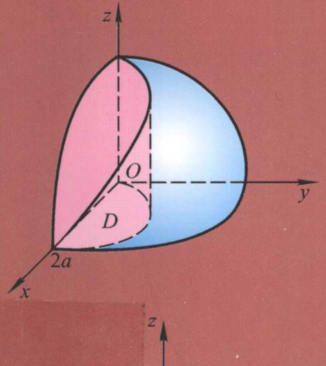
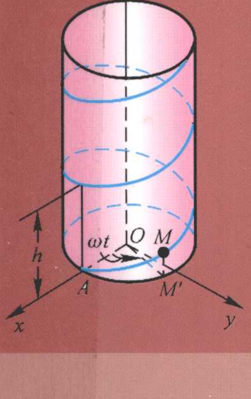
自主创新
方法先行

高等数学

（下册）

上海大学数学系　编





高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

自主创新
方法先行

高等数学

（下册）

上海大学数学系　编

Gaodeng Shuxue

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是科技部创新方法工作专项项目——“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”（项目编号：2009IM010400）子课题“科学思维、科学方法在高等数学课程中的应用与实践”的研究成果。

本书根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写；采用了“问题驱动内容”的编写方式；书中精选了一些在物理、经济、管理等方面应用的例题，以培养学生数学建模的思想；既注重高等数学有关内容的形成，又注重展示这些内容在实际问题中的应用。

全书分上、下两册，上册内容为函数与极限、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及其应用；下册内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数和微分方程，书末附有习题答案与提示。

本书可作为高等学校工科类和经济管理类专业高等数学课程的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/上海大学数学系编.--北京：高等教育出版社,2011.12
ISBN 978-7-04-033983-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①上… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第249493号

策划编辑 王 强　责任编辑 王 强　封面设计 于 涛　版式设计 范晓红
插图绘制 于 博　责任校对 俞声佳　责任印制 胡晓旭

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京四季青印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	29.75	版　　次	2011年12月第1版
字　　数	550千字	印　　次	2011年12月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	40.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　33983-00

目录

第六章

向量代数与空间解析几何

空间解析几何是研究空间图形的几何解析性质的基础,同时也是多元函数微分学的基础. 本章先引进向量的概念,然后介绍向量的线性运算并建立空间坐标系,再利用坐标的方法讨论向量的运算与性质,同时介绍直线、平面、空间曲线和空间曲面等有关的空间解析几何内容.

第一节　向量及其运算

一、向量的概念

客观世界中有许多量既有大小,又有方向,例如力、非直线运动物体的速度、加速度等. 在数学中把既有大小,又有方向的量称为**向量**. 由于向量是有方向的,因此要有参照系,后面会引进空间直角坐标系作为参照系.

数学中通常用一条有方向的线段标记向量,即用有向线段表示向量,线段的方向表示向量的方向,线段的长度表示向量的大小.

以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记为$\overrightarrow{AB}$(图 6.1). 有时也用黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 或加有箭头的黑体字母 $\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}},\vec{\boldsymbol{c}}$ 表示向量.

在实际中很多向量与其起点有关,如力与它的作用点位置有关. 但是从数学上看,所有向量的共性在于其大小与方向,因此把它们抽象为**自由向量**:只考虑向量的方向和大小,而与向量起点无关. 即如果两个向量的大小相同,方向一致,则两个向量**相等**. 或者说,如果两个向量经过平移以后能够重合,则两个向量相等.

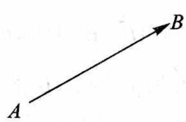


图 6.1

为了便于讨论,需要一些特殊的定义与规定: 向量的大小称为向量的**模**,向量$\overrightarrow{AB}$或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$、$\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}},\vec{\boldsymbol{c}}$ 的模分别记为 $|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{c}|,|\vec{\boldsymbol{a}}|,|\vec{\boldsymbol{b}}|,|\vec{\boldsymbol{c}}|$. 模为 1 的向量称为**单位向量**;模为 0 的向量称为**零向量**,记为 $\boldsymbol{0}$ 或者$\vec{0}$,由于零向量大小

是零，因此起点与终点重合，零向量的方向认为是任意的.

给定两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，任取空间点 O，过点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，不超过 π 的 $\angle AOB$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**，记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或者 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$，如图(6.2)所示，有 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$. 规定零向量与其他向量的夹角是 0 至 π 间的任意值.

