

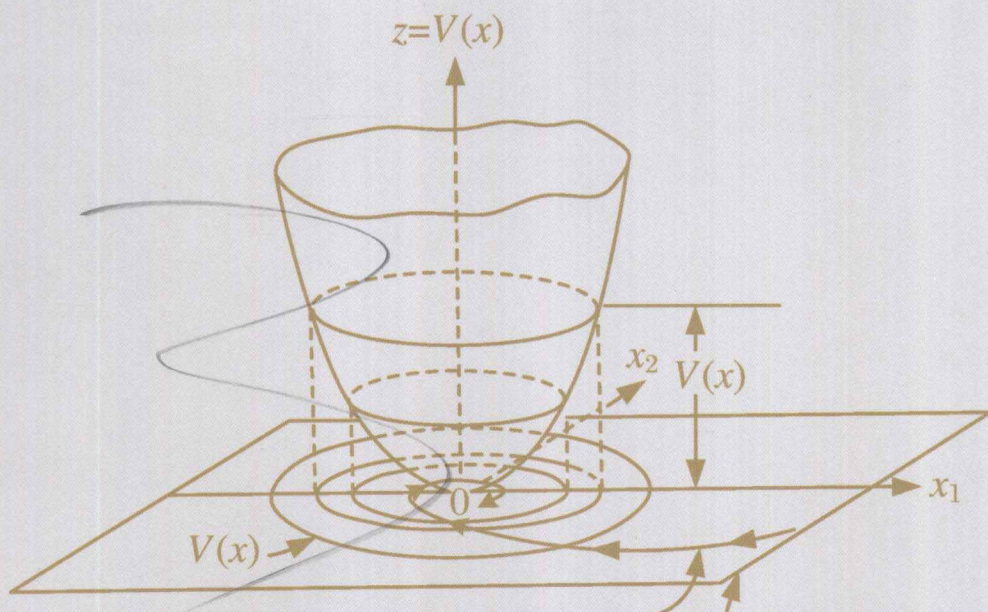
“十二五”国家重点图书出版规划项目
中国科学院指定考研参考书

中国科学技术大学 **精品** 教材

线性系统理论 and 设计

第2版

全茂达 编著



中国科学技术大学出版社



“十二五”国家重点图书出版规划项目
中科院指定考研参考书

中国科学技术大学 **精品** 教材

线性系统理论和设计

Linear System Theory and Design

第 2 版



学茂达 编著



内 容 简 介

由控制理论和电路理论专家创建起来的状态空间理论和多项式矩阵理论构成现代线性系统理论的基础,它已成为电子类专业、系统工程专业和控制专业高年级本科生和研究生的基础课程.本书的内容选自20世纪80年代至90年代国际上有影响的同类教材和权威杂志上的原始文献,同时参考了国内同类的优秀教材,并结合了作者教学和研究上的体会和浅见,差不多反映了这一领域20世纪50年代末期以来的主要成果.本书注重理论严谨、深入浅出、理论联系实际,列举了近150道与实际应用有关的例题,以便于读者自学.

本书不仅可作为电子类专业、系统工程专业和控制专业本科生和研究生的教材,也可作为理工科其他专业如经济管理专业本科生和研究生的教材,同时可供高校教师、厂矿企业工程师以及工程研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性系统理论和设计/全茂达编著. —2版. —合肥:中国科学技术大学出版社,2012.8
(中国科学技术大学精品教材)

“十二五”国家重点图书出版规划项目

中国科学院指定考研参考书

ISBN 978-7-312-03012-3

I. 线… II. 全… III. 线性系统理论—高等学校—教材 IV. O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 129617 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号,230026

<http://press.ustc.edu.cn>

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本:787 mm×1092 mm 1/16 印张:30 字数:748 千

1998 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 2 版 2012 年 8 月第 3 次印刷

定价:55.00 元

总 序

2008年,为庆祝中国科学技术大学建校五十周年,反映建校以来的办学理念和特色,集中展示教材建设的成果,学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列.在各方的共同努力下,共组织选题281种,经过多轮、严格的评审,最后确定50种入选精品教材系列.

五十周年校庆精品教材系列于2008年9月纪念建校五十周年之际陆续出版,共出书50种,在学生、教师、校友以及高校同行中引起了很好的反响,并整体进入国家新闻出版总署的“十一五”国家重点图书出版规划.为继续鼓励教师积极开展教学研究与教学建设,结合自己的教学与科研积累编写高水平的教材,学校决定,将精品教材出版作为常规工作,以《中国科学技术大学精品教材》系列的形式长期出版,并设立专项基金给予支持.国家新闻出版总署也将该精品教材系列继续列入“十二五”国家重点图书出版规划.

