Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学最后冲刺超越135分（数学二）

清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武
主编

由多次参加**命题及阅卷的专家**亲自编写，内容系统、权威

严格按照最新考试大纲，突出重点

赠送MP3盘

考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

2013 考研专家指导丛书

考研数学最后冲刺超越135分（数学二）

清华大学 王 欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童 武
主编

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学最后冲刺超越135分.数学二 / 王欢主编.
—北京:中国石化出版社,2012.2
ISBN 978-7-5114-1354-3

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第011616号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街58号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米 16开本 5.5印张 133千字
2012年2月第1版 2012年2月第1次印刷
定价:18.00元(赠送MP3盘)

前　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制订的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选1000题(理工类)》、《考研数学最新精选1000题(经济类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(理工类)》、《考研数学必

做客观题1800题精析(经济类)》、《考研数学必做主观题600题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题600题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下：

1. 配合最新考试大纲，反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上，力求反映最新考试要求，紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　　录

最后冲刺试卷一

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 函数$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$，在下列哪个区间内有界？（　　）

(A)$(-1,0)$　　(B)$(0,1)$　　(C)$(1,2)$　　(D)$(2,3)$

2. 当$x\to 0$时，下列四个无穷小量中，哪一个是比其他三个更低阶的无穷小量？（　　）

(A)$x-\tan x$　　(B)$1-\cos x$　　(C)$\sqrt{1-x^2}-1$　　(D)$\tan x$

3. 设函数$f(x)$对任意x均满足等式$f(1+x)=af(x)$，且$f'(0)=b$，其中a，b为非零常数，则（　　）。

(A)$f(x)$在$x=1$处不可导　　(B)$f(x)$在$x=1$处可导，且$f'(1)=a$

(C)$f(x)$在$x=1$处可导，且$f'(1)=b$　　(D)$f(x)$在$x=1$处可导，且$f'(1)=ab$

4. 设$f(x)$是连续函数，$F(x)$是$f(x)$的原函数，则（　　）。

(A)当$f(x)$是奇函数时，$F(x)$必为偶函数

(B)当$f(x)$是偶函数时，$F(x)$必为奇函数

(C)当$f(x)$是周期函数时，$F(x)$必为周期函数

(D)当$f(x)$是单调增函数时，$F(x)$必为单调增函数

5. 若有曲线$y=2\sqrt{x}$，曲线上某点处的切线以及$x=1$，$x=3$围成的平面区域的面积最小，则该切线是（　　）。

(A)$y=\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}$　　(B)$y=\dfrac{x}{2}+2$　　(C)$y=x+1$　　(D)$y=\sqrt{2x}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

6. 函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)可偏导是函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续的（　　）。

(A)充分条件　　(B)必要条件

(C)充分必要条件　　(D)非充分非必要条件

7. 设$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}$，

$P_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，

其中A可逆，则B^{-1}等于（　　）。

(A)$A^{-1}P_1P_2$　　(B)$P_1A^{-1}P_2$　　(C)$P_1P_2A^{-1}$　　(D)$P_2A^{-1}P_1$

8. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分条件是（　　）。

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 均不为零向量

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量的分量不成比例

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一部分向量线性无关

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$ ________。

10. 设 $y(x)$ 为微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=2$ 的特解，则 $\int_0^1 y(x)\,dx=$ ________。

11. 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点(0，1)处的切线方程为________。

12. 设 $a>0$，$f(x)=g(x)=\begin{cases}a, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，而 D 表示整个平面，则 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)\,dxdy$ $=$ ________。

13. 设 $z=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 $f(u)$ 可导，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________。

14. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，而 $n\geqslant 2$ 为正整数，则 $A^n-2A^{n-1}=$ ________。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. （本题满分 9 分）

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$。

16. （本题满分 10 分）

设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\,dx$。

17. （本题满分 10 分）

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1$，$g'(0)=-1$。

（Ⅰ）求 $f'(x)$；

（Ⅱ）讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性。

18. （本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f(x)\,dx=0$。证明：

（Ⅰ）存在 $\xi_i\in(a,b)$，使得 $f(\xi_i)=f'(\xi_i)\ (i=1,2)$；

（Ⅱ）存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f(\eta)=f''(\eta)$。

19. (本题满分 11 分)

设$f(u)$，$g(u)$二阶连续可微，且$u=yf\left(\frac{x}{y}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right)$，求$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