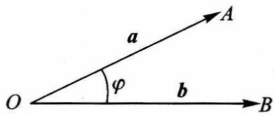


图 6.2

当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或者 π 时，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**（又称为**共线**，即两个向量可以平移到同一条直线上）；当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$ 时，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**. 显然零向量既可认为与任意向量平行，也可认为与任意向量垂直，但其他任意非零向量不具有这个特性.

平移 $k(k\geqslant 3)$ 个向量，使它们的起点相同，如果此时 k 个向量的终点与公共起点位于同一个平面，则称这 k 个向量**共面**.

二、向量的线性运算

向量的线性运算包括向量的加法、减法运算以及向量与数的乘积运算.

1. 向量的加法

给定两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在空间中任取一点 A，过 A 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再过点 B 作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 A，C，称向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的**和**（图 6.3），记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即有

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

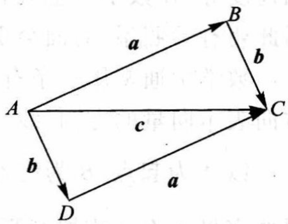


图 6.3

上述作出两个向量和的方法称为向量相加的**三角形法则**. 与之等价的一个法则是**平行四边形法则**：如果两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行，在空间中任取一点 A，过 A 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB，AD 为边作平行四边形 $ABCD$，连接对角线 A，C，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的和（图 6.3）.

向量加法符合下列运算法则：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

证　由向量加法的三角形法则或平行四边形法则（图 6.3），得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}.$$

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，即交换律成立.

在图(6.4)中,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$,则

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

因此结合律成立. □

由于向量加法满足交换律、结合律,n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$相加可以表示成:

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

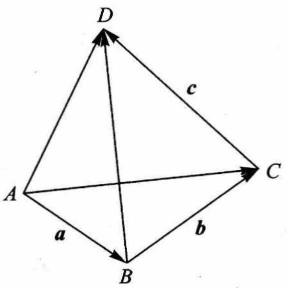


图 6.4

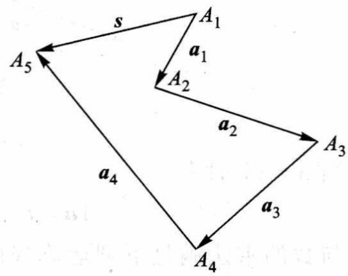


图 6.5

再由向量加法的三角形法则,得 n 个向量的加法法则:任意选择空间一点 A_1,以 A_1 为起点作向量 $\boldsymbol{a}_1$,记 $\boldsymbol{a}_1$ 终点为 A_2;对于任意 $2\leqslant i\leqslant n$,以 A_i 为起点作向量 $\boldsymbol{a}_i$,记 $\boldsymbol{a}_i$ 的终点为 A_{i+1}. 则以 A_1 为起点、A_{n+1} 为终点的向量即为 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$. 如图 6.5,有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4.$$

对于向量 $\boldsymbol{a}$,与 $\boldsymbol{a}$ 大小相同,方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记为$-\boldsymbol{a}$. 对于两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,称 $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$为向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差,记为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 6.6). 特别当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时,有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

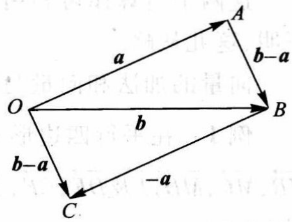


图 6.6

显然任给向量$\overrightarrow{AB}$及点 O,有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

因此,若把向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O,则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A,向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量$\overrightarrow{AB}$便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差,即为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 6.6). 由于三角形两边之和大于第三边,因此有**三角不等式**:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\ |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

2. 向量与数的乘法

给定一个向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ，定义向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 如下：

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量. 并称 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的**乘积**(图 6.7).

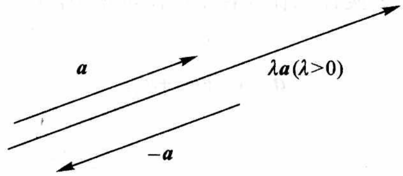


图 6.7

特别当 $\lambda=\pm1$ 时有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\quad -1\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

向量与数的乘法满足下列运算规律：

(1) **结合律**　　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

这是因为按照定义三个向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$，$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$，$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，且大小相同，方向相同(如果 λ,μ 同号，则三个向量与 $\boldsymbol{a}$ 同向；如果异号，则三个向量与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当有一个数为零时，三个向量是零向量). 所以三个向量相同，即结合律成立.