1958年学校成立之时,教员大部分来自中国科学院的各个研究所.作为各个研究所的科研人员,他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统.同时,根据“全院办校,所系结合”的原则,科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学,为本科生授课,将最新的科研成果融入到教学中.虽然现在外界环境和内在条件都发生了很大变化,但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变.正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针,并形成了优良的传统,才培养出了一批又一批高质量的人才.

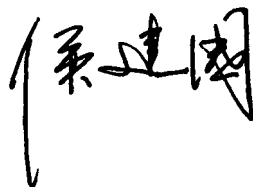
学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统,也是她特别成功的原因之一.当今社会,科技发展突飞猛进、科技成果日新月异,没有扎实的基础知识,很难在科学技术研究中作出重大贡献.建校之初,华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行,亲自为本科生讲授基础课.他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德,带出一批又一批杰出的年轻教员,培养了一届又一届优秀学生.入选精品教材系列的绝大部分是基础课或专业基础课的教材,其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响,因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神.

改革开放之初,学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习,他们在带回先进科学技术的同时,也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学,并以极大的热情进行教学实践,使“科学与技术相结合、理论与实践相结合、

教学与科研相结合”的方针得到进一步深化,取得了非常好的效果,培养的学生得到全社会的认可.这些教学改革影响深远,直到今天仍然受到学生的欢迎,并辐射到其他高校.在入选的精品教材中,这种理念与尝试也都有充分的体现.

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点,用创新的精神编写教材.进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生,针对他们的具体情况编写教材,才能更加有利于培养他们的创新精神.教师们坚持教学与科研的结合,根据自己的科研体会,借鉴目前国外相关专业有关课程的经验,注意理论与实际应用的结合,基础知识与最新发展的结合,课堂教学与课外实践的结合,精心组织材料、认真编写教材,使学生在掌握扎实的理论基础的同时,了解最新的研究方法,掌握实际应用的技术.

入选的这些精品教材,既是教学一线教师长期教学积累的成果,也是学校教学传统的体现,反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果.希望该精品教材系列的出版,能对我们继续探索科教紧密结合培养拔尖创新人才,进一步提高教育教学质量有所帮助,为高等教育事业作出我们的贡献.



中国科学技术大学校长
中国科学院院士
第三世界科学院院士

再 版 前 言

《线性系统理论和设计》初版于 1998 年,在使用过程中深受众多校内外师生和广大读者的喜爱,颇受好评,很快就销售一空,2004 年第二次印刷,现已告罄。该书 2000 年荣获“中国科学技术大学第七次优秀教材一等奖”,最近又喜悉入选 2011 年度“中国科学技术大学精品教材”,同时列入国家“十二五”重点图书出版规划项目。所有这些都对作者给予了莫大的鼓励和鞭策。值此再版之际,谨对校系各级领导、同仁和广大学子的厚爱与支持表示深深的谢意!进入 21 世纪以来,我国在政治、经济、科学和文化领域都取得了卓越的进步,例如,中国的航天事业已进入世界先进国家之列,中国已成为世界第二大经济体,所有这些都为深谙线性系统理论的人们提供了用武之平台,希望本书能为学习、研究这些理论的读者提供微薄的帮助。如是,鄙人甚感欣慰!

中国科学技术大学出版社对此次再版极为重视,组织了大量的人力、物力,在保持本书原貌的基础上进行了重新排版和绘图,使得它更便于阅读和使用;笔者也借此机会既做了一次更严谨的审核,也在措辞、语言表达上做了一些改进,努力对读者的厚爱给予回报。

全茂达

2012 年 7 月 29 日

前 言

线性系统理论初期是随着机电工程、控制理论和电子学的发展而发展的。20 世纪 50 年代后期,它伴随着航空航天、过程控制、最优控制、通信、电路和系统、控制和决策以及计量经济学等众多学科的发展而日益成熟,汇总这些学科具有共性的基本理论形成一门具有广泛应用性的独立学科。现在它已成为现代控制理论、网络理论、通信理论、管理科学等的基础,可以毫不夸张地说,它和技术科学、自然科学、社会科学有着广泛的联系,源于这三大科学又服务于这三大科学。线性系统理论内容非常广博,文献来源于许许多多专业学科的刊物。目前国外已经出版了相当多评价很高的优秀教材,参考文献中列举的[4-11]就是其中的一些。国内也出版了一些很好的教材,例如[27-29]。面对这种情况,要写出一本值得称赞的线性系统方面的教材,对作者来说实在是勉为其难。但是,为了教学工作的需要,为了让学生能有一本与教学相配套的教科书,也是为了提高教学质量,作者还是欣然接受了中国科学技术大学自动化系领导安排的编著任务。在编写过程中学习和参考了上述教材和一些原始文献,结合作者十年的教学体会和一些基本理论研究的浅见,费时整整一年半,舍弃了节假日的休息,终于完成了教材的编著。谨以此奉献给母校——中国科学技术大学——40 周年校庆,同时也奉献给亲爱的含辛茹苦的父母。