20. (本题满分 11 分)

设$f(x)$为偶函数，且满足$f'(x)+2f(x)-3\int_0^x f(t-x)\mathrm{d}t=-3x+2$，求$f(x)$。

21. (本题满分 11 分)

计算$I=\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由$y=-x$，$y=\sqrt{1-x^2}$及$y=\sqrt{x-x^2}$围成。

22. (本题满分 11 分)

设有三维列向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{bmatrix}$，问$\lambda$取何值时：

(Ⅰ)$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表达式唯一；

(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表达式不唯一；

(Ⅲ)$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示。

23. (本题满分 11 分)

已知齐次线性方程组
$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+ & a_2x_2+ & a_3x_3+\cdots+ & a_nx_n=0,\\ a_1x_1+ & (a_2+b)x_2 & a_3x_3+\cdots+ & a_nx_n=0,\\ a_1x_1+ & a_2x_2+ & (a_3+b)x_3+\cdots+ & a_nx_n=0,\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_1x_1+ & a_2x_2+ & a_3x_3+\cdots+ & (a_n+b)x_n=0,\end{cases}$$

其中$\sum\limits_{i=1}^n a_i\neq 0$，试讨论$a_1$，$a_2$，…，$a_n$和$b$满足何种关系时，

(Ⅰ)方程组仅有零解；

(Ⅱ)方程组有非零解，在有非零解时，求此方程组的一个基础解系。

最后冲刺试卷一参考答案与解析

一、选择题

1.【考点提示】函数的极限、有界性

【解题分析】本题考查函数极限与有界性的关系，当$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$时，则$f(x)$在$x_0$的邻域内无界。由题设，$f(-1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 3}{18}$，　(1)

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 2}{4},\qquad(2)$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty,\qquad(3)$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty,\qquad(4)$$

由(1)~(4)式可知，(0，1)，(1，2)，(2，3)内$f(x)$都是无界的，所以选(A)。

2.【考点提示】无穷小量

【解题分析】当 $x\to0$ 时，$x-\tan x\sim\frac{1}{3}x^3$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2$；

即 $1-\cos x$，$\sqrt{1-x^2}-1$ 与 x^2 是同阶无穷小量，而 $\tan x\sim x$，

所以 $\tan x$ 是比 x^2 更低阶的无穷小量，故应选(D)。

3.【考点提示】导数定义

【解题分析】由导数定义知 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{af(\Delta x)-af(0)}{\Delta x}$

$$=a\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=af'(0)=ab,$$

故应选(D)。

4.【考点提示】原函数、奇偶性、单调性

【解题分析】由题设，$f(x)$ 连续，则 $\int_0^x f(t)\,dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，

因此 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt+C$，其中 C 为任意常数，

当 $f(x)$ 是奇函数时，即 $f(-x)=-f(x)$，

则 $F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\,dt+C\underline{\underline{u=-t}}\int_0^x-f(-u)\,du+C=\int_0^x f(u)\,du+C=F(x)$

所以 $F(x)$ 是偶数，(A)正确；关于(B)、(C)、(D)，可分别举出反例予以否定；

关于(B)，令 $f(x)=\cos x$，则 $F(x)=\sin x+1$ 不是奇函数；

关于(C)，令 $f(x)=\sin^2x$，则 $F(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin2x$ 不是周期函数；

关于(D)，令 $f(x)=x$，则 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 不是单调函数。综上，选(A)。

5.【考点提示】定积分的应用

【解题分析】曲线 $y=2\sqrt{x}$ 在点 $(t,2\sqrt{t})$ 处的切线方程为 $y=2\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}(x-t)=\frac{x}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}$，

由于切线位于曲线 $y=2\sqrt{x}$ 的上方，所以由曲线 $y=2\sqrt{x}$，切线及 $x=1$，$x=3$ 围成的面积为

$S=S(t)=\int_1^3\left(\frac{x}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}-2\sqrt{x}\right)dx=\frac{4}{\sqrt{t}}+2\sqrt{t}-2\int_1^3\sqrt{x}\,dx$，$S'(t)=-\frac{2}{t\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t}}=0\Rightarrow t=2$。

当 $t\in(0,2)$ 时，$S'(t)<0$；当 $t\in(2,3)$ 时，$S'(t)>0$，

则当 $t=2$ 时，$S(t)$ 取最小值，此时切线方程为 $y=\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}$，选(A)。

