbol{CX} \tag{1-4}$$

则线性规划问题的解有以下基本概念.

1.3.1　可行解

满足上述模型中式(1-2)和(1-3)的解称为线性规划问题的可行解.

1.3.2　最优解

满足式(1-4)的可行解称为最优解.

1.3.3　基

设 $\boldsymbol{A}$ 是约束方程组 $m \times n$ 系数矩阵，其秩为 m，若 $\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中 $m \times m$ 阶非奇异子矩阵（即可逆矩阵，$|\boldsymbol{B}| \neq 0$），则称 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基. $\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 中 m 个线性无关的系数列向量组成的. 一般地，可设

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}=[\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_m]$$

称 $\boldsymbol{B}$ 中的一列 $\boldsymbol{P}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为基向量，与 $\boldsymbol{P}_j$ 对应的变量 $x_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为基变量. $\boldsymbol{B}$ 中共有 m 个基变量，而称在 $\boldsymbol{A}$ 之内 $\boldsymbol{B}$ 之外的列向量为非基向量，与非基向量对应的变量称作非基变量. $\boldsymbol{A}$ 中有 $n-m$ 个非基变量（设 $m<n$）.

1.3.4 基本解

设非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，用高斯消元法可以得到一组解

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

这个解的非零分量的个数不大于 m，则称 $\boldsymbol{X}$ 为基本解.

1.3.5 基本可行解

满足式(1-3)的基本解称作基本可行解. 其个数也不大于 m.

1.3.6 退化基本解

非零分量的个数小于 m 的基本解即是退化基本解. 在一般情况下假设不出现退化. 了解线性规划解的基本概念是十分必要的，它将有助于掌握线性规划的求解过程.

1.4 线性规划的图解法

图解法只适用于求解两个变量的线性规划问题，它不是线性规划问题的通用算法. 我们介绍图解法的目的在于能更直观地了解线性规划的算法思想和求解步骤，有助于加深将要在第 2 章介绍的线性规划的通用算法——单纯形法的理解. 下面用实例说明图解法的步骤.

例 1.4 给定两个变量的线性规划模型如下：

$$\max Z=10x_1+8x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2\leqslant 120 \\ x_1\leqslant 30 \\ x_2\leqslant 45 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

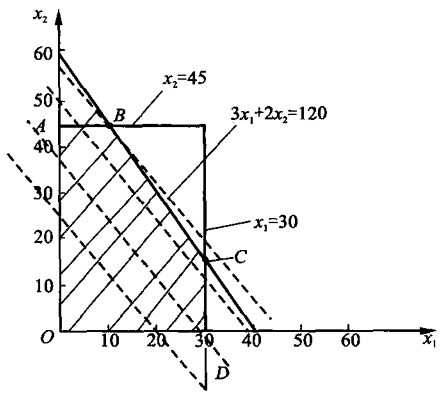

图 1-1

解 先满足非负条件 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$. 将 x_1,x_2 画入直角坐标系中第一象限，横坐标表示 x_1 的取值，纵坐标表示 x_2 的取值. 再将其他约束不等式化为等式（不加附加变量）. 对于 $3x_1+2x_2=120$，取 $x=0$ 时，$x_2=60$；取 $x_2=0$ 时，$x_1=40$，用直线连接(0,60)点和(40,0)点. 类似地，在平面中铺画 $x_1=30$ 和 $x_2=45$ 的直线，得图 1-1.

可见，三条约束直线左下方（包括直线本身）和两条坐标轴围成的多边形是线性规划解的集合，称它为可行域. 可行域中的每一点（包括边界点）是线性规划的可行解. 易知，可行解有无限个.

再分析目标函数 $\max Z = 10x_1 + 8x_2$. 在坐标平面上，它可表示以 Z 为参数，$-\frac{5}{4}$ 为斜率的一簇平行线

$$x_2 = \frac{Z}{8} - \frac{5}{4}x_1$$

位于同一直线上的点具有相同的目标函数值. 当 x_1 和 x_2 的取值增大时，直线 $x_2 = \frac{Z}{8} - \frac{5}{4}x_1$ 沿法线方向向右上方移动，当移至 B 点时，不能再向右上方移动了，否则超过可行域的范围. 这时在顶点 B 上实现了目标最大化，即得到了问题的最优解：$x_1 = 10, x_2 = 45, Z^* = 460$.

