# 高等数学简明教程

(上 册)

主编 张建国 刘学忠 王治国

中国物价出版社

# 高等数学简明教程

（上　　册）

主编 张建国 刘学忠 王治国

中国物价出版社

1996 年 · 北京

# 前　　言

本书主要依据国家教委制定的师专物理专业高等数学教学大纲，并参考化学、计算机和工科各专业大纲要求，由河南、河北、湖南、浙江、辽宁五省十六所师专、教育学院和工科院校联合编写而成。全书分为上、下两册。上册包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、微分方程、无穷级数；下册包括空间解析几何、行列式与矩阵、n 维向量与线性方程组、多元函数的微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、矢量分析与场论初步等。本书可作为师专、教育学院、职工大学和高等工业院校理工科各专业的高等数学教学用书或参考书。

本书的一个显著特点就是简明扼要，除注意高等数学的内在系统性外，尽可能结合理工科专业学生的实际需要，精选内容，力求简洁易懂，但又简而不略。数学概念尽可能由一些物理、化学或工业上的实际例子引入，理论联系实际，对某些理论性较强的定理或公式，不过分强调严格论证，而把重点放在使用上。本书还从内容和方法上尽力体现高等数学教学中的最新成果。

本书主编张建国（开封师专），刘学忠（周口师专），王治国（开封师专）；副主编李庆广（许昌师专），杜春雨（开封师专），侯秀安（濮阳教育学院），张新育（郑州工业大学），李永兴（辽阳师专），张玉彬（许昌教育学院），伍宪彬（驻马店师专），席光明（零陵师专），周光实（保定师专）；编委有裘敬华（黄河职工大学），颜有祥（平顶山煤矿职工大学），董传欣（南阳教育学院），沈最意（舟山师专），李水灿、李锐、刘洪星、车秀敏、张明亮（开封师专），辛廷顺（开封物资集团公司），谭水木（许昌师专），赵元祥（郑州市技工学校）。

本书由所有主编、副主编、编委分章撰写，然后由主编通审定稿。在本书的编写过程中，编者参阅了一些著作和材料，并得到各

参编院校有关领导的大力支持，对此我们深表感谢。

要编写出一套比较成熟的有特色的教材，是我们追求的目标，本书全体编者尽管作了很大努力，但由于我们的水平有限，书中缺点、错误在所难免，殷切期望专家和广大读者给予批评指正。

编者

1996 年 5 月于开封

# 目　录






此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 第一章　函数与极限

高等数学是研究变量的数学.函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象.极限是对变量变化趋势的描述.本章将介绍函数、极限、连续这三个概念及其性质,把读者引入变量数学的境界.

## 第一节　函　　数

### 一、实数与数轴

随着生产的发展,人们对数的认识也逐步深入和发展.首先是自然数集,继而发展到整数集、有理数集,进一步发展到无理数集.自然数集 $N=\{1,2,3,\cdots\}$ 对加法运算是封闭的,但对减法运算却不封闭,因为注意两自然数之差未必是自然数,于是人们便把自然数集扩大到整数集 $Z=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$.整数集关于加法、减法、乘法运算是封闭的,而关于除法是不封闭的.人们又把整数集扩大到有理数集

$$Q=\left\{x \,\middle|\, x=\frac{p}{q},p\in Z,q\in N,p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}.$$

这样在有理数集范围内,我们就可以进行四则运算了.由于科学的进步,社会实践的需要,诸如计算开方、计算圆周率等,有理数集又不够用了,于是产生了无理数集.

以上所讲的这些数都可以在一条直线上形象地表示出来.设有一条水平直线,在这条直线上取一点 $O$,称为原点,规定一个正

方向(习惯上由原点向右的方向为正方向),再规定一个单位长度.这样一条具有原点、正方向和单位长度的直线称为**数轴**.如图1-1.