(2) **分配律**

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a};\tag{6.1}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.\tag{6.2}$$

这两个运算律可利用向量与数的乘积、向量加法定义以及相似三角形方法证明，这儿从略.

向量的加法和向量与数的乘法统称为向量的**线性运算**.

例 1　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$ 以及 $\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{CE}$，其中 M 是平行四边形对角线交点，E 是线段 AB 中点(图 6.8).

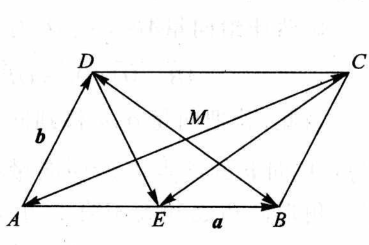


图 6.8

解　由于平行四边形对角线平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$$

于是

$$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

又因为 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

因为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$,所以$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，进一步$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

又

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}).$$

3. 数轴

给定一个非零向量 $\boldsymbol{a}$,与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{e}_a$,根据向量与数的乘法定义有

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}.$$

有时候写为 $\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

对于任意数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$,有 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,反之如果向量 $\boldsymbol{a}$ 非零,且向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,则存在唯一实数 λ 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,即有下述定理:

定理 6.1　设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量,则向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是存在唯一实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证　命题的充分性是显然的,下证必要性.

设 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行.

当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时,取 $\lambda=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$;当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时,取 $\lambda=-\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$. 由于 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向,且大小相等,所以有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

再证唯一性. 如果存在实数 λ,μ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{a}$,则有

$$\boldsymbol{0}=\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a}=(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}.$$

两边取模,得 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$. 因为 $|\boldsymbol{a}|\neq0$,所以 $|\lambda-\mu|=0$,即 $\lambda=\mu$,唯一性得证. □

由定理 6.1,我们可以建立数轴:给定一个点 O 与一个单位向量 $\boldsymbol{i}$,过点 O 作与 $\boldsymbol{i}$ 平行的直线,此直线称为原点为 O,方向为 $\boldsymbol{i}$ 的**数轴** Ox(图 6.9).

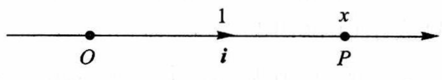


图 6.9

数轴上任一点 P,对应一个向量$\overrightarrow{OP}$,由于$\overrightarrow{OP}$与 $\boldsymbol{i}$ 平行, 根据定理 6.1 必存在实数 x 使得$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$(此时实数 x 称为数轴 Ox 上**有向线段$\overrightarrow{OP}$的值**). 于是

$$点\ P \leftrightarrow 向量\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i},$$

从而数轴 Ox 上点 P 与实数 x 存在一一对应关系. 据此定义 x 为数轴 Ox 上点 P 的坐标,当$\overrightarrow{OP}$与 $\boldsymbol{i}$ 同向,坐标非负;当$\overrightarrow{OP}$与 $\boldsymbol{i}$ 反向,坐标非正,且点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$.

三、空间直角坐标系

在空间内任取一点 O 以及经过点 O 的三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,就确定了以 O 为原点的三个坐标轴,其中经过向量 $\boldsymbol{i}$ 的坐标轴称为 **x 轴(横轴)**;经过向量 $\boldsymbol{j}$ 的坐标轴称为 **y 轴(纵轴)**;经过向量 $\boldsymbol{k}$ 的坐标轴称为 **z 轴(竖轴)**. 原点 O 以及 x,y,z 三个坐标轴统称为 **$Oxyz$ 坐标系或 $[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 坐标系**(图 6. 10). 通常要求坐标系符合**右手螺旋法则**:即以右手握住 z 轴,当右手四个手指从 x 轴正向以$\dfrac{\pi}{2}$角度转向 y 轴正向时,右手大拇指方向为 z 轴的正向(图 6. 11).