上例中问题的最优解只有一个，是唯一最优解. 但在某些情形下还可能出现以下求解结果：

（1）无穷多组最优解（多重解）. 将例 1.4 的目标函数变为 $\max Z = 3x_1 + 2x_2$，则 Z 为参数，$-\frac{3}{2}$ 为斜率的目标函数的平行线与约束条件 $3x_1 + 2x_2 = 120$ 直线平行. 当 Z 值逐渐增大而向右上方移动时必与 BC 线段重合，BC 线段上的任一点都使 Z 取得相同的最大值，见图 1－2. 显然问题有无穷多组最优解.

（2）无界解.

例 1.5 对下述线性规划问题

$$\max Z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

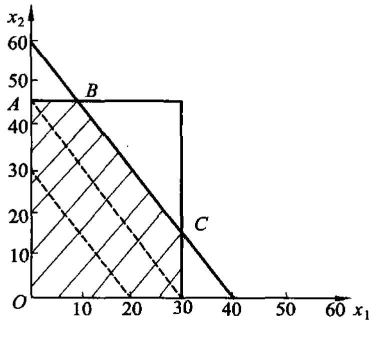

图 1－2

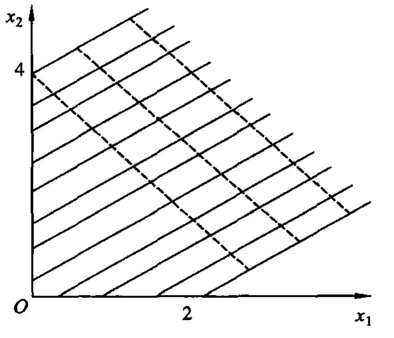

图 1－3

用图解法,其结果如图 1 - 3 所示. 从图中可见此问题的可行域无界,目标函数可以增加到无穷大. 这种情况的解为无界解. 出现无界解时则线性规划无最优解. 以上三种情形(唯一最优解、多得解和无界解)线性规性问题有可行解;有时线性规划问题的可行域为空集,如将例 1.5 的约束条件变为: $\begin{cases} -2x_1+x_2 \geqslant 4 \\ x_1-x_2 \geqslant 2 \\ x_1,x_2 \geqslant 0 \end{cases}$. 目标函数不变. 如图 1 - 4.

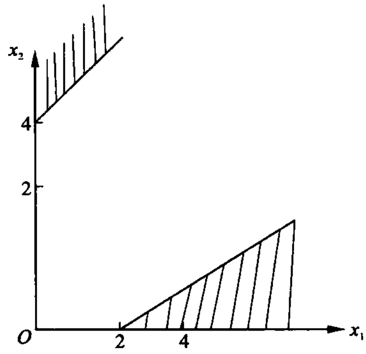

图 1 - 4

从而没有可行解,即该线性规划问题无最优解.

综上所述,线性规划问题解的情况:

(1)从目标函数来看:

- 有最优解(唯一最优解和多重最优解)
- 无最优解(简称无解).(无界解和无可行解)

(2)从约束条件(可行域)来看:

- 有可行解(有唯一最优解、有无穷多最优解和无界解)
- 无可行解.

图解法虽然直观简便,但当变量在三个以上时在图上无法实现求解过程. 因此对于一般线性规划来说,图解法没有实用价值. 但图解法的求解过程给我们以重要启示,即:①线性规划的最优解一定在可行域的顶点上达到;②可行域中顶点的转移实现了数学的迭代,顶点的转移使目标函数值上升或下降. 这正是求解一般线性规划的通用方法——单纯形法的基本原理和算法思想.

习 题

一、思考讨论题

1.1 试述线性规划数学模型的结构及各要素的特征.

1.2 求解线性规划问题时可能出现哪几种结果?哪些结果反映建模时有错误?

1.3 什么是线性规划问题的标准形式?如何将一个非标准型的线性规划问题转化为标准形式?

1.4 试述线性规划问题的可行解、基本解、基本可行解、最优解的概念以及它们之间的相互关系.

1.5 试述线性规划问题图解法的局限性与意义.