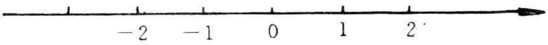


图 1-1

由初等几何可知,用直尺和圆规可将单位长度任意等分,因而对任何一个有理数$\frac{p}{q}$都可作出 $OA$ 的长度等于$\frac{p}{q}$,于是在数上轴上找到一个点 $A$,这个点称为有理点. $A$ 点是有理数$\frac{p}{q}$的几何表示,而有理数$\frac{p}{q}$是 $A$ 点的坐标. 这样,数轴上的一个有理点必对应一个有理数. 不难发现有理数具有稠密性,亦即在任何两个有理数 $a,b$(设 $a<b$)之间,总可以找到无穷多个有理数. 如取 $c=\frac{a+b}{2}$,则 $a<c<b$,同样在 $a,c$ 之间取 $d=\frac{a+c}{2}$,有 $a<d<c<b$,依次类推. 可见不管 $a,b$ 相差多么小,我们在 $a,b$ 之间总可找到无穷多个有理数. 尽管有理点在数轴上是处处稠密的,但尚未充满数轴. 非有理点在数轴上还有无穷多个,而且在数轴上也是处处稠密的. 例如 $\sqrt{2},\sqrt{2}+1,\sqrt{2}+0.1,\sqrt{2}+0.01,\sqrt{3}+1,\pi,\pi+0.1,\cdots$,这些点称为无理点. 无理点在数轴上的坐标称为无理数.

有理数和无理数统称为实数,全体实数记作 R. 可以证明实数充满整个数轴而没有空隙,也就是说实数具有稠密性、连续性. 这样,数轴上的点与实数集建立了一一对应关系,数轴上每一点都表示一个实数,而每一实数都对应着数轴上的一点.

## 二、绝对值、区间

1. 绝对值　一个实数 $x$ 的**绝对值**(记为$|x|$)定义为:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

$|x|$的几何意义是：$|x|$是表示数轴上的点 $x$ 到原点的距离.

绝对值及其运算有下列性质：

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$.

(2) $|x|\geqslant 0$.

(3) $|-x|=|x|$.

(4) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

事实上，$x>0$ 时，$-|x|<x=|x|$；$x<0$ 时 $-|x|=x<|x|$；$x=0$ 时 $-|x|=x=|x|$；所以有 $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

(5) 设 $a>0$，则下面两个集合相等：

$$\{x \mid |x|<a\}=\{x \mid -a<x<a\}.$$

事实上，它们在数轴上表示所有与原点的距离小于 $a$ 的点的集合，如图 1-2.

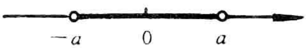



图 1-2

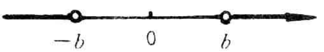



图 1-3

(6) 设 $b>0$，则下面两个集合相等：

$$\{x \mid |x|>b\}=\{x \mid x<-b\}\cup\{x|x>b\}.$$

事实上，它们在数轴上表示所有与原点的距离大于 $b$ 的点的集合，如图 1-3.

(7) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$.

因为由性质(4)，$-|x|\leqslant x\leqslant |x|$，$-|y|\leqslant y\leqslant |y|$. 两式相加得

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|,$$

由性质(5) 得

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|.$$

(8) $|x-y|\geqslant |x|-|y|$.

由于$|x|=|(x-y)+y|\leqslant|x-y|+|y|$，所以

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|.$$

(9) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.

(10) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$, $(y\neq0)$.

2. 区间

设$a,b\in\mathrm{R}$且$a<b$，数集$\{x\mid a<x<b\}$称为以$a$，$b$为端点的**开区间**，记为$(a,b)$，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

同样记区间$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，称为**闭区间**；

记区间$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$和$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，称为**半开区间**.

以上区间称为**有限区间**. 有限区间的长度等于$b-a$. 还有下面几类无限区间：

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\},$$
$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\},$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathrm{R}.$$

注意：$-\infty$，$+\infty$分别读作负无穷大、正无穷大，它们不是数，仅仅是记号.

3. 邻域

称数集$\{x\mid |x-x_0|<\delta,\delta>0\}$为点$x_0$的**$\delta$邻域**. 在数轴上它表示到点$x_0$的距离小于$\delta$的所有点的集合. 称$x_0$为邻域中心，$\delta$为邻域半径，如图 1-4.


图 1-4

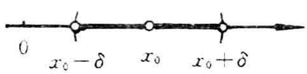


图 1-5

例如$\left\{x \mid |x-4|<\frac{1}{2}\right\}$即为以点$x_0=4$为中心，以$\frac{1}{2}$为半径的邻域，即开区间(3.5，4.5)

还常用到集合$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta, \delta>0\}$，称为点$x_0$的$\delta$去心邻域．如图1-5.

如$\{x \mid 0<|x-1|<2\}$，即为以$x_0=1$为中心，以2为半径的去心邻域$(-1,1)\cup(1,3)$.