6.【考点提示】多元函数微分学的基本概念

【解题分析】选(D)，如 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处可偏导，但不连续；又如 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$ 在 $(0,0)$ 处连续，但对 x 不可偏导。

7.【考点提示】初等变换、初等矩阵

【解题分析】本题考查初等变换与初等矩阵的关系。

由题设知 $B=AP_1P_2$，因此 $P_1P_2A^{-1}B=P_1P_2A^{-1}AP_1P_2=(P_1P_2)^2$，

由已知，$P_1P_2=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$，

$$(P_1P_2)^2=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

因此 $B^{-1}=P_1P_2A^{-1}$，选(C)。

8.【考点提示】由向量组线性无关的定义即得

【解题分析】选项(C)为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分必要条件。(A)，(B)，(D)均是必要条件，而非充分条件。如向量组(1，0)，(0，1)，(1，1)线性相关，但(A)，(B)，(D)均成立，故应选(C)。

二、填空题

9.【考点提示】利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 即可

【解题分析】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(3x^2+5)}{5x^2+3x}\dfrac{\sin\dfrac{2}{x}}{\dfrac{2}{x}}=\dfrac{6}{5}$

10.【考点提示】二阶常系数线性微分方程的解法

【解题分析】$y''-4y'+4y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}$，

由初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=2$ 得 $C_1=1$，$C_2=0$，则 $y=\mathrm{e}^{2x}$，

于是 $\int_0^1 y(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x\Big|_0^2=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)$。

11.【考点提示】曲线的切线方程

【解题分析】先求曲线在点(0，1)处切线的斜率，即隐函数求导，对曲线方程两边求导数得

$$(y+xy')\cos(xy)+\frac{1}{y-x}(y'-1)=1。$$

将点(0，1)代入上述方程可得 $1+y'(0)-1=1$，即 $y'(0)=1$，

故切线方程为 $y-1=x$，即 $y=x+1$。

12.【考点提示】二重积分的计算

【解题分析】由 $f(x)g(y-x)=\begin{cases}a^2, & 0\leqslant x\leqslant1,\ 0\leqslant y-x\leqslant1\\0, & \text{其他}\end{cases}$

得 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{x+1}\mathrm{d}y=a^2$。

13.【考点提示】多元函数偏导数的计算

【解题分析】$\frac{\partial z}{\partial x}=yf\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^2}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=xf\left(\frac{y}{x}\right)+yf'\left(\frac{y}{x}\right)$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z$

14.【考点提示】矩阵运算

【解题分析】由题设，$A^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{bmatrix}=2A$，

假设 $A^n=2A^{n-1}(n\geqslant 2)$，则 $A^{n+1}=2A\cdot A^{n-1}=2A^n$，

所以由数学归纳法，知 $A^n-2A^{n-1}=\mathbf{0}$。

三、解答题

15.【考点提示】洛必达法则、等价无穷小

【解题分析】由题设，原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-(\sin x\cos x)^2}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}(\sin 2x)^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x\cos 2x}{4x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin 4x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{4}{2}\cos 4x}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sin 2x)^2}{6x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}=\frac{4}{3}。$$

16.【考点提示】不定积分

【解题分析】由题设，需先求出 $f(x)$ 的解析表达式，再求不定积分。

令 $t=\sin^2 x$，则 $x=\arcsin\sqrt{t}$，从而 $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\arcsin\sqrt{t}$，

因此 $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{\sqrt{x}}\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$

$$=-\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}(1-x)=-2\int\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{1-x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int\sqrt{1-x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}\sqrt{x}=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C。$$

17.【考点提示】关键是在 $x=0$ 处 $f'(0)$ 的存在性及 $f'(x)$ 的连续性均应用定义讨论

【解题分析】(I)当 $x\neq 0$ 时，有 $f'(x)=\frac{x[g'(x)+\mathrm{e}^{-x}]-g(x)+\mathrm{e}^{-x}}{x^2}=\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$；

当 $x=0$ 时，由导数的定义有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\mathrm{e}^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}。$$

所以 $f'(x)=\begin{cases}\frac{xg'(x)+g(x)+(x+1)\mathrm{e}^{-x}}{x^2}, & x\neq 0,\\ \frac{g''(0)-1}{2}, & x=0。\end{cases}$