二、应用分析题

1.6 将下列线性规划问题化为标准型.

(1) $\min S = -5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leqslant 14 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 \geqslant 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\max Z = x_1 - 4x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 6 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = -2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.7 用图解法求解下列线性规划问题,并指出各问题解的特征.

(1)

$$\min S = 6x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ 3x_1 + 4x_2 \geqslant 1.5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2)

$$\max Z = 4x_1 + 8x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ -x_1 + x_2 \geqslant 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(3)

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 \geqslant 24 \\ 4x_1 + 6x_2 \geqslant -12 \\ 2x_2 \geqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(4)

$$\max Z = 3x_1 + 9x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 22 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_2 \leqslant 6 \\ 2x_1 - 5x_2 \leqslant 0 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.8 用图解法解下列线性规划问题,并指出所有的基本可行解及相应的目标函数值.

(1)

$$\min S = 3x_1 + 7x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geqslant 10 \\ 3x_1 + x_2 \geqslant 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2)

$$\max Z = 5x_1 - 3x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leqslant 16 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

第2章 单纯形法

单纯形法是美国数学家 G. B. Dantzig 在 1947 年提出的求解线性规划问题的有效算法，至今仍被普遍使用. 单纯形法的算法思想是：根据线性规划模型的标准型，从可行域中的一个基本可行解（一个顶点）开始，转换到另一个基本可行解（顶点），且使目标函数的值逐步增大；当目标函数达到最大时，则问题得到了最优解.

本章首先从理论上说明线性规划单纯形法的最优解的几何意义，然后从经济上解释单纯形法的原理和方法，尔后重点介绍单纯形法的解题步骤及其扩展方法. 本章内容是第 3 ~ 7 章的基础，必须牢固掌握和熟练运用.

2.1 线性规划问题的几何意义

2.1.1 凸集和顶点

（1）凸集. 所谓凸集，从直观上讲是指没有凹入部分、没有空洞的实心集合体. 如图2-1中的（a），（b），（c）是凸集，（d）不是凸集，（e）中非阴影部分是凸集. 任何两个凸集的交集是凸集.

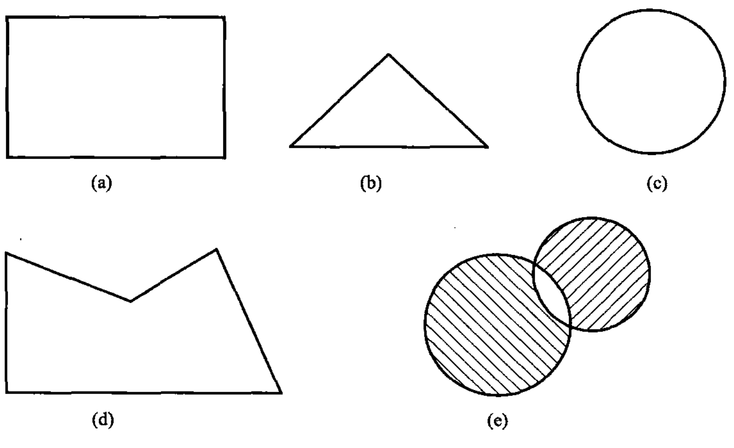

图2-1

从图中可以看出，凸集具有一个明显的特征，即在凸集上任意取两点，连接这两点的线段上的所有点都在这个点集之中.

将凸集的定义推广到多维空间，即可表述为：设 K 是 n 维空间的一点集，若任

意两点 $\boldsymbol{X}^{(1)}\in K,X^{(2)}\in K$ 的连线上的一切点 $aX^{(1)}+(1-a)X^{(2)}\in K(0\leqslant a\leqslant 1)$，则称 K 为凸集.

(2)顶点. 设 K 是凸集，$X\in K$；若 X 不能用不同的两点 $X^{(1)}\in K,X^{(2)}\in K$ 的线性组合表示为 $X=aX^{(1)}+(1-a)X^{(2)}(0<a<1)$，则称 X 为凸集 K 的一个顶点(或极点). 如三角形、四边形等平面的顶点，长方体的顶点都是相应凸集的顶点.