## 三、函数的概念

在生产实践和科学实验过程中，我们常常可以直接或间接地观察到反映物质运动的各种各样的量，如长度、体积、重量、压力、温度、电流等．在所考虑的问题或过程中，有些量保持固定的值不变，这种量称为**常量**；还有些量可取不同的值，这种量称为**变量**．例如，把一个密闭容器内的气体加热，气体的体积和原有分子数保持不变，这是常量，而气体的温度和压力则是变量．我们还应注意，一个量是常量还是变量要根据情况来分析，要辩证地看问题．例如火车行驶的速度，在开始阶段或刹车阶段是变量，在正常行驶阶段变化很小，根据讨论问题的性质也可以看作常量．我们说，常量是变量的特殊情况．在教学中讨论的量，常抽去实际意义只考虑其数值，因此我们也分别把常量和变量称为常数和变数．一般用字母$a,b,c,\cdots$表示常数，用$x,y,z,s,t\cdots$表示变数．

在某些运动过程中，往往同时有几个变量，它们彼此之间并不孤立，而是相互联系、相互依赖，并按照一定的规律变化着．

**例1**　一根导线在输送电流过程中，电压和电流在变化着．按照欧姆定律，电压$U$与电流$I$成正比，也就是

$$I=\frac{U}{R} \quad 或 \quad U=IR.$$

R为常量，I为自变量，U为因变量

**例2**　一物体（可看作一质点）在自由下落过程中经过的路程$s$与时间$t$在变化着．按照伽利略定律，$s$和$t$之间有关系式



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$ 其g为常量，t为自变量，s为因变量

不难看出上面两个例子中 $I$ 与 $U$，$t$ 与 $s$ 存在着确定的对应关系. 把这种单值对应关系抽象化就得到函数概念.

**定义 1** 设 $D$ 是非空实数集. 若对任意 $x\in D$，按照一定的对应法则 $f$，都有唯一确定的实数 $y$ 与之对应，则称 $f$ **是定义在 $D$ 上的函数**，称 $D$ 为**定义域**，记为

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

称 $x$ 为自变量，$y$ 是因变量，也说 $y$ 是 $x$ 的函数值.

函数 $y=f(x)$ 的符号"$f$"表示 $x$ 与 $y$ 的对应规律，也是对 $x$ 的一种"运算法则". 在例 2 中，$s$ 和 $t$ 对应规律表示成 $s=f(t)=\frac{1}{2}gt^2$. 当 $t=3$(秒)时，

$$s=f(3)=\frac{1}{2}g\cdot 3^2=\frac{9}{2}g(\text{米}).$$

又如 $y=f(x)=2x^2+x$，这里的对应规律 $f$ 是把 $x$ 代入表达式 $2(\ )^2+(\ )$ 进行运算而得 $y$，如当 $x=2$ 时有 $y=f(2)=2(2)^2+2=10$. 当 $x=\frac{1}{t}$ 时，

$$y=f\left(\frac{1}{t}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{t}=\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t}.$$

可看出"$f$"是对应规律，其作用对象可以是常数、变数或者是函数. 其实 $x=\frac{1}{t}$ 就是一种函数关系，于是便得到复合函数的概念.

**定义 2** 若 $y$ 是 $u$ 的函数 $y=f(u)$，而 $u$ 又是 $x$ 的函数 $u=\varphi(x)$，则 $y=f(u)=f(\varphi(x))$ 是 $x$ 的函数. 称此函数为**由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数**，称 $u$ 为**中间变量**.

复合函数 $f(\varphi(x))$ 的定义域 $D$ 是由 $u=\varphi(x)$ 的定义域 $D_1$ 中的那些点 $x$ 组成的：点 $x$ 必须使 $\varphi(x)$ 的值落在 $f(u)$ 的定义域 $D_2$ 中.

**例 3** 简谐振动

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

是由函数为 $y=A\sin u$ 及 $u=\omega t+\varphi_0$ 复合而成的.其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

**例 4** $y=\sqrt{\lg x}$是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=\lg x$ 复合而成的.由于 $y=\sqrt{u}$ 的定义域是$(0,+\infty)$,故要使$\sqrt{\lg x}$有意义,须使 $\lg x\geqslant 0$,即 $x\geqslant 1$,所以 $y=\sqrt{\lg x}$的定义域为$[1,+\infty)$.

**例 5** 函数 $y=e^{\sqrt{1-x^2}}$是由 $y=e^u$,$u=\sqrt{v}$,$v=1-x^2$ 复合而成的复合函数,其定义域要求 $1-x^2\geqslant 0$,即 $x\in[-1,1]$.

利用复合函数的概念可以将一个较复杂的函数看作由几个简单函数复合而成,这样利于对函数进行研究.

