高等院校教材

理工农林专业通用教材

高等数学

（第二版）上册

习题解答

高等数学编写组　编

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

中国人民大学出版社

高等院校教材

理工农林专业通用教材

高等数学

（第二版）上册

习题解答

高等数学编写组　编

编者　张义侠　陈凡红　牛玉玲

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（第二版）（上册）习题解答/高等数学编写组编. —2版. —北京：中国人民大学出版社，2011.6

高等院校教材. 理工农林专业通用教材

ISBN 978-7-300-13931-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①高… Ⅲ.①高等数学-高等学校-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 116675 号

高等院校教材

理工农林专业通用教材

高等数学（第二版）（上册）习题解答

高等数学编写组　编

Gaodeng Shuxue Xiti Jieda

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　销	新华书店		
印　刷	北京昌联印刷有限公司	版　次	2009 年 9 月第 1 版
规　格	170 mm×228 mm　16 开本		2011 年 7 月第 2 版
印　张	11 插页 1	印　次	2011 年 7 月第 1 次印刷
字　数	197 000	定　价	19.80 元

前　言

本书是由中国人民大学出版社出版、高等数学编写组编写的《高等数学（第二版）》上册的配套习题解答。书中选入了覆盖面较全的不同深度的习题。每章后所附习题分（A）、（B）两部分。为了保证教学的基本要求，我们认为，习题（A）的大部分应作为学生作业；习题（B）可以根据不同层次、不同的教学要求选用其中少部分或大部分。

演算习题，一是为了熟练和巩固所学的基本知识；二是训练逻辑思维、分析、推理的能力；三是培养综合运用数学工具分析解决实际问题的能力。演算足够数量和深度的习题，是十分必要的，但是应注意，要首先把学过的数学内容充分复习，在对其概念理论和思维方法有较好的理解的前提下，再演算习题，这样，才能达到演算习题的上述目的。课后不复习，立刻做作业，不是正确有效的学习方法。面对习题，首先应尽可能独自分析、思考去求解这一问题，然后与解答核对运算结果正确与否，再加以认定或修正。只有在找不到思路、无法入手的情况下，才可以借助解答。在对所学基本内容没有理解的情况下去抄袭解答，这对学习知识毫无裨益，是自误的做法。

编写解答过程中，我们参考、借鉴了国内部分优秀的传统教材，如同济大学数学系主编的《高等数学》及中国人民大学赵树嫄教授主编的《微积分》等

书，在此谨致谢忱。

解答中编入了部分历届研究生入学考试考题，以备考研深造的读者复习、提高之用。

编者

目　录

第一章　函数 …… 1
第二章　极限与连续 …… 13
第三章　导数与微分 …… 40
第四章　微分中值定理及导数的应用 …… 63
第五章　不定积分 …… 92
第六章　定积分 …… 109
第七章　定积分的应用 …… 131
第八章　空间解析几何与向量代数 …… 151

第一章

函　　数

习 题 一 (A)

1. 写出集合 $\{1, 2, 3\}$ 的所有子集.

【解】 $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{1, 2\}$; $\{1, 3\}$; $\{2, 3\}$; $\{1, 2, 3\}$.

2. 设 $A=(-\infty, -5)\cup(5, +\infty)$, $B=[-10, 3)$, 写出 $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$ 及 $A-(A-B)$ 的表达式.

【解】 $A\cup B=(-\infty, 3)\cup(5, +\infty)$, $A\cap B=[-10, -5)$.

$A-B=(-\infty, -10)\cup(5, +\infty)$, $A-(A-B)=[-10, -5]$.

3. 设 A、B 是任意两个集合，证明摩根律 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

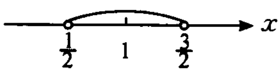
【证明】 $x\in\overline{A\cap B}\Longleftrightarrow x\notin A\cap B\Longleftrightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B$

$\Longleftrightarrow x\in\overline{A}$ 或 $x\in\overline{B}\Longleftrightarrow x\in\overline{A}\cup\overline{B}$.