2.1.2 基本定理

定理 2.1 若线性规划问题存在可行域，则其可行域

$$D=\{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}\geqslant 0\}\text{ 是凸集.}$$

证 为了证明满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}\geqslant 0$ 的所有点(可行解)组成的集合是凸集，只要证明 D 中任意两点 $X^{(1)},X^{(2)}$ 的连线上的点满足线性规划的约束条件，即在点集 D 内即可.

若 $\boldsymbol{X}^{(1)}\in \boldsymbol{D},\boldsymbol{X}^{(2)}\in D$，即

$$\boldsymbol{AX}^{(1)}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}^{(1)}\geqslant 0$$
$$\boldsymbol{AX}^{(2)}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}^{(2)}\geqslant 0$$

必有

(1)$\boldsymbol{A}[a\boldsymbol{X}^{(1)}+(1-\boldsymbol{a})\boldsymbol{X}^{(2)}]=a\boldsymbol{AX}^{(1)}+(1-a)\boldsymbol{AX}^{(2)}=a\boldsymbol{b}+(1-a)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(0\leqslant a\leqslant 1)$；

(2)$a\boldsymbol{X}^{(1)}+(1-a)\boldsymbol{X}^{(2)}\geqslant 0(0\leqslant a\leqslant 1)$. 因 $X^{(1)},X^{(2)},a,(1-a)$ 都满足 $\geqslant 0$.

可知 $\boldsymbol{X}^{(1)},X^{(2)}$ 两点连线上的一切点 $aX^{(1)}+(1-a)X^{(2)}$ 都满足线性规划的约束条件，故有 $[aX^{(1)}+(1-a)X^{(2)}]\in D$，符合凸集定义. D 是凸集. 证毕.

定理 2.2 线性规划问题的可行解 $\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_k,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$ 是基本可行解的充要条件是 $\boldsymbol{X}$ 的非零分量所对应的系列向量线性无关.

证 必要性. 因 $\boldsymbol{X}$ 是基本可行解，$\boldsymbol{X}$ 的正分量就是各个基变量，基变量对应的系数列向量是基向量. 根据定义，它们线性无关.

充分性. 设可行解 $\boldsymbol{X}$ 的正分量为前 K 个，其对应的线性无关的系数列向量为 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_K$，因为 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m，有 $K\leqslant m$. $K=m$ 时，$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_K$ 恰好构成一个 $m\times m$ 的基本矩阵，从而 $\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_k,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$ 为相应的基本可行解. 当 $K\leqslant m$ 时，X 的正分量的个数小于秩 m，则一定可以从其余的 $(n-K)$ 个列向量中取出 $(m-K)$ 个与 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_K$ 构成由 m 个列向量组成的最大线性无关的向量组，其对应的解恰好为 $\boldsymbol{X}$. 根据定义它是基本可行解. 证毕.

定理 2.3 线性规划问题的基本可行解 $\boldsymbol{X}$ 对应于可行域 D 的顶点.

定理 2.4 线性规划问题若有可行解，必有基本可行解. 或者说，线性规划问题的可行域 D 如为非空凸集，则必有顶点.

定理 2.3 和定理 2.4 不作证明.

定理 2.5 线性规划问题若有最优解，则一定可以在可行域 D 的顶点上达到.

证 设 $X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(K)}$ 是可行域的顶点. 若 $X^{(0)}$ 不是顶点,且目标函数在 $X^{(0)}$ 处达到最优 $Z^*=CX^{(0)}$.

因 $X^{(0)}$ 不是顶点,所以它可以用 D 的顶点线性表示为

$$X^{(0)}=\sum_{i=1}^{K}a_iX^{(i)},a_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{K}a_i=1 \tag{2-1}$$

故有

$$CX^{(0)}=C\sum_{i=1}^{K}a_iX^{(i)}=\sum_{i=1}^{K}a_iCX^{(i)} \tag{2-2}$$

我们在所有的顶点中一定能找到某一个顶点 $X^{(m)}$,使 $CX^{(m)}$ 是所有 $CX^{(i)}$ 中最大者,并将 $X^{(m)}$ 代式(2-2)中的所有 $X^{(i)}$,于是得到

$$\sum_{i=1}^{K}a_iCX^{(i)}\leqslant\sum_{i=1}^{K}a_iCX^{(m)}=CX^{(m)}$$

即得

$$CX^{(0)}\leqslant CX^{(m)}$$

根据假设 $CX^{(0)}$ 是最大值,所以只能有

$$CX^{(0)}=CX^{(m)}$$

有时目标函数可能在多个顶点上达到最大值,这时在这些顶点的凸组合上也达到最大值.