全书共分 10 章:数学基础;系统的状态空间模型;系统的状态响应和输出响应;系统的能控性和能观性;传递函数矩阵的状态空间实现;系统的稳定性;状态反馈和状态观测器;多项式矩阵和矩阵分式;系统的多项式矩阵描述(PMD)和传递函数矩阵性质;多变量反馈系统的设计。前 7 章内容(目次中*号注明的除外)是为高年级本科生准备的。第 1 章数学基础扼要地叙述线性代数和矩阵函数方面的内容,可根据具体情况适当分配课时,甚至不必在课堂讲授。其他 6 章内容差不多包括了 20 世纪 50 年代末期产生和随后发展起来的关于系统的状态空间理论的全部基本成果。这些内容已成为与系统理论有关的许多学科(如航天、航空、导弹、制导、过程控制、最优控制、通信、电路和系统、信号处理以至生物系统和经济系统等等)的基础知识,因此这些内容已成为理工科高年级学生必不可少的基础课程。其中大量的内容和例题与自动控制和电子学有着紧密的天然联系,因而特别适合自动控制专业和电子类专业高年级本科生。对于课时较多(如 80 学时)、接受状况良好的自动控制专业学生来说,*号注明的传递函数矩阵实现和状态反馈用于解耦控制系统设计等方面的内容也可以讲授。

后 3 章主要介绍 20 世纪 70 年代末期蓬勃发展起来的关于线性多变量系统的多项式矩阵理论和矩阵分式理论,这些理论兼容了古典的频域系统理论和现代的时域状态空间理论

两方面的优点,从而将现代系统理论又向前推进了一步.因此后3章内容为前述的诸学科提供了更为先进的新的基础理论,理所当然地成为自动控制专业、电子类专业以及相关专业研究生的基础知识,为这些专业的研究生在相关学科的前沿领域中从事创造性工作提供了有力工具.由于第10章的最后两节内容多半与具有稳健性的控制系统设计有关,本书特别适合自动控制专业研究生使用.

作者在编著本教材的过程中广泛地吸取国际上有影响同类教材的精华,虚心地参考国内同类优秀教材的有益见解,认真地阅读一些权威文献,结合作者本人的教学体会和浅见,力求取材在知识上具有基础性、先进性和实用性,自始至终注重理论的严谨,为引导学生进入高层次的理论研究,较快地占领科研的前沿阵地打下坚实的理论基础;同时又注重联系实际,帮助学生培养工程观点,从实际应用的角度去认识基本理论的本质和内涵,列举了大量与实际应用有关的例题.在教材内容的处理上不拘泥于某种特定的模式.例如考虑到学生已经学习过电路基本理论和自控原理,第2章到第4章的内容采取由一般到个别的阐述方式,即先讨论非线性时变的一般系统,然后讨论线性非时变的系统.而在第5章中,考虑到对学生来说实现是一个崭新的概念,采取由个别到一般的阐述方式,即先讨论单变量系统的实现,后讨论多变量系统的实现.前者可使学生高瞻远瞩,后者则遵循着循序渐进的原则.本教材的另一个特点是帮助学生将已学知识融会贯通,启发学生独立思考,对许多内容提出新颖的阐述方式,对许多定理提出更简洁的证明.例如关于预解矩阵算法的证明、互联系统的特征多项式,系统地表达网络或系统的多项式矩阵描述式,从几个不同角度阐述传递矩阵的极点和传输零点,等等.

本教材前3章初稿由研究生杨玲完成,她还绘制了前5章的许多系统框图.后7章的编著和全书的修改和定稿工作由本书作者完成.李嗣福教授审阅了全书的内容,此外,奚宏生教授审阅了前7章的内容,季海波副教授审阅了后3章的内容,鲍远律教授浏览了前5章的内容,作者对他们的帮助和建议表示十分感谢.同时还要指出,系主任孙德敏教授和副主任吴刚副教授对本书的出版给予了大力支持,在此一并表示感谢.最后对妻子江丽华和儿子全自强的支持和理解表示感谢.