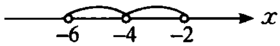
4. 试将下列各邻域在数轴上画出来，并用区间符号，不等式及绝对值不等式表示.

(1) 点 $x_0=1$ 的 $\delta=\frac{1}{2}$ 邻域 $U\left(1, \frac{1}{2}\right)$;

(2) 点 $x_0=-4$ 的 $\delta=2$ 的无心邻域 $\mathring{U}(-4, 2)$.

【解】 (1) 

$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$；$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$；$|x-1| < \frac{1}{2}$

(2) 

$(-6, -4) \cup (-4, -2)$；

$-6 < x < -4$ 或 $-4 < x < -2$；$0 < |x+4| < 2$

5. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \dfrac{1}{\ln(x-1)}$；　　(2) $y = \dfrac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$；

(3) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$；　　(4) $y = \sin\sqrt{x}$；

(5) $y = \tan(x+1)$；　　(6) $y = e^{\frac{1}{x}}$；

(7) $y = \sqrt{\lg \dfrac{5x - x^2}{4}}$.

【解】 (1) $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ \ln(x-1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1$ 且 $x \neq 2$，

即定义域为 $(1, 2) \cup (2, +\infty)$.

(2) $\begin{cases} 1 - x^2 \neq 0 \\ x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \geqslant -2 \end{cases}$，

即定义域为 $[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 1$ 或 $x \geqslant 3$，

即定义域为$(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.

(4) $x \geqslant 0$，即定义域为 $[0, +\infty)$.

(5) $x + 1 \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$，

即定义域为 $\left\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - 1, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

(6) $x \neq 0$，即定义域为$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(7) $\begin{cases} \dfrac{5x - x^2}{4} > 0 \\ \lg \dfrac{5x - x^2}{4} \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant 4$，即定义域为 $[1, 4]$.

6. 下列各对函数是否为同一函数？为什么？

(1) $f(x) = \lg x^2$，$g(x) = 2\lg x$；

(2) $f(x) = x$，$g(x) = \sqrt{x^2}$；

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$，$g(x) = x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=\lg(x^2-1)$，$g(x)=\lg(x+1)+\lg(x-1)$.

【解】 (1) 不同，因为定义域不同，前者定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，后者定义域为 $(0,+\infty)$.

(2) 不同，因为对应法则不同，$g(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$.

(3) 相同，因为定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}=x\sqrt[3]{x-1}$，对应法则相同.

(4) 不同，因为定义域不同，前者定义域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，后者的定义域为 $(1,+\infty)$.

7. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

【解】 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$，

$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\varphi(-2)=0$.

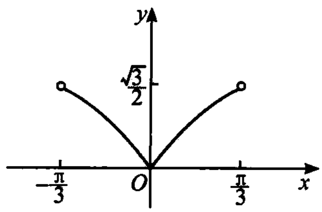


图 1—1

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1—1 所示.

8. 试证下列函数在指定区间内的单调性.

(1) $f(x)=x^5+x+4$，$(-\infty,+\infty)$；

(2) $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$，$(-\infty,1)$；

(3) $f(x)=-x+2|x|-4$，$(-\infty,+\infty)$.

【解】 (1) $f(x)=x^5+x+4$，$(-\infty,+\infty)$

设 x_1，x_2 为 $(-\infty,+\infty)$ 内任意两点，且 $x_1<x_2$，$f(x_2)-f(x_1)=x_2^5+x_2+4-(x_1^5+x_1+4)=(x_2^5-x_1^5)+(x_2-x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

(2) $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$，$(-\infty,1)$

$f(x)=\dfrac{2(x-1)+2}{x-1}=2+\dfrac{2}{x-1}$，设 x_1，x_2 为 $(-\infty,1)$ 内任意两点，

$$x_1<x_2<1,\ f(x_2)-f(x_1)=\frac{2}{x_2-1}-\frac{2}{x_1-1}=\frac{2(x_1-x_2)}{(x_2-1)(x_1-1)}$$

由于$(x_2-1)(x_1-1)>0$，$2(x_1-x_2)<0$，于是 $f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x_2)<f(x_1)$，所以 $f(x)$ 在$(-\infty,1)$ 内单调减少.