总之,线性规划问题的最优解只要在可行域的顶点上去找,即线性规划问题的求解,可以归结为求达到最大值的基本可行解. 但基本可行解至少有 C_n^m 个,当 m,n 较大时,用穷举法来比较目标函数,确定最大值是十分困难的,有时甚至是行不通的. 由美国数学家 G. B. Dantzig(丹捷格)提出的单纯形法方便有效地解决了一般线性规划寻找最优解的方法. 半个世纪以来,单纯形法仍然是具有权威性的算法.

2.2 单纯形法的经济解释

为了便于直观地理解单纯形法的基本原理和掌握其计算方法,现对引例的解算过程作适当的经济解释.

例 2.1 设有一家具厂用木材和钢材生产 A,B,C 3 种家具,生产一件家具所需的材料、每件家具可获得的利润以及每月可供的木材和钢材数量如表 2-1 所示. 问此家具厂应如何安排各种家具的生产量才能使企业获得最大的利润?

表 2-1

产品	木材	钢材	单位产品获利(元)
A	3	2	4
B	1	1	1
C	4	4	5
材料可供量	8000	3000	

解　先建立线性规划模型. 设 x_1,x_2,x_3分别表示 A,B,C 三种家具的产量(件数). 有

$$\max Z = 4x_1 + x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 \leqslant 8000 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \leqslant 3000 \\ x_j \geqslant 0 \quad j = 1,2,3 \end{cases}$$

增设松弛变量,使约束条件变为等式. 由其经济含义可知,目标函数中松弛变量对应的系数为零. 标准式为

$$\max Z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 \tag{2-3}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 8000 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 3000 \\ x_j \geqslant 0 \ (j = 1,2,3,4,5) \end{cases} \tag{2-4}$$

约束条件的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4,\boldsymbol{P}_5) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{P}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{P}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

是线性无关的. 它们构成一个基矩阵

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_4,\boldsymbol{P}_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对应于 B 的变量为基变量,它们分别为

$$x_4 = 8000 - 3x_1 - x_2 - 4x_3$$
$$x_5 = 3000 - 2x_1 - x_2 - 4x_3$$

将上述基变量代入(2-3)式,得

$$Z = 0 + 4x_1 + x_2 + 5x_3 \tag{2-5}$$

当工厂未投入生产时,即 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$,木材和钢材均未被利用,取 $x_4 = 8000$,$x_5 = 3000$,工厂不产生利润,$Z = 0$. 此时得到一个基本可行解

$$X^{(0)} = (0,0,0,8000,3000)^{\mathrm{T}}$$

现在分析目标函数式(2-5). 式中的 x_1,x_2 和 x_3的系数都为正值,它们都是非基变量,如将非基变量变为基变量,安排三种产品投产,就可以增加工厂的利润. 在三个产品中,若选择一种产品先投产,则应考虑获利最大的产品,本例为 x_3. 由式(2-4)可知,x_3的取值应满足

$$x_4 = 8000 - 3x_1 - x_2 - 4x_3 \geqslant 0 \tag{2-6a}$$

$$x_5 = 3000 - 2x_1 - x_2 - 4x_3 \geqslant 0 \tag{2-6b}$$

因 $x_1 = x_2 = 0$，有

$$x_4 = 8000 - 4x_3 \geqslant 0$$
$$x_5 = 3000 - 4x_3 \geqslant 0$$

x_3要满足上述两式，只有

$$x_3 = \min\left\{\frac{8000}{4}, \frac{3000}{4}\right\} = 750$$

上式表明：生产 750 件 x_3产品，正好将 3000 单位的钢材用完，即 $x_5 = 0$. 由于生产 750 件 x_3要消耗木材 $750 \times 4 = 3000$ 单位，木材(x_4)剩下 5000 单位仍未被利用，故 $x_4 = 8000 - 3000 = 5000$. 此时又得到了一个新的基本可行解

$$\boldsymbol{X}^{(1)} = (0, 0, 750, 5000, 0)^{\mathrm{T}}$$

从经济意义上看，3000 单位的钢材生产了 750 件第三件产品，或称 x_3变为基变量，x_5变为非基变量，也称 x_3置换 x_5. 将式(2-4)变换为：基变量放在等式的左边，非基变量和常数放在等式的右边，有

$$x_4 + 4x_3 = 8000 - 3x_1 - x_2 \tag{2-7}$$
$$4x_3 = 3000 - 2x_1 - x_2 - x_5 \tag{2-8}$$