全茂达

1998年4月14日于合肥

目 次

总序	(i)
再版前言	(iii)
前言	(v)
第 1 章 数学基础	(1)
1.1 集和线性空间	(1)
1.2 基和基底变换	(5)
1.3 向量范数、内积和格拉姆矩阵	(8)
1.4 线性变换及其矩阵表达式和范数	(11)
1.5 线性变换结构和线性代数方程组	(16)
1.6 特征值、特征向量和约尔当标准形	(18)
1.7 矩阵多项式和矩阵函数	(22)
习题 1	(29)
第 2 章 系统的状态空间模型	(34)
2.1 连续系统的输入-输出描述法	(35)
2.2 连续系统的状态空间描述法	(41)
2.3 连续系统的数学模型举例	(47)
2.4 线性离散系统	(56)
习题 2	(72)
第 3 章 系统的状态响应和输出响应	(77)
3.1 状态方程唯一解的存在条件	(77)
3.2 线性时变连续系统的状态转移矩阵和响应	(80)
3.3 线性非时变连续系统的状态转移矩阵和响应	(91)
3.4 模态、模态分解和状态转移轨迹	(98)
3.5 预解矩阵和系统响应的频域求解	(107)
3.6 线性离散系统的状态响应和输出响应	(113)
习题 3	(123)

第 4 章 系统的能控性和能观性	(128)
4.1 能控性和能达性	(128)
4.2 时间函数的线性关系	(130)
4.3 线性连续系统的能控性	(132)
4.4 能观性和能构性	(140)
4.5 线性连续系统的能观性	(141)
4.6 线性系统状态空间结构	(145)
4.7 线性非时变连续系统动态方程分解	(152)
4.8 线性非时变连续系统的能控性指数和能观性指数	(158)
4.9 线性离散系统的能达性、能控性和能观性、能构性	(162)
习题 4	(168)
第 5 章 传递函数矩阵的状态空间实现	(171)
5.1 实现和最小实现	(172)
5.2 传递函数的实现和最小实现	(177)
* 5.3 传递函数矩阵的约尔当形最小实现	(193)
* 5.4 传递函数矩阵的能控实现、能观实现和最小实现	(199)
* 5.5 传递函数矩阵的汉克尔矩阵最小实现法	(206)
习题 5	(211)
第 6 章 系统的稳定性	(214)
6.1 有界输入-有界输出稳定性	(214)
6.2 系统的平衡状态及其特征	(218)
6.3 线性系统平衡状态稳定性判据	(225)
6.4 李雅普诺夫直接法	(230)
6.5 李雅普诺夫函数的构造	(234)
* 6.6 李雅普诺夫直接法在线性系统中的应用	(241)
6.7 线性非时变离散系统的稳定性	(246)
习题 6	(249)
第 7 章 状态反馈和状态观测器	(253)
7.1 状态反馈配置反馈系统特征频率	(254)
7.2 状态反馈对系统性能的影响	(265)
* 7.3 状态反馈配置反馈系统特征向量	(272)
* 7.4 状态反馈用于解耦控制	(278)
7.5 状态估值和状态观测器	(285)
习题 7	(293)
第 8 章 多项式矩阵和矩阵分式	(296)
8.1 多项式及其互质性	(297)

8.2 行搜索法	(301)
8.3 多项式矩阵及其互质性	(307)
8.4 列(行)化简多项式矩阵和真有理函数矩阵互质分式	(317)
8.5 Smith 型、矩阵束和 Kronecker 型	(330)
习题 8	(338)
第 9 章 系统的多项式矩阵描述(PMD)和传递函数矩阵性质	(341)
9.1 线性多变量系统的 PMD	(341)
9.2 基于矩阵分式的状态空间实现	(346)
9.3 PMD 的状态空间实现和严格系统等价	(355)
9.4 传递函数矩阵性质	(365)
习题 9	(382)
第 10 章 多变量反馈系统的设计	(386)
10.1 组合系统的描述	(387)
10.2 组合系统的能控性和能观性	(396)
10.3 多变量反馈系统的稳定性	(406)
10.4 单位反馈系统串联补偿器设计	(415)
10.5 渐近跟踪和干扰抑制	(434)
10.6 输入-输出反馈补偿器设计	(444)
习题 10	(464)
参考文献	(468)
进一步参考文献	(470)

第 1 章 数 学 基 础

自 20 世纪 50 年代末期以来,许许多多控制理论专家和电网络理论专家纷纷投身于线性系统理论的研究,使之蓬勃发展,从而诞生了崭新的现代线性系统理论.这些专家们都善于用精确的数学语言描述所研究的对象,现代线性系统理论从它的诞生日起就和数学有着极紧密的联系.为了透彻理解和深入掌握现代线性系统理论,为了研究和吸收线性系统理论的最新成果,也为了教学的顺利完成和读者自学的方便,这里选择了与线性空间、线性变换、矩阵函数等有关的基本内容供读者回顾、参考.对这些内容熟悉的读者可跳过不看.希望有更多了解的读者可参考文献[1-3].