**定义 3** 设函数 $y=f(x)(x\in(a,b))$值域为 $Z(f)$.若对任意 $y\in Z(f)$都有唯一确定的且满足 $y=f(x)$的 $x\in D$ 与之对应,则记这个单值对应为 $f^{-1}$.称 $x=f^{-1}(y)(y\in Z(f))$为 $y=f(x)$的**反函数**.

事实上,在反函数存在的条件下,具有函数关系的 $x$ 与 $y$,其对应是相互的,即 $f: x\to y$,$f^{-1}: y\to x$.

由于习惯用 $x$ 表示自变量,所以常把 $x=f^{-1}(y)$写成

$$y = f^{-1}(x).$$

当反函数的表达式为 $x=f^{-1}(y)$时,其图象与 $y=f(x)$的图象完全相同.当反函数表达式写成 $y=f^{-1}(x)$时,其图象与 $y=f(x)$的图象关于直线 $y=x$ 对称,如图 1-6.

**例 6** 求 $y=3x-1$ 的反函数.

**解**:由 $y=3x-1$ 解出 $x=\dfrac{y+1}{3}$.再将上式中的 $x$ 换成 $y$,$y$ 换成 $x$,所以 $y=\dfrac{x+1}{3}$是所求函数 $y=3x-1$ 的反函数.

一个函数如果有反函数,它必定是一一对应的.如在$(-\infty,$

$+\infty$)上 $y=x^2$ 不是一一对应的，所以它没有反函数，而在$(-\infty,0)$上有反函数 $y=-\sqrt{x}$，在$(0,+\infty)$上有反函数 $y=\sqrt{x}$.

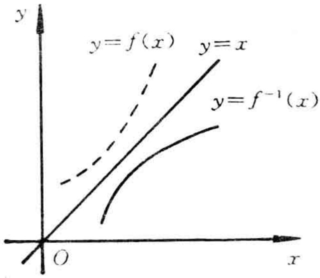


图 1-6

## 四、函数表示法

常用的函数表示法有解析法、表格法、图象法. 下面各举一例.

**例 7** $y=\dfrac{1}{x(x+1)}+\sqrt{9-x^2}$.

$D=[-3,-1)\cup(-1,0)\cup(0,3]$.

这是解析法.

**例 8** 某商场一年中各月副食品销售量(单位:百公斤). 这种函数关系可用表格法表示，见下表.

$D=\{1,2,3,\cdots,10,11,12\}$,

| 月份 $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 售量 $s$ | 81 | 84 | 45 | 45 | 9 | 6 | 6 | 15 | 94 | 101 | 144 | 120 |

**例 9** 某河道的断面图形如图 1-7 所示. 到岸边 $O$ 距离为 $x$ 的测量点其深度为 $y$. $D=[0,b]$. 图象法.

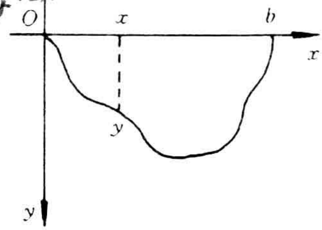


图 1-7

有些函数在其定义域内对不同的 $x$，不能用统一式子表达函数关系，而是要用两个或两个以上的式子表示. 这类函数称为**分段函数**. 如:

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}$$

都是定义在$(-\infty,+\infty)$的分段函数.其图形分别为图1-8,图1-9.

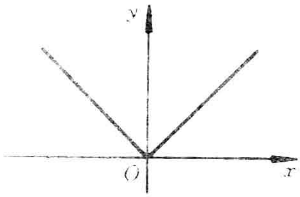


图 1-8

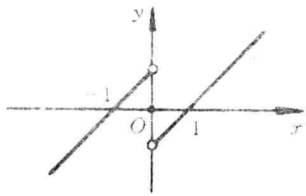


图 1-9

**例 10** 用分段函数表示函数 $y=3-|x-1|$.

解 由绝对值定义,当 $x-1<0$,即 $x<1$ 时,$|x-1|=-(x-1)$;当 $x-1\geqslant 0$,即 $x\geqslant 1$ 时,$|x-1|=x-1$.所以

$$y=\begin{cases}3-[-(x-1)], & x<1\\ 3-(x-1), & x\geqslant 1\end{cases}$$

即

$$y=\begin{cases}2+x, & x<1\\ 4-x, & x\geqslant 1\end{cases}$$

### 五、几类特殊函数

1. 奇函数、偶函数

**定义 4** 设有函数 $y=f(x)$,$x\in D$.

(1) 若对任意 $x\in D$ 有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

(2) 若对任意 $x\in D$ 有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形对称于 $y$ 轴.因为 $f(-x)=f(x)$,所以若点 $A(x,f(x))$,在图形上,则其关于 $y$ 轴的对称点 $A'(-x,f(-x))$ 也在图形上,见图 1-10.