用高斯消元法，将式(2-7)和式(2-8)中的 x_3的系数列向量变为单位列向量，相应基变量的系数矩阵变换为

$$x_4 = 5000 - x_1 - 0x_2 + x_5 \tag{2-9a}$$
$$x_3 = \frac{3000}{4} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_5 \tag{2-9b}$$

将式(2-9)代入式(2-3)得

$$Z = 3750 + \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_5 \tag{2-10}$$

令非基变量 $x_1 = x_2 = x_5 = 0$，$Z = 3750$，并得到另一个 $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_4, \boldsymbol{P}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

和新的约束方程的系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} & 1 & 0 & \dfrac{1}{4} \end{bmatrix}$$

从目标函数表达式(2-10)可见，x_1 的系数是正值，说明增加 x_1 的产量仍可以提高工厂的利润指标. 与上述运算过程相同，可得

$$x_4 + x_1 = 5000 - 0x_2 + x_5$$
$$\frac{1}{2}x_1 = 750 - \frac{1}{4}x_2 - x_3 - \frac{1}{4}x_5$$

即
$$x_4 = 3500 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 + \frac{3}{2}x_5 \tag{2-11a}$$
$$x_1 = 1500 - \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_5 \tag{2-11b}$$
将式(2-11)代入式(2-3)得
$$Z = 6000 - x_2 - 3x_3 - 2x_5 \tag{2-12}$$
从式(2-12)可以看出,非基变量 x_2,x_3 和 x_5的系数都为负值,这些变量的增加,将导致目标利润的减少,故目前的生产方案为:$x_1=1500,x_4=3500,x_2=x_3=x_5=0$,使目标函数达到最大值 $Z=6000$ 元,其最优解为
$$\boldsymbol{X}^{(2)} = (1500,0,0,3500,0)^{\mathrm{T}}$$
新的约束条件的系数矩阵为
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

通过对上例的求解,可以比较清楚地了解单纯形法的算法思想和计算步骤. 但这种代数运算法缺乏严格的计算程序,容易造成差错,运用一种特制的单纯形表格可以克服上述缺点,能方便、简捷、准确地计算出线性规划问题的最优解. 下一节将讨论一般线性规划单纯形法的求解步骤.

2.3　单纯形法的计算步骤

对于一个给定的线性规划模型可按下列步骤求解.

第一步:将非标准的线性规划模型转化为标准的线性规划模型. 这部分内容已在第一章中作了详细介绍. 这里对本章第二节的例 2.1 求解. 其标准型为

使
$$\max Z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5$$
满足
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 8000 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 3000 \\ x_j \geqslant 0 (j=1,2,3,4,5) \end{cases}$$

如约束条件是"$\geqslant$"或"$=$"的情况,留在后面讨论.

第二步:确定初始基本可行解,填制初始单纯形表.

根据基本可行解的定义,它必须满足两个条件:一是不能违反任何约束条件,且在不退化的情况下,非零变量的个数等于约束条件方程数;二是解中的基变量的系数列向量构成的基矩阵

$$B=(P_1,P_2,P_3,\cdots,P_m)=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

这就是说,不是任何解都可以作为初始可行解. 在例 2.1 中,取 $x_1=x_2=x_3=0$, $x_4=8000$, $x_5=3000$ 的解可以满足上述要求.

确定初始基本可行解后,将有关数据和符号编入一个表格之中,编制出初始单纯形表. 如表 2-2 所示.