（Ⅱ）因为在 $x=0$ 处，有 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)+xg''(x)-g'(x)+e^{-x}-(x+1)e^{-x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}=f'(0)$$

而 $f'(x)$ 在 $x\neq0$ 处是连续函数，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上为连续函数。

18. **【考点提示】**中值定理的应用

【解题分析】（Ⅰ）令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$F(a)=F(b)=0$，

由罗尔定理，存在 $c\in(a,\ b)$，使得 $F'(c)=0$，即 $f(c)=0$，

令 $h(x)=e^{-x}f(x)$，则 $h(a)=h(c)=h(b)=0$，

由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,\ c)$，$\xi_2\in(c,\ b)$，使得 $h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$，

而 $h'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)]$ 且 $e^{-x}\neq0$，所以 $f(\xi_i)=f'(\xi_i)(i=1,\ 2)$，

（Ⅱ）令 $H(x)=e^x[f'(x)-f(x)]$，$H'(x)=e^x[f''(x)-f(x)]$，$H(\xi_1)=H(\xi_2)=0$，

由罗尔定理，存在 $\eta\in(\xi_1,\ \xi_2)\subset(a,\ b)$，使得 $H'(\eta)=0$，

注意到 $e^x\neq0$，所以 $f(\eta)=f''(\eta)$。

19. **【考点提示】**多元函数的高阶导数

【解题分析】$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'\left(\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y}{x}g'\left(\dfrac{y}{x}\right)$，

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{x}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

20. **【考点提示】**微分方程的应用

【解题分析】$\int_0^x f(t-x)\mathrm{d}t=-\int_0^x f(t-x)\mathrm{d}(x-t)=-\int_x^0 f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，

则有 $f'(x)+2f(x)-3\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-3x+2$，因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f'(x)$ 是奇函数，

于是 $f'(0)=0$，代入上式得 $f(0)=1$。

将 $f'(x)+2f(x)-3\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-3x+2$ 两边对 x 求导数得 $f''(x)+2f'(x)-3f(x)=-3$，

其通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-3x}+1$，将初始条件代入得 $f(x)=1$。

21. **【考点提示】**二重积分的计算

【解题分析】将 D 分成两部分 D_1，D_2，

其中 $D_1=\{(x,\ y)\mid 0\leqslant x\leqslant1,\ \sqrt{x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\}$，

$D_2=\{(x,\ y)\mid -\dfrac{\sqrt2}{2}\leqslant x\leqslant0,\ -x\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\}$，

则 $I=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}y\mathrm{d}y+\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}x\mathrm{d}x\int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}}y\mathrm{d}y$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}x(1-2x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{48}$。

22.【考点提示】将讨论一个向量能否由一组向量线性表示的问题转化为讨论一个非齐次线性方程组解的存在性及唯一性问题

【解题分析】设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，得线性方程组 $\begin{bmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \lambda\\ \lambda^2\end{bmatrix}$，

其系数行列式 $|A|=\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+3)$。

(Ⅰ)若 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$，则方程组有唯一解，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示；

(Ⅱ)若 $\lambda=0$，则方程组有无穷多个解，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表达式不唯一；

(Ⅲ)若 $\lambda=-3$，则方程组的增广矩阵

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2 & 9\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}0 & 3 & -3 & 18\\ 0 & -3 & 3 & -12\\ 1 & 1 & -2 & 9\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}0 & 0 & 0 & 6\\ 0 & -3 & 3 & -12\\ 1 & 1 & -2 & 9\end{array}\right],$$

可见方程组的系数矩阵 A 与增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩不等，故方程组无解，从而 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

23.【考点提示】线性齐次方程组、基础解系

【解题分析】由题设，设方程组的系数矩阵为 A，则

$$|A|=\begin{vmatrix}a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}=(b+\sum_{i=1}^n a_i)\begin{vmatrix}1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}$$

$$=(b+\sum_{i=1}^n a_i)\begin{vmatrix}1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 0 & b & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b\end{vmatrix}=b^{n-1}(b+\sum_{i=1}^n a_i)$$

(Ⅰ)当 $b\neq0$ 且 $b+\sum\limits_{i=1}^n a_i\neq0$ 时，$|A|\neq0$，$r(A)=n$，此时方程组仅有零解；