(3) $f(x)=-x+2\mid x\mid-4$，$(-\infty,+\infty)$

$f(x)=\begin{cases}x-4, & x\geqslant 0\\ -3x-4, & x<0\end{cases}$ 设 x_1，x_2 为$[0,+\infty)$ 内任意两点，且 $x_1<x_2$，$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-4)-(x_1-4)=x_2-x_1>0$，所以 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 内单调增加. 设 x_1，x_2 为$(-\infty,0)$ 内任意两点，且 $x_1<x_2$，$f(x_2)-f(x_1)=-3x_2-4-(-3x_1-4)=3(x_1-x_2)<0$，所以 $f(x)$ 在$(-\infty,0)$ 内单调减少.

9. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

【证明】 设$-l<x_1<x_2<0$，则$0<-x_2<-x_1<l$，由 $f(x)$ 是奇函数，得 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(-x_1)$，因为 $f(x)$ 在$(0,l)$ 内单调增加，所以 $f(-x_1)-f(-x_2)>0$，从而 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

10. 设下面所考虑的函数都定义在 $(-l,l)$ 上. 证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数.

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

【证明】 (1) 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均为偶函数，则 $f_1(-x)=f_1(x)$，$f_2(-x)=f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$，于是

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 是奇函数，则 $g_1(-x)=-g_1(x)$，$g_2(-x)=-g_2(x)$. 令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$，于是

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x),$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均为偶函数，则 $f_1(-x)=f_1(x)$，$f_2(-x)=f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$. 于是

$$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 为奇函数，则 $g_1(-x)=-g_1(x)$，$g_2(-x)=-g_2(x)$.

令 $G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$. 于是

$$G(-x)=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)]\cdot[-g_2(x)]$$
$$=g_1(x)\cdot g_2(x)=G(x),$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，则 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$. 令 $H(x)=f(x)\cdot g(x)$，于是

$$H(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)[-g(x)]$$
$$=-f(x)\cdot g(x)=-H(x),$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

11. 指出下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}+\cos x$；　　(2) $f(x)=x\sqrt{x^4-1}+\tan x$；

(3) $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$；　　(4) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}$；

(5) $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ 1+x, & x\geqslant 0\end{cases}$.

【解】 (1) 因为 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}+\cos x$，所以有

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}+\cos(-x)=\frac{\sin x}{x}+\cos x=f(x),$$

故 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}+\cos x$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(x)=x\sqrt{x^4-1}+\tan x$，所以有

$$f(-x)=-x\sqrt{(-x)^4-1}+\tan(-x)=-x\sqrt{x^4-1}+(-\tan x)$$
$$=-(x\sqrt{x^4-1}+\tan x)=-f(x),$$

故 $f(x)=x\sqrt{x^4+1}+\tan x$ 是奇函数.

(3) 因为 $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$，所以有

$$f(-x)=\lg[\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)]=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$$
$$=\lg\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$
$$=-\lg(\sqrt{x^2+1}-x)=-f(x),$$

故 $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$是奇函数.

(4) 令 $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}$，$f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{a^{-x}-a^x}=-\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=-f(x)$，

故$\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}$是奇函数.

(5)$f(-x)=\begin{cases}1+x,\ -x<0\\1-x,\ -x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}1+x,\ x>0\\1-x,\ x\leqslant 0\end{cases}=f(x)$，

故 $f(x)=\begin{cases}1-x,\ x<0\\1+x,\ x\geqslant 0\end{cases}$是偶函数.

12. 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$；　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=1+\sin\pi x$；　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$.

【解】 (1) 是周期函数，周期 $l=2\pi$.

(2) 是周期函数，周期 $l=\dfrac{\pi}{2}$.

(3) 是周期函数，周期 $l=2$.

(4) 不是周期函数.

(5) 是周期函数，周期 $l=\pi$.

13. 求下列函数的反函数及其定义域.