表 2-2

A	*B*	*C*	*D*					
$c_j \to$			4	1	5	0	0	
c_i'	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	8000	3	1	4	1	0	
0	x_5	3000	2	1	④	0	1	$\xrightarrow{L}$
Z_j			0	0	0	0	0	
c_j-Z_j			4	1	5	0	0	
					↑*K*			

表 2-2 的结构表示下述意义:

A 栏是对应于第 i 行基变量的 c_j 值, 如表 2-2 中第一行(这里是第一个约束条件)的基变量是 x_4, x_4 对应于目标函数的 $c_4=0$. 这里的 c_i'中 $i=1$ 时的 c'_1与 c_4对应.

B 栏是基本可行解中基变量的名称.

C 栏是第 i 个约束条件的右端值. 在迭代过程中,表示同一行中基变量的取值.

B 栏中的基变量可表示为

$$X_B=(x_4,x_5)^{\mathrm{T}}$$

其余变量 x_1,x_2,x_3 是非基变量,且 $x_1=x_2=x_3=0$.

D 栏下面各行元素表示为:

(1)与各变量 x_j对应的目标函数系数 c_j;

(2)决策变量 x_j;

(3)与 x_j相对应的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵系数 a_{ij}. 即是约束条件方程中 x_j对应的系数列向量;

表中下面的 Z_j称为机会成本. 其经济意义后面叙述,计算公式为

$$Z_j = \sum_{i=1}^{m} c'_i a_{ij}$$

表中最后一行为 $c_j - Z_j$,称为检验数.这是将基变量的函数式代入目标函数式中后非基变量在目标函数中的系数.读者在迭代过程中,可逐步与式(2-5)、(2-10)和(2-12)对照.它表示非基变量转换为基变量后对目标函数的贡献(增加或减少).

由本章2.2节可知,从初始基本可行解出发,要经过有限次的运算,才能得到最优基本可行解(简称最优解).在运算过程中 $\boldsymbol{b}$ 值和 a_{ij} 值随之变动.为表述方便,在以后的迭代过程中,$\boldsymbol{b}$ 以 $\bar{\boldsymbol{b}}$ 表示,$\boldsymbol{a}_{ij}$ 以 $\overline{a_{ij}}$ 表示.

第三步:最优性检验与解的判别.

从2.2节经济解释的内容中可将初始基本可行解写成一般形式:

$$\begin{aligned}
x_1 &= b_1 - a_{1,m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\
x_2 &= b_2 - a_{2,m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
x_m &= b_m - a_{m,m+1}x_{m+1} - \cdots - a_{mn}x_n
\end{aligned}$$

经过迭代后,新的基本可行解可描述为

$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j=m+1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \quad (i = 1,2,\cdots,m) \tag{2-13}$$

将式(2-13)代入式(2-3),整理后得

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c'_i \bar{b}_i + \sum_{j=m+1}^{n} \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c'_i \overline{a_{ij}}\right) x_j$$

令 $Z_0 = \sum_{i=1}^{m} c'_i \bar{b}_i, Z_j = \sum_{i=1}^{m} c'_i \overline{a_{ij}} (j = m+1, m+2, \cdots, n)$ 于是

$$Z = Z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - Z_j) x_j \tag{2-14}$$

式(2-14)中的$(c_j - Z_j)$称为检验数,运用它进行线性规划的最优性检验和解的判别.

(1)所有非基变量的 $c_j - Z_j \leqslant 0$,则 $\sum_{j=m+1}^{n} (c_j - Z_j) x_j < 0$,不管哪一个非基变量作为输入变量,新的目标函数值一定小于或等于现行解的目标函数值,即现行目标函数得到了最大值,现行的基本可行解为最优解,计算终止.

(2)若至少有一个非基变量的 $c_j - Z_j > 0 (j = m+1, m+2, \cdots, n)$,且对应的系数向量中至少有一个 $a_{ij} > 0$,将非基变量 x_j 作为输入变量,目标函数仍可以改善,应继续迭代,进行第四步.

(3)若非基变量的 $c_j - Z_j > 0$,且对应的系数列向量的 a_{ij} 中,都是 $a_{ij} \leqslant 0$ 的情况,则问题有无限界解,也就是无最优解.

本例的表2-2中,x_1, x_2, x_3 对应的检验数 $c_1 - Z_1 = 4, c_2 - Z_2 = 1, c_3 - Z_3 = 5$ 都