1.1 集和线性空间

“集”是数学中最基本的概念之一.集定义为具有相同属性事物的全体(或总和).集中的事物称为该集的元素.如果 A 是一个集, x 是 A 的元素,记作 $x \in A$;若 x 不是 A 的元素,则记作 $x \notin A$,或 $x \bar{\in} A$.今后运用 $\forall x \in A$ 表示集 A 中任一元素,或所有元素; $\exists x \in A$ 表示集 A 中存在元素 x .集可以用列举法表示,例如, $A = \{-1, 1\}$;也可以用描述法表示,例如为了说明集 R 是绝对值小于或等于 1 的实数集,可用式(1.1)形式注明,其中 r 是 R 的元素

$$R = \{r : |r| \leq 1\} \quad (1.1)$$

不包含任何元素的集称为空集,通常记为 $\emptyset$.

如果两个集中元素一一对应相等或相同,就说这两个集相等.例如, $A = \{-1, 1\}$ 和 $B = \{x : x^2 - 1 = 0\}$ 相等,记作 $A = B$.如果集 A 的元素都属于集 B ,称 A 是 B 的子集或说 A 包含于 B ,记作 $A \subset B$;也可以说 B 包含 A ,记作 $B \supset A$.由此可见 $A = B$ 的充要条件是 $A \subset B$,且 $B \subset A$.文献中常以此作为集 A 与集 B 相等的定义.若 $A \subset B$, B 中又确有元素不属于 A ,则称 A 为 B 的真子集.例如 A 是半径为 R 的圆, B 仅是该圆的周边, B 是 A 的真子集.规定空集是任何集的子集.任何一个非空集 $A \neq \emptyset$,至少具有两个子集: A 和 $\emptyset$.

集有四种基本运算:并、交、差和积.集 A 和集 B 的并记作 $A \cup B$,表示 A 与 B 所有的元素组成的集,即

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\} \quad (1.2)$$

集 A 与集 B 的交记作 $A \cap B$, 系 A 与 B 共有的元素组成的集, 即

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\} \quad (1.3)$$

集 A 与集 B 的差记作 $B - A$, 表示属于 B 但不属于 A 的元素组成的集, 即

$$B - A = \{x : x \in B \text{ 但 } x \notin A\} \quad (1.4)$$

集 A 与集 B 的积记作 $A \times B$, 表示属于 A 的元素 a 与属于 B 的元素 b 按先 a 后 b 的顺序构成有序对 (a, b) 所构成的集, 即

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} \quad (1.5)$$

注意, $A \times B$ 和 $B \times A$ 具有相同数目的元素, 但一般来说两者并不相等. 式(1.5)定义的积也称为笛卡儿积.

和集紧密联系的概念有群、环和域.

群 设 F 是一非空集, 如果在 F 中存在某种运算 $*$, 使得 $\forall a, b \in F, \exists c = a * b \in F$, 且满足下列条件则称为群.

(1) 结合律, 即 $\forall a_1, a_2, a_3 \in F$, 总有 $(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3)$.

(2) F 中有单位元素 e , 即 $\forall a \in F$, 总有 $e * a = a * e = a$.

(3) F 中有逆元素, 即 $\forall a \neq 0 \in F$, 总有元素 $\bar{a}$, 使得 $\bar{a} * a = a * \bar{a} = e$.

如果集 F 及其运算 $*$ 只满足结合律, 称 F 为半群. 若群 F 中元素还满足交换律, 即 $\forall a, b \in F$, 有 $a * b = b * a$, 则称群 F 为可交换群. 倘若运算 $*$ 为加法, 相应的群称为加法群, 若 $*$ 表示乘法, 相应的群就叫做乘法群. 加法群中单位元素 e 为 0, 称为零元素, a 的逆元素 $\bar{a} = -a$, 又称为 a 的负元素. 乘法群中单位元素为 1, a 的逆元素 $\bar{a} = 1/a = a^{-1}$.

环 设非空集 F 中规定了加法运算“+”和乘法运算“ $\times$ ”, 即 $\forall a, b \in F, \exists \alpha = a + b \in F$ 和 $\exists \beta = a \times b \in F$, 而且满足下列条件则称为环.

(1) 对加法而言, F 是可交换群.

(2) 对乘法而言, F 是半群.