奇函数的图形对称于原点.因为 $f(-x)=-f(x)$,所以点

$B(x,f(x))$ 与 $B'(-x,-f(x))$ 都在图形上.见图 1-11.

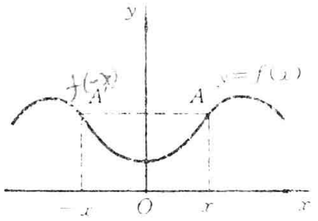


图 1-10

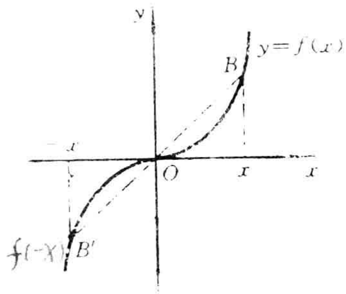


图 1-11

**例 11** 判断函数 $y=x^4+2x^2$ 的奇偶性.

**解**:因为 $f(-x)=(-x)^4+2(-x)^2=x^4+2x^2=f(x)$,所以 $y=x^4+2x^2$ 是偶函数.

例如,$y=\sqrt{1-x^2}$,$y=e^{-x^2}$,$y=\cos x$,$y=\dfrac{\sin x}{x}$,$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 等皆为偶函数.

例如,$y=x^3$,$y=\sqrt[3]{x}$,$y=\dfrac{2x}{1+2x^2}$,$y=\sin x$,$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 等皆为奇函数.

注意,函数并非仅有奇、偶两类,如 $y=x^3+1$ 就是非奇非偶函数.

2. 周期函数

**定义 5** 设函数为 $y=f(x)$.若存在正常数 $a$ 使得 $f(a+x)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**.满足等式的最小正数 $a$ 称为**函数的基本周期**(简称**周期**).

如 $y=\sin x$ 就是周期函数,周期为 $2\pi$.

3. 单调函数

**定义 6** 若函数 $y=f(x)$ 对区间 $(a,b)$ 内任意两点 $x_1,x_2$,当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称 $f(x)$ **在区间**

$(a,b)$ **内是单调增加的**(**或单调减少的**).

单调增加函数的图象随 $x$ 的增大而上升,单调减少函数的图象随 $x$ 的增大而下降.

同样可定义在无限区间上的单调函数.

例如 $y=x^2$ 在$(-\infty,0)$内是单调减少函数,在$(0,+\infty)$内是单调增加函数,在$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数. 函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的. 可见函数的单调性是针对某区间而言的.

4. 有界函数

**定义 7** 设有函数 $y=f(x)$,$x\in[a,b]$. 若存在正函数 $M$ 使得对任意 $x\in[a,b]$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ **在区间** $[a,b]$ **上有界**,或说 $f(x)$ 是 $[a,b]$ **上的有界函数**. 如果这样的 $M$ 不存在,则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界. $|f(x)|\le M$ 时,$f(x)$ 有界,这时 $-M\le f(x)\le M$ ∴ $f(x)$ 有上界 $M$ 和有下界 $-M$,反之若 $f(x)$ 有上界 $M$,下界 $-M$,则 $f(x)$ 为有界函数

例如,$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界,因为 $|\sin x|\leqslant 1$ 对一切实数成立.(这里可选 $M=1$,其实所有大于 1 的数都可作为 $M$.)

函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$内是无界的,因为不存在函数 $M$,使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对$(0,1)$内任意 $x$ 都成立. 但是 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$[1,+\infty)$上是有界的. 可见函数的有界性也是对某区间而言的.

闭区间上的连续函数一定有界

## 六、初等函数

1. 基本初等函数

**定义 8** 称常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数为**基本初等函数**.

(1) 常函数 $y=c$, $c$ 为常数.

(2) 幂函数 $y=x^a$, $a$ 为实数,定义域随 $a$ 而定.

(3) 指数函数 $y=a^x$, $a>0,a\neq1,x\in\mathrm{R}$.

(4) 对数函数 $y=\log_a x$, $a>0,a\neq1,x\in\mathrm{R}^+$(表示所有正



此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com