(1) $y=\dfrac{x+3}{x-1}$，$x\neq 1$；　(2) $y=x^3+7$，$x\in\mathbf{R}$；

(3) $y=\lg(1-2x)$，$x<0$；　(4) $y=\sqrt{25-x^2}$，$0<x<5$；

(5) $y=\log_4 2+\log_4\sqrt{x}$.

【解】 (1) 由函数式得：

$$x+3=(x-1)y\Rightarrow(1-y)x=-3-y\Rightarrow x=\frac{y+3}{y-1}\ (y\neq 1),$$

故所求反函数为 $y=\dfrac{x+3}{x-1}\ (x\neq 1)$.

(2) 由函数式得:$x^3=y-7$，即 $x=\sqrt[3]{y-7}$，$y\in(-\infty,+\infty)$，故所求反函数为 $y=\sqrt[3]{x-7}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) 由函数式得:$10^y=1-2x$，即 $x=\dfrac{1}{2}(1-10^y)$，由 $x<0$，得：

$$1-2x>1,\ y\in(0,+\infty).$$

故所求反函数为：$y=\frac{1}{2}(1-10^x)$，$x\in(0,+\infty)$.

(4) 由函数式 $y=\sqrt{25-x^2}$，$0<x<5$，得 $0<y<5$，且

$$y^2=25-x^2,\ x=\sqrt{25-y^2}.$$

故所求反函数为 $y=\sqrt{25-x^2}$，$x\in(0,5)$.

(5) 由函数式得：$y=\log_4 2\sqrt{x}\Rightarrow 2\sqrt{x}=4^y\Rightarrow 4x=4^{2y}\Rightarrow x=4^{2y-1}$，故所求反函数为 $y=4^{2x-1}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

14. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

【解】 设 $f(x)$ 在 X 上有界，即存在 $M>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant M,\ x\in X,$$

故 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in X$，即 $f(x)$ 在 X 上有上界 M 和下界 $-M$.

反之，设 $f(x)$ 在 X 上有上界 k_1 和下界 k_2，即 $k_2\leqslant f(x)\leqslant k_1$，$x\in X$，取 $M=\max\{|k_1|,|k_2|\}$，则有 $|f(x)|\leqslant M$，$x\in X$，即 $f(x)$ 在 X 上有界.

15. 指出下列函数可以看成由哪些函数复合而成.

(1) $y=\sqrt{3x-1}$； (2) $y=(1+\ln x)^5$；

(3) $y=e^{e^{-x^2}}$； (4) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$.

【解】 (1) $y=\sqrt{u}$，$u=3x-1$

(2) $y=u^5$，$u=1+v$，$v=\ln x$

(3) $y=e^u$，$u=e^v$，$v=-x^2$

(4) $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=\sqrt{x}$

16. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域.

(1) $f(x^2)$； (2) $f(\sin x)$；

(3) $f(x+a)(a>0)$； (4) $f(x+a)+f(x-a)\quad(a>0)$.

【解】 (1) $0\leqslant x^2\leqslant 1\Rightarrow x\in[-1,1]$.

(2) $0\leqslant\sin x\leqslant 1\Rightarrow x\in[2n\pi,(2n+1)\pi]$，$n\in\mathbf{Z}$.

(3) $0\leqslant x+a\leqslant 1\Rightarrow x\in[-a,1-a]$.

(4) $$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{当 }0<a\leqslant\frac{1}{2}\text{ 时，}x\in[a,1-a]\\\text{当 }a>\frac{1}{2}\text{ 时，定义域为 }\varnothing\end{cases}$$

17. 设 $f(x)=\begin{cases}10, & x<1\\ 1, & x=1,\\ 10^{-1}, & x>1,\end{cases}$ $g(x)=\lg x$，

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

【解】 $f[g(x)]=f(\lg x)=\begin{cases}10, & \lg x<1\\ 1, & \lg x=1\\ 10^{-1}, & \lg x>1\end{cases}$，