(3) 加法和乘法联合运算时, 乘法对于加法满足分配律, 即

$$a_1 \times (a_2 + a_3) = a_1 \times a_2 + a_1 \times a_3, \quad \forall a_1, a_2, a_3 \in F$$

倘若环 F 还满足乘法交换律, 又称为可交换环.

域 若 F 不仅是可交换环, 而且对乘法而言又是可交换群, 则 F 称为域. 显然, 域 F 具有单位元素 $e = 1$ 和逆元素 $\bar{a} = a^{-1}$.

下面举例说明域的概念.

例 1.1 假定有一集 $\{0, 1\}$. 当我们用通常意义下的加法和乘法运算时, 它不称为域. 因为 $1 + 1 = 2$ 不在集 $\{0, 1\}$ 内. 然而, 当我们规定 $0 + 0 = 1 + 1 = 0, 1 + 0 = 1, 0 \times 1 = 0 \times 0 = 0, 1 \times 1 = 1$ 后, 可以证明伴随这种规定下的加法运算和乘法运算, 集 $\{0, 1\}$ 满足域的各种要求. 所以它被称为二元域.

例 1.2 假定有一形式如下的 2×2 矩阵集

$$\begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix}$$

其中 X 和 Y 是任意实数, 在通常意义的加法和乘法运算下, 它构成一个域. 这个域的加法单位元素和乘法单位元素分别是

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意,并不是所有的 2×2 矩阵集都能构成域.

从上述例子可见,组成域的元素可以是多种多样的,关键在于对这些元素能规定出合适的两种运算.本书将遇到的域是人们所熟知的:实数域 $\mathbf{R}$ 、复数域 $\mathbf{C}$ 和实系数有理函数域 $\mathbf{R}(s)$,加法运算和乘法运算均按通常意义规定之.注意,正实数集不构成域,因为它无加法逆;复数 s 的实系数多项式形成的集也不构成域,因为无乘法逆.它们均是可交换环,分别记以 $\mathbf{R}_+$ 和 $\mathbf{R}[s]$.

有了集和域的明确定义便可讨论线性空间或向量空间概念.假设有一个元素称为向量 x 的集 X 和一个元素为数的数域 F ,还假设在 X 中定义了向量加法(即 $\forall x_1, x_2 \in X$,便有唯一的向量 $x = x_1 + x_2 \in X$)以及 F 中的标量和 X 中向量间的标量乘法(即 $\forall x_1 \in X, \forall \alpha \in F$,便有唯一的向量 $x = \alpha x_1 \in X$),给出线性空间或向量空间定义如下:

线性空间(或向量空间) 当向量集 X 和数域 F 中元素进行的向量加和标量乘满足下面条件时,称 X 为域 F 上的线性空间(或向量空间),记以 (X, F) .

(1) 向量加和标量乘具有封闭性和唯一性,即

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in X, \quad \exists x = x_1 + x_2 \in X \\ \forall x_1 \in X \text{ 和 } \forall \alpha \in F, \quad \exists x = \alpha x_1 \in X \end{aligned}$$

(2) 向量加满足交换律和结合律,即

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_2 + x_1, \\ (x_1 + x_2) + x_3 &= x_1 + (x_2 + x_3), \end{aligned} \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in X$$

(3) X 中具有零向量 0 ,即

$$0 + x = x, \quad \forall x \in X$$

(4) 对于 X 中每一个向量 x ,总存在一个向量 $\bar{x}$,使得 $x + \bar{x} = 0$.

(5) 标量乘满足结合律,即

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \quad \forall \alpha, \beta \in F, \quad \forall x \in X$$

(6) 向量加和标量乘联合运算时满足分配律,即

$$\begin{aligned} \alpha(x_1 + x_2) &= \alpha x_1 + \alpha x_2, \quad \forall \alpha \in F \\ (\alpha + \beta)x_1 &= \alpha x_1 + \beta x_1, \quad \forall x_1, x_2 \in X \end{aligned}$$

(7) F 中有标量 1 ,使得

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \quad \forall x \in X$$

函数是今后常用的另一个基本概念.假设有两个非空集 X 和 Y ,如果对集 X 中每个元素 x 至多只对应 Y 中唯一的一个元素 y ,则称这种对应规律为函数,记以 $f: X \rightarrow Y$.函数赖以定义的 X 的子集叫做函数的定义域, Y 中对应定义域的子集叫做函数的值域.值域中 y 称作定义域中 x 的像,记以 $y = f(x)$.用笛卡儿积又可以这样定义:设 d_f 是 $X \times Y$ 的一个子集,若对于 X 中的每个元素 x , d_f 中至多只有一个元素 (x, y) 与之对应,则称这种对应关系 $y = f(x)$ 为由 X 到 Y 的函数,即

$$d_f = \{(x, y) : y = f(x), \forall x \in X\} \subset X \times Y$$

例如图 1.1(a)中曲线 f 是一个函数.它的定义域是 x 轴的子集 $(0, 3\pi)$,值域是 y 轴的

子集 $(-1, 1)$, $y = \sin x$.