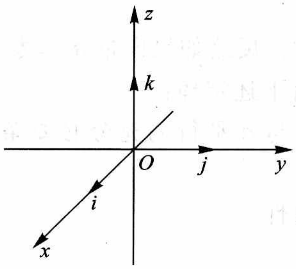


图 6. 10

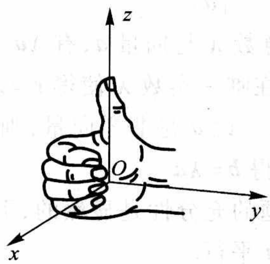


图 6. 11

坐标轴中任意两条轴确定一个平面,共确定三个平面,称为**坐标面**:x 轴与 y 轴确定的平面称为 **xOy 平面**;y 轴与 z 轴确定的平面称为 **yOz 平面**;z 轴与 x 轴确定的平面称为 **zOx 平面**. 三个坐标面将三维空间分解为八个部分,每个部分称为一个**卦限**:位于 xOy 平面上方,含有 x 轴,y 轴与 z 轴正向部分叫做**第一卦限**,依逆时针方向旋转其他卦限分别为第二、三、四卦限;位于 xOy 平面下方分别与第一、二、三、四卦限对称的卦限称为第五、六、七、八卦限,通常用罗马字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示(图 6. 12).

任给空间向量 $\boldsymbol{r}$,存在空间点 M 使得$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$. 以 OM 为对角线,三坐标轴为棱作长方体 $RBMC-OQAP$(图 6. 13),有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.$$

设$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

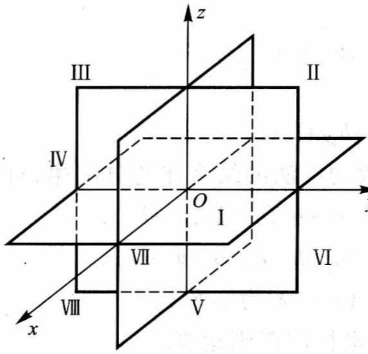


图 6.12

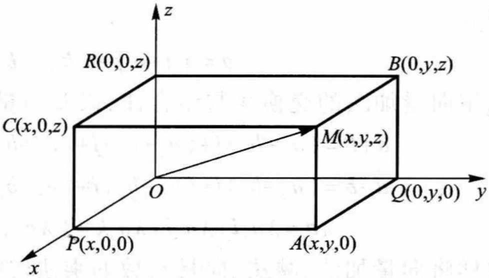


图 6.13

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标分解**，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.

显然，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$ 三个分量，从而确定了三个有序实数 x,y,z；反之给定三个有序实数 x,y,z，也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M. 因此点 M、向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序实数 x,y,z 之间存在一一对应关系：

$$M\leftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z).$$

据此，定义有序实数 x,y,z 为向量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标系 $Oxyz$ 中的**坐标**，记为 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$；同时有序数 x,y,z 也称为点 M 在坐标系 $Oxyz$ 中的**坐标**，记为 $M(x,y,z)$.

注　点是固定的，而向量是自由的，当向量 $\boldsymbol{r}$ 的起点是 O 时，则终点为 $M(x,y,z)$.

通常称向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 为点 M 关于原点 O 的向径. 按照前面的定义，一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 (x,y,z) 既表示点 M（相对于原点是固定的），又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

在直角坐标系下，坐标面与坐标轴上点的坐标具有特殊的形式. 例如坐标面 xOy 上点 M 的坐标 (x,y,z) 满足 $z=0$；反之一个点 $M(x,y,z)$，如果 $z=0$，则此点在坐标面 xOy 上. 同样在坐标面 yOz 上点坐标满足 $x=0$；在坐标面 zOx 上的点坐标满足 $y=0$. 如果一个点有两个坐标分量为零，则一定在某个坐标轴上. 例如点 $M(3,0,0)$ 在 x 轴上；点 $M(0,4,0)$ 在 y 轴上；点 $M(0,0,5)$ 在 z 轴上. 而原点 O 的坐标是 $(0,0,0)$.

四、利用坐标作向量线性运算

在前面，定义了向量的线性运算，然而在定义这些运算时，主要利用向量的几何特性来刻画这些运算，如三角形原则. 下面利用坐标对向量线性运算进行

刻画.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 坐标分别为

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\quad \boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),$$

即有

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$

利用向量加法的交换律与结合律,以及向量与数的乘法的结合律与分配律,有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z),$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)(\lambda \text{ 为实数}).$$

这样将向量加法、减法、向量与数的乘法转换为坐标的四则运算.