即 $f[g(x)]=\begin{cases}10, & 0<x<10\\ 1, & x=10,\\ 10^{-1}, & x>10\end{cases}$

$g[f(x)]=\begin{cases}\lg 10, & x<1\\ \lg 1, & x=1,\\ \lg 10^{-1}, & x>1\end{cases}$

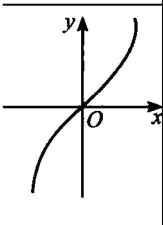
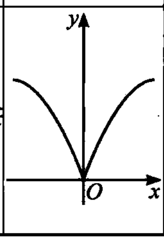
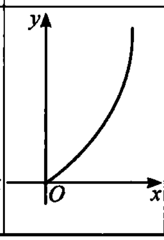
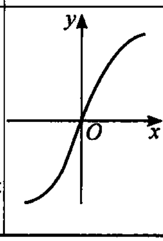
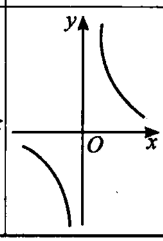
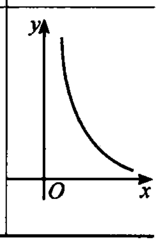
即 $g[f(x)]=\begin{cases}1, & x<1\\ 0, & x=1.\\ -1, & x>1\end{cases}$

18. 作下列各函数的草图.

(1) $y=x^3$；　(2) $y=x^{\frac{2}{3}}$；　(3) $y=x^{\frac{5}{2}}$；

(4) $y=x^{\frac{3}{5}}$；　(5) $y=x^{-3}$；　(6) $y=x^{-\frac{1}{2}}$.

【解】

(1) $y=x^3$	(2) $y=x^{\frac{2}{3}}$	(3) $y=x^{\frac{5}{2}}$	(4) $y=x^{\frac{3}{5}}$	(5) $y=x^{-3}$	(6) $y=x^{-\frac{1}{2}}$
					

19. 已知 $f(x)=\arcsin x$，求 $f(0)$；$f(-1)$；$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$；$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；$f(1)$.

【解】 $f(0)=\arcsin 0=0$；　$f(-1)=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$；

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$；　$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$；

$$f(1)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

20. 已知 $g(x)=\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{2}$，求 $g(0)$；$g(1)$；$g(-\sqrt{2})$；$g(-\sqrt{3})$；$g(-2)$.

【解】 $g(0)=\frac{1}{2}\arccos\frac{0}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$；

$g(1)=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$；

$g(-\sqrt{2})=\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{8}\pi$；

$g(-\sqrt{3})=\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{12}\pi$；

$g(-2)=\frac{1}{2}\arccos(-1)=\frac{1}{2}\times\pi=\frac{\pi}{2}$.

21. 已知 $h(x)=\arctan x$，求 $h(0)$；$h(1)$；$h\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$；$h(-\sqrt{3})$.

【解】 $h(0)=\arctan 0=0$；$h(1)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$；

$h\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{5}{6}\pi$；

$h(-\sqrt{3})=\arctan(-\sqrt{3})=\frac{2}{3}\pi$.

22. 写出 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 的定义域、单调性、奇偶性和值域.

【解】

	定义域	单调性	奇偶性	值域
$y=\arcsin x$	$[-1, 1]$	单调增加	奇函数	$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$
$y=\arccos x$	$[-1, 1]$	单调减少	无	$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$
$y=\arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	单调增加	奇函数	$-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$

23. 什么是初等函数？指出一例非初等函数.

【解】 基本初等函数经过有限次的四则运算或复合运算得到的函数称为初等函数.

分段函数一般不是初等函数，如

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ x+1, & x<0\end{cases}$$

只有个别的分段函数是初等函数，如

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

因为它是由 $f(x)=\sqrt{u}$，$u=x^2$ 复合而成的.

24. 拟建一个容积为 V 的长方体水池，设它的底为正方形，已知池底所用材料的单位面积造价是四壁所用材料的单位面积造价的 2 倍，试将总价表示成底边边长的函数.