(Ⅱ)当 $b=0$ 时，原方程组的同解方程组为 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$，

由已知条件 $\sum\limits_{i=1}^n a_i\neq0$，知 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为0，

不失一般性，可假设 $a_1\neq0$，则不难求得原方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}-\dfrac{a_2}{a_1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-\dfrac{a_3}{a_1}\\0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\xi}_{n-1}=\begin{bmatrix}-\dfrac{a_n}{a_1}\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

当 $b+\sum_{i=1}^{n}a_i=0$ 时，即 $b=-\sum_{i=1}^{n}a_i$ 时，

由已知条件知 $b\neq0$，则 A 可化为阶梯形 $\begin{bmatrix}-1&1&0&\cdots&0\\-1&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$，

不难求得原方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$。

最后冲刺试卷二

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 设函数$f(x)$在$x=0$处连续，则下列命题错误的是(　　)。

(A)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在，则$f(0)=0$

(B)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$存在，则$f(0)=0$

(C)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在，则$f'(0)$存在

(D)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$存在，则$f'(0)$存在

2. 设$f(x)$为可导函数，且满足条件$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线斜率为(　　)。

(A)2　　(B)-1　　(C)$\dfrac{1}{2}$　　(D)-2

3. 设$f(x)$是连续函数，且$F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x}f(t)\mathrm{d}t$，则$F'(x)$等于(　　)

(A)$\dfrac{1}{x}f(\ln x)+\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$　　(B)$f(\ln x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(C)$\dfrac{1}{x}f(\ln x)-\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$　　(D)$f(\ln x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4. 已知函数$f(x)$具有任意阶导数，且$f'(x)=[f(x)]^2$，则当n为大于2的正整数时，$f(x)$的n阶导数$f^{(n)}(x)$为(　　)。

(A)$n!\ [f(x)]^{n+1}$　　(B)$n\ [f(x)]^{n+1}$

(C)$[f(x)]^{2n}$　　(D)$n!\ [f(x)]^{2n}$

5. 设$\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{16}{3}\pi$，其中$D$：$x^2+y^2\leqslant a^2$，则$a$为(　　)。

(A)1　　(B)2　　(C)$\sqrt{2}$　　(D)$\sqrt{3}$

6. 设$f(x,y)$在有界闭区域D上二阶连续可偏导，且在区域D内恒有条件$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}>0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$，则(　　)。

(A)$f(x,y)$的最大值点和最小值点都在D内

(B)$f(x,y)$的最大点和最小值点都在D的边界上

(C)$f(x,y)$的最小值点在D内，最大值点在D的边界上

(D)$f(x,y)$的最大值点在D内，最小值点在D的边界上

7. 设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，下列命题正确的是(　　)。

(A)若方程组 $AX=\mathbf{0}$ 只有零解，则方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(B)若方程组 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解，则方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解

(C)若方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 无解，则方程组 $AX=\mathbf{0}$ 一定有非零解

(D)若方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则方程组 $AX=\mathbf{0}$ 一定有非零解

8. 设 A 是 n 阶矩阵，下列不是命题“0 是矩阵 A 的特征值”的充分必要条件的是(　　)。

(A)A 的行向量组线性相关

(B)方程组 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解

(C)对任何非零向量 $\boldsymbol{b}$，方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 都没有唯一解

(D)存在自然数 k，使得 $A^k=\mathbf{0}$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

9. $\int\frac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x=$________。

10. 设曲线 $f(x)=x^n$ 在点(1，1)处的切线与 x 轴的交点为$(\xi_n,0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$________。

11. 设$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{1}{3}f'(x_0)$，则 $k=$ ________。

12. 微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3$满足$y|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=$________。

13. 设 $z=f(x,y)$ 二阶可偏导，$\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=2$，且 $f(x,0)=1$，$f'_y(x,0)=x$，则 $f(x,y)$ $=$________。

14. 若$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是________。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2x\right)$。

16. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上连续、单调不减且 $f(0)\geqslant0$，试证函数

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x t^nf(t)\,\mathrm{d}t, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$[0,+\infty)$上连续且单调不减(其中 $n>0$)。

17. (本题满分 10 分)

设 $z=xf(\frac{y}{x})+\varphi(\frac{y}{x})$，求 $x^2\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2z}{\partial y^2}$。

18. (本题满分 10 分)

求证：当 $x\geqslant1$ 时，$\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$。