根据定理 6.1,当 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 时,向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是存在唯一实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 此即

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

因此 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}. \tag{6.3}$$

注　(6.3)式中允许分母为零,例如 $a_x=0,a_y\neq 0,a_z\neq 0$,则(6.3)式表示为

$$\begin{cases} b_x=0, \\ \dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}; \end{cases}$$

如果 $a_x=0,a_y=0,a_z\neq 0$,(6.3)式表示为

$$\begin{cases} b_x=0, \\ b_y=0. \end{cases}$$

其他情况可类似得到相应等式关系.

例 2　已知空间两点 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$以及实数 $\lambda\neq -1$,在直线 AB 上求点 $M(x,y,z)$使得$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

解　根据向量运算法则,有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},$$

因此$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$,化简得

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}).$$

将$\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,z_1)$,$\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2,z_2)$代入得

$$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right),$$

此即点 M 坐标，所以

$$M(x,y,z)=M\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right).$$

注　(1) 本例中点 M 称为有向线段$\overrightarrow{AB}$的 **λ 分点**. 例如 $\lambda=1$ 时，M 为有向线段$\overrightarrow{AB}$中点

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

(2) 通过本例可以看出，求点 M，即求向量$\overrightarrow{OM}$，这是因为点 M 与向量$\overrightarrow{OM}$有相同的坐标表示. 但是需要注意的是：点没有运算，向量有运算. 当看到记号(x,y,z)时，需要由上下文确定它的含义究竟是向量还是点，以避免产生错误.

五、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间距离

对于向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$，由图 6.13 知，

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

由于$|\boldsymbol{r}|$表示长方体对角线长度，因此根据勾股定理得

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2}.$$

又因为$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，因此

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

如果 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$为空间两点，则向量$\overrightarrow{AB}$的模$|\overrightarrow{AB}|$为点 A 与点 B 的距离. 又因为

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

因此 A，B 两点距离是

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 3　已知空间点 $P(1,2,1)$，$Q(2,3,1)$，求与向量$\overrightarrow{PQ}$平行的单位向量.

解　根据向量坐标运算有

$$\overrightarrow{PQ}=(2-1,3-2,1-1)=(1,1,0).$$

所以与$\overrightarrow{PQ}$平行的单位向量是

$$\pm\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right).$$

例 4　已知三角形三个顶点为 $A(2,1,1)$，$B(2,1,2)$，$C(1,1,1)$，求证三角

形为直角三角形.

解　三角形三边长度是

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(2-2)^2+(1-1)^2+(2-1)^2}=1,$$
$$|AC|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(1-2)^2+(1-1)^2+(1-1)^2}=1,$$
$$|BC|=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(1-2)^2+(1-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}.$$

有

$$|AB|^2+|AC|^2=1+1=2=|BC|^2.$$

因此该三角形是直角三角形，$\angle BAC$ 是直角.

例 5　已知点 $P(5,2,-1)$，$Q(1,2,3)$，且点 $M(x,y,z)$ 为$\overrightarrow{PQ}$的 3 分点，求 M 到原点的距离.

解　根据分点公式，M 点坐标是

$$(x,y,z)=\left(\frac{5+3\cdot 1}{1+3},\frac{2+3\cdot 2}{1+3},\frac{-1+3\cdot 3}{1+3}\right)=(2,2,2),$$

因此所求距离为

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}.$$

例 6　在坐标面 xOy 上求点 $M(x,y,z)$，使得点 M 与点 $A(3,1,1)$，$B(2,2,1)$，$C(1,1,1)$距离相等.

解　由已知条件有

$$|AM|^2=(x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=|BM|^2=(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2,$$
$$|AM|^2=(x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=|CM|^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2.$$

在上面两式中消去平方项，得

$$\begin{cases}2x-2y=2,\\4x=8.\end{cases}$$

解得 $x=2$，$y=1$. 由于点 M 在坐标面 xOy 上，所以 $z=0$，因此所求点为 $M(2,1,0)$.

2. 方向角与方向余弦

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**.

设$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$MP\perp OP$，由图 6.14 可知，$x$ 是有向线段 OP 的值，由此得

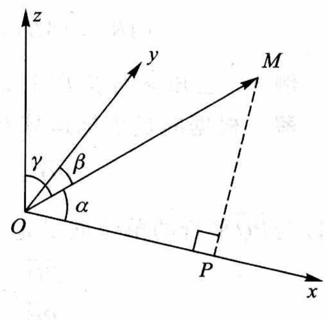


图 6.14

$$\cos\alpha=\frac{x}{|OM|}=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},$$

类似地有