【解】 设底边边长为 x，由题意知其高为$\dfrac{V}{x^2}$，设四壁的单位面积造价为 a 元 /m²，则建造该水池的总造价 y 为

$$y=4x\cdot\frac{V}{x^2}\cdot a+x^2\cdot 2a=\frac{4aV}{x}+2ax^2,\ x>0.$$

25. 收音机每台售价为90元，成本为60元，厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过100台的，每多订购1台，售价就降低1分，但最低价为每台75元.

(1) 将每台的实际售价 P 表示为订购量 x 的函数；

(2) 将厂方所获利润 L 表示成订购量 x 的函数；

(3) 某一商行订购了 1 000 台，厂方可获利润多少？

【解】 设订购 x 台，实际售价每台 P 元，厂方所获利润 L 元，则按题意，有：

当 $x\in[0,100]$ 时，$P=90$，$L=(90-60)x=30x$；

当 $x>100$ 时，超过 100 台的订购量为 $x-100$，售价降低 $0.01(x-100)$，但最低价为 75 元，即降价数不超过 $90-75=15$ 元.

故 $0.01(x-100)\leqslant 15\Rightarrow x\leqslant 1\,600$.

于是，当 $x\in(100,1\,600]$ 时，$P=90-0.01(x-100)=91-0.01x$，

$$L=(91-0.01x-60)x=31x-0.01x^2.$$

当 $x\in(1\,600,+\infty)$ 时，$P=75$，$L=(75-60)x=15x$

因此，有

$$(1)\ P=\begin{cases}90, & x\in[0,100]\\ 91-0.01x, & x\in(100,1\,600]\\ 75, & x\in(1\,600,+\infty)\end{cases}$$

$$(2)\ L=\begin{cases}30x, & x\in[0,100]\\ 31x-0.01x^2, & x\in(100,1\,600]\\ 15x, & x\in(1\,600,+\infty)\end{cases}$$

(3) $x=1\,000$, $L=31\times10^3-0.01\times10^6=21\times10^3$(元)

26. 求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的任意内接长方形的面积.

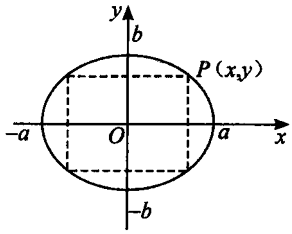


图 1—2

【解】　设长方形在第一象限中的顶点为 $P(x,y)$（见图 1—2），则长方形的面积应为 $A=(2x)(2y)=4xy$. $P(x,y)$ 应满足椭圆方程 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，所以

$$A=4xy=4x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$
$$=\frac{4b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}\quad(0<x<a)$$

习 题 一 (B)

1. 构成函数的两个要素是（**对应法则**）和（**定义域**）.

2. （**单调**）函数必有反函数，函数单调增加，反函数单调（**增加**）；函数单调减少，反函数单调（**减少**）.

3. $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的条件是 $y=f(u)$ 的定义域与 $u=\varphi(x)$ 的值域的交集为（**非空集**）.

4. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant0\\2x, & x<0\end{cases}$ 和 $g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\-2x, & x<0\end{cases}$，求当 $x\leqslant0$ 时的 $f[g(x)]$.

【解】　当 $x\leqslant0$ 时，$g(x)\geqslant0$，所以 $f[g(x)]=g^2(x)=(-2x)^2=4x^2$.

5. 奇函数 $f(x)$ 的周期为 6，已知 $f(-2)=4$，求 $f(-10)$.

【解】　$f(-10)=-f(10)=-f(-2+2\times6)=-f(-2)=-4$.

6. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，且 $f(1)=a$，又对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$.

(1) 用 a 表示 $f(2)$；

(2) a 为何值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数？

【解】　(1) 因为 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$.
所以 $f(-1+2)-f(-1)=f(2)$，又 $f(x)$ 为奇函数，故

$$f(1)+f(1)=f(2)，即\ f(2)=2a.$$

(2) 要使 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，必有
$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x+2)=f(x)$，$f(x+2)-f(x)=0$，又