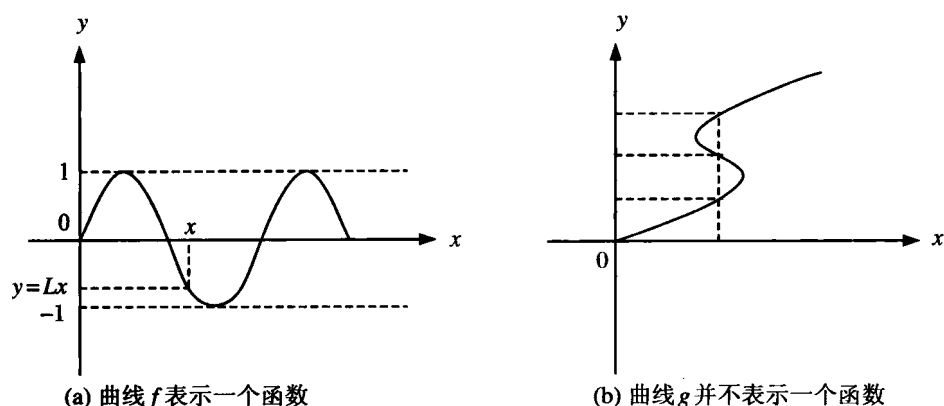


图 1.1

但是,图 1.1(b)中曲线 g 不是函数.因为对于 x 轴中某些 x ,有两个或三个 y 值与之对应.函数有时也被称为映射、变换或算子.数学书上常常要求函数 $y = f(x)$ 从数域 X 映射到数域 Y 上.这里和文献[4]一样,视这些术语为同义词而不强调它们之间细微差别.

如果函数 $f: X \rightarrow Y$ 中, X 系 n 个集 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的笛卡儿积,它还可以写成

$$f: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y \quad (1.6)$$

若 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 分别为集 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的元素,则函数 f 使 X 中每个有序数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与 Y 中某个唯一的元素 y 发生了如下关系:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.7)$$

故函数 $f: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ 是一个由 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 到 Y 的多变量函数.例如,函数 $z = f(x, y)$,若 x, y 和 z 皆为实数,即均为实数集 $\mathbf{R}$ 中元素,则可写成

$$f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{或} \quad f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \quad (1.8)$$

现在回过头来按照向量空间的定义,介绍一些关于向量空间的例子.

例 1.3 一个域若以其自身的加法运算和乘法运算定义向量加和标量乘,则构成该域上的向量空间,例如实数域 $\mathbf{R}$ 形成以 $\mathbf{R}$ 为域的向量空间 $(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. 同样,复数域 $\mathbf{C}$ 形成以 $\mathbf{C}$ 为域的向量空间 $(\mathbf{C}, \mathbf{C})$. 注意, $(\mathbf{C}, \mathbf{R})$ 是向量空间,但是 $(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ 不是. $(\mathbf{R}(s), \mathbf{R}(s))$ 和 $(\mathbf{R}(s), \mathbf{R})$ 也是向量空间,但是 $(\mathbf{R}, \mathbf{R}(s))$ 不是.

例 1.4 定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的分段连续实函数在实函数域 $\mathbf{R}$ 上构成向量空间,其向量加和标量乘按通常方法定义.这个向量空间称作实函数空间.

例 1.5 已知一域 F , 令 F^n 是所有 n 个标量组成如式(1.9)中列 x_i 的集,其中第一个下标 $k, k=1, 2, \dots, n$, 表示 x_i 的第 k 个分量,第二个下标 i 表示 F^n 中的第 i 个元素.如果向量加和标量乘定义如式(1.10)所示:

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ki} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} x_{1i} + x_{1j} \\ x_{2i} + x_{2j} \\ \vdots \\ x_{ni} + x_{nj} \end{bmatrix}, \quad \alpha \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \alpha x_{1i} \\ \alpha x_{2i} \\ \vdots \\ \alpha x_{ni} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

那么 (F^n, F) 便是一个向量空间. 倘若 $F = \mathbf{R}$, $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ 称做 n 维实向量空间; 倘若 $F = \mathbf{C}$, 则 $(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ 称做 n 维复向量空间. 再若 $F = \mathbf{R}(s)$, $(\mathbf{R}^n(s), \mathbf{R}(s))$ 便称做 n 维有理空间, 或 n 维实系数有理函数空间.

例 1.6 设 W 为由所有标量函数 $u: S \rightarrow F$ 所构成的集, 其中 S 为任意非空集, 对于任何 $s \in S$ 有 $u(s) \in F$. 若定义向量加和标量乘如下所示:

$$\begin{aligned} (u + v)(s) &= u(s) + v(s), \quad s \in S, \quad u, v \in W \\ (\alpha u)(s) &= \alpha u(s), \quad \alpha \in F, \quad u \in \overline{W} \end{aligned} \quad (1.11)$$

则 (W, F) 构成一向量空间.

设 (X, F) 是一线性空间, Y 是 X 的子集, 倘若在 (X, F) 的运算定义下, Y 也构成 F 上的空间, 则称 (Y, F) 是 (X, F) 的子空间. 判别 Y 是 X 的子空间的充要条件是: (a) Y 是非空集; (b) Y 在向量加和标量乘下皆是封闭的. 即 $\forall y_1, y_2 \in Y, \exists y = y_1 + y_2 \in Y$; $\forall y_1 \in Y$ 和 $\alpha \in F, \exists y = \alpha y_1 \in Y$. 或者, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F$ 和 $\forall y_1, y_2 \in Y, \exists y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in Y$. 例如在二维实向量空间 $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ 中, 每一条过原点的直线皆是 $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ 的子空间. 又如实向量空间 $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ 是向量空间 $(\mathbf{C}^n, \mathbf{R})$ 的子空间.

1.2 基和基底变换

每一个几何平面都可用两条互相垂直并具有同样标尺的轴表示. 借助于这样的两条轴就可指明平面中的每个点或每个向量. 本节将把这一概念推广到一般的线性空间. 在线性空间中, 坐标系被称为基. 基向量并不一定彼此垂直, 也可能有不同的标尺. 在引出基概念之前, 首先介绍向量的线性相关与线性无关的定义.

线性相关与线性无关 设向量空间 (X, F) 中有一组向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, 如果在 F 中存在一组不全为 0 的标量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 使得

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0} \quad (1.12)$$

那么就称这一组向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ 线性相关; 相反, 只有当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ 时, 式

(1.12)才成立,则称这组向量线性无关.

由定义可见,线性相关不仅取决于向量集 X ,也依赖于域 F .例如,按下面定义的向量集 $\{x_1, x_2\}$

$$x_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ s+1 \\ 1 \\ s+2 \end{bmatrix}, \quad x_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} s+2 \\ (s+1)(s+3) \\ 1 \\ s+3 \end{bmatrix}$$

在实系数有理函数域中是线性相关的.例如,选择

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = \frac{s+3}{s+2}$$

可使 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$.然而,在实数域中,它们线性无关.由定义可看出,如果 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 线性相关,至少有一个向量可用其他向量的线性组合表示.不过未必每一个向量都可用其他向量的线性组合表示.

向量空间的维数 向量空间 (X, F) 中线性无关向量的最大数目称做向量空间 (X, F) 的维数,记作 $\dim X$.

前面提到的 n 维实向量空间 $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ 就因为它最多只有 n 个线性无关的向量.有些情况下向量空间的维数有无穷多个.例如定义在 $(-\infty, \infty)$ 区间内的所有分段连续实函数形成的函数空间是无限维的.以 t^n 函数为例,欲使

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t^i = 0, \quad -\infty < t < \infty$$

必须每一个 α_i 都是零.在这个函数空间中还有无穷多个类似这样的函数.

基 设 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是向量空间 (X, F) 中一组线性无关向量,且 X 中每个向量 x 均可用它们的唯一的线性组合方式表达,则 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 称为 X 的基.基常用符号 $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ 表示.

显见, n 维向量空间 X 中任意一组 n 个线性无关向量均有资格作为基.一旦 $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ 选定后,就说 X 由基 $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ 张成,即

$$X = \text{span}(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

倘若 n 维向量空间 X 有两个基 $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ 和 $\bar{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$, X 中某个向量 x 在 E 和 $\bar{E}$ 下分别表示成

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = (e_1, e_2, \dots, e_n) \alpha \quad (1.13)$$

和

$$x = \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i \bar{e}_i = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) \bar{\alpha} \quad (1.14)$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$, $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n)^T$, T 表示转置.由于式(1.13)和(1.14)表达的是同一个向量, α 和 $\bar{\alpha}$ 之间应有一定的关系.因此,我们必须知道用 $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ 表达 $\bar{e}_i, i=1, 2, \dots, n$ 的表达式和用 $\bar{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ 表达 $e_j, j=1, 2, \dots, n$ 的表达式.假定后一种表达式如下: