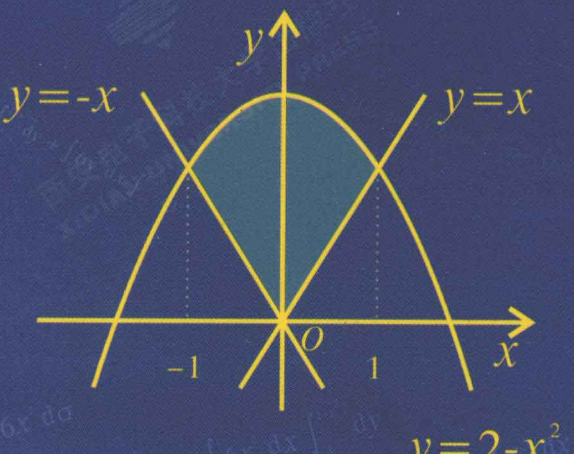
高等数学学习指导及习题解析

主　编　李尧
副主编　马继丰　伊晓玲
主　审　乔宝明



西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等数学
学习指导及习题解析

主　编　李　尧
副主编　马继丰　伊晓玲
主　审　乔宝明

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

高等数学是理工、经济、管理等各类专业学生必修的一门课，也是非常重要的一门基础理论课。本书是针对高校教材《高等数学(经管类)》(西北大学出版社出版，周家良、王群智主编)编写的学习辅导书，全书内容分为11章，每一章包含三个模块：知识梳理、重点解析、习题全解。三大模块系统、精练地总结了各章应该掌握的重点、难点问题，并对课后习题加以详细解析，能帮助学生更好、更快地掌握教材中的知识。

本书内容全面、体系合理、逻辑性强、结构紧凑、文字简洁，可作为经济、管理类专业学生学习高等数学的辅导用书，也可作为硕士研究生入学考试的复习用书及教师讲授高等数学课程的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导及习题解析/李尧主编. 一西安：西安电子科技大学出版社，2012.3

ISBN 978-7-5606-2725-0

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①高等数学一高等学校一教学参考资料

Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 278561 号

策　　划　王　飞

责任编辑　王　飞　毛红兵

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071

网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西天意印务有限责任公司

版　　次　2012年3月第1版　2012年3月第1次印刷

开　　本　787毫米×960毫米　1/16　印张 18

字　　数　363千字

印　　数　1～3000册

定　　价　30.00元

ISBN 978-7-5606-2725-0/O·0122

XDUP 3017001-1

前　言

高等数学作为高校各专业学生必修的一门重要基础课，具有不可替代的重要地位。本书是周家良、王群智老师编写的《高等数学(经管类)》教材的配套辅导书。按照教材章节顺序，全书分为11章，每一章涵盖知识梳理、重点解析、习题全解三大模块的内容。

本书根据独立院校经管类等非理工类专业学生的特点，对全书的内容进行了严格的选择和合理的安排。在每一章的"知识梳理"模块中，将所要掌握的主要内容用树状图详细地罗列出来，可使学生全面、直观地理清全章内容结构；在"重点解析"模块中，把每一章的重点内容加以总结归纳，帮助学生更快地掌握重点理论知识；在"习题全解"模块中，对每一道课后习题都进行了详细的解析，以解决学生在解答习题过程中遇到的各种问题。

本书由李尧担任主编，由马继丰、伊晓玲担任副主编。本书第1章至第3章由李尧执笔；第4章至第6章由马继丰执笔；第7章至第9章由伊晓玲执笔；第10章至第11章由乔宝明执笔。全书由乔宝明主审。本书从编写到出版的过程中，得到西安科技大学高新学院屈钧利、刘仰平、刘国才等诸位老师的大力支持和指导，在此表示深深的谢意。

本书内容全面、体系合理、逻辑性强、结构紧凑、文字简洁，可作为经济、管理类专业学生学习高等数学的辅导用书，也可作为硕士研究生入学考试的复习用书及教师讲授高等数学课程的教学参考书。

限于编者水平，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

李　尧

2011年6月

目　　录

第 1 章　实数与函数 …… 1
一、知识梳理 …… 1
二、重点解析 …… 2
三、习题全解 …… 4
基础篇 A 组 …… 4
提高篇 B 组 …… 19
第 2 章　极限与连续 …… 23
一、知识梳理 …… 23
二、重点解析 …… 24
三、习题全解 …… 27
基础篇 A 组 …… 27
提高篇 B 组 …… 50
第 3 章　导数与微分 …… 56
一、知识梳理 …… 56
二、重点解析 …… 56
三、习题全解 …… 60
基础篇 A 组 …… 60
提高篇 B 组 …… 94
第 4 章　中值定理与导数的应用 …… 97
一、知识梳理 …… 97
二、重点解析 …… 97
三、习题全解 …… 99
基础篇 A 组 …… 99
提高篇 B 组 …… 112
第 5 章　不定积分 …… 115
一、知识梳理 …… 115
二、重点解析 …… 115
三、习题全解 …… 118
基础篇 A 组 …… 118
提高篇 B 组 …… 133
第 6 章　定积分 …… 135
一、知识梳理 …… 135

二、重点解析 …… 135
三、习题全解 …… 138
基础篇 A 组 …… 138
提高篇 B 组 …… 159
第 7 章　无穷级数 …… 162
一、知识梳理 …… 162
二、重点解析 …… 162
三、习题全解 …… 167
基础篇 A 组 …… 167
提高篇 B 组 …… 196
第 8 章　多元函数的微分法及其应用 …… 200
一、知识梳理 …… 200
二、重点解析 …… 200
三、习题全解 …… 204
基础篇 A 组 …… 204
提高篇 B 组 …… 227
第 9 章　重积分 …… 232
一、知识梳理 …… 232
二、重点解析 …… 232
三、习题全解 …… 234
基础篇 A 组 …… 234
提高篇 B 组 …… 248
第 10 章　微分方程 …… 249
一、知识梳理 …… 249
二、重点解析 …… 249
三、习题全解 …… 252
基础篇 A 组 …… 252
提高篇 B 组 …… 269
第 11 章　差分方程初步 …… 273
一、知识梳理 …… 273
二、重点解析 …… 273
三、习题全解 …… 274
基础篇 A 组 …… 274
提高篇 B 组 …… 280
参考文献 …… 282

第1章 实数与函数

一、知识梳理

- 实数与函数
  - 1.1 预备知识
    - 1.1.1 实数及其几何表示
    - 1.1.2 实数的绝对值及其基本性质
    - 1.1.3 区间与邻域
  - 1.2 函数的概念
    - 1.2.1 常数与变量
    - 1.2.2 函数的定义
    - 1.2.3 确定函数的两个要素
      - 定义域
      - 对应法则
    - 1.2.4 函数的表示方法
      - 图示法
      - 表格法
      - 公式法
  - 1.3 函数的几何特征
    - 1.3.1 单调性
      - 单调递增 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$
      - 单调递减 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$
    - 1.3.2 有界性
      - 有界 $|f(x)|\leqslant M$
      - 无界
    - 1.3.3 奇偶性
      - 奇函数 $f(-x)=-f(x)$
      - 偶函数 $f(-x)=f(x)$
    - 1.3.4 周期性：周期函数 $f(x+T)=f(x)$
  - 1.4 反函数 $x=f^{-1}(y)$，$y\in R(f)$
  - 1.5 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$
  - 1.6 初等函数
    - 1.6.1 基本初等函数
    - 1.6.2 初等函数
  - 1.7 几类常见的经济函数简介
    - 1.7.1 需求函数与供给函数
    - 1.7.2 总成本函数与总收入函数

二、重 点 解 析

1.1 预备知识

1.1.1 实数及其几何表示

R(实数集)	Q(有理数集)
N(自然数集)	N_+(正整数集)
Z_+(正整数集)	Z_-(负整数集)

1.1.2 实数的绝对值及其基本性质

设 x 为一实数，则 x 的绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geqslant 0 \end{cases}$$

设 x，y 为实数，则 $|x \pm y| \leqslant |x| + |y|$，$||x| - |y|| \leqslant |x-y|$。

1.1.3 区间与邻域

区间是用得较多的一类数集。

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a, b)，即

$$(a, b) = \{x|a < x < b\}$$

a 和 b 称为开区间的端点，这里 $a \notin (a, b)$，$b \notin (a, b)$；数集 $\{x|a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a, b]$，即

$$[a, b] = \{x|a \leqslant x \leqslant b\}$$

邻域也是一个经常用到的概念。

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$。

1.2 函数的概念

1.2.1 常量与变量

定义：在变化过程中保持不变，只取某个固定数值，这种量叫做常量；在变化过程中不断变化，可以取不同的数值，这种量叫做变量。

1.2.2 函数的定义

定义：设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$。数集 D 叫做这

个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量。

1.2.3 确定函数的两个要素

定义域和对应法则是确定函数的两个要素。

1.2.4 函数的表示方法

函数的表示方法通常有三种，即图示法、表格法和公式法。

1.3 函数的几何特征

1.3.1 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对任意的两点 x_1，$x_2 \in I$，且 $x_1 < x_2$，总有：

(1) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增；

(2) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调递减。

1.3.2 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在正数 M，使得对任意的 $x \in I$，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，否则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界。

1.3.3 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在一个关于原点对称的实数集 D 内有定义。

(1) 如果对任意的 $x \in D$，都有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；

(2) 如果对任意的 $x \in D$，都有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数。

1.3.4 周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个非零常数 T，使得对于定义域内任意一点 x，都有 $f(x+T) = f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，满足上式的最小正数 T_0 称为函数的周期。

1.4 反函数

定义：设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $D(f)$，值域是 $R(f)$，如果对于任意的 $y = R(f)$，都存在 $D(f)$ 中唯一的一个满足 $y = f(x)$ 的 x 与之对应，这样确定的定义域为 $R(f)$，值域为 $D(f)$，以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称为函数 $y = f(x)$ 的反函数，并记作 $x = f^{-1}(y)$，$y \in R(f)$，而称 $y = f(x)$ 为直接函数。

1.5 复合函数

定义：设 y 是 u 的函数，即 $y = f(u)$，而 u 是 x 的函数，即 $u = \varphi(x)$，且 $D(f) \cap R(\varphi) \neq \varnothing$（空集），则 y 通过 u 也是 x 的函数，即 $y = f[\varphi(x)]$，称此函数是由 $y = f(u)$ 与

$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，并称 u 为中间变量，x 为自变量。

1.6 初等函数

1.6.1 基本初等函数

通常把常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数称为基本初等函数。

1.6.2 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算所得到，并且能够用一个数学式子表示的函数统称为初等函数。

1.7 几类常见的经济函数简介

1.7.1 需求函数与供给函数

定义：需求就是消费者在各种可能的价格下，对某种商品愿意并且能够购买的数量，即需求量 Q_d是价格 p 的函数 $Q_d=f_d(p)$，称此函数为需求函数。

定义：供给是指厂商在各种可能价格下，对某种产品愿意并能够提供的数量。影响供给量的重要因素是商品的价格，记商品供给量为 Q_s，则称 $Q_s=f_s(p)$为供给函数，其中 p 为商品的价格。

1.7.2 总成本函数、总收入函数

定义：总成本是指生产一定数量的某种产品所需投入的总费用，它是产量的函数，一般用 C 表示。设某种产品产量为 x 时所需要的总成本为 $C=C(x)$，称为总成本函数，简称成本函数。

定义：总收入是指厂商出售一定数量的商品后所得到的全部收入，通常用 R 表示。设 p 为商品的价格，x 为商品量，于是有 $R=R(x)=x\cdot p(x)$，称为总收入函数。

三、习 题 全 解

基础篇 A 组

1. 求下列函数的定义域，并用区间表示。

(1) $y=\sqrt{x+5}$　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2+x-2}$

(3) $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$　　(4) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(5) $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$

(6) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$

(7) $y=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+\dfrac{1}{1-\ln x}$

(8) $y=\arccos\ln(3x)$

解 (1) $y=\sqrt{x+5}$

由题意得

$$x+5\geqslant 0$$

求得 $x\geqslant -5$，即

$$D(x)=[-5, +\infty)$$

(2) $y=\dfrac{1}{x^2+x-2}$

由题意得

$$x^2+x-2\neq 0$$

求得 $x\neq -2$，$x\neq 1$，即

$$D(x)=(-\infty, -2)\cup(-2, 1)\cup(1, +\infty)$$

(3) $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$

由题意得

$$x\neq 0,\quad 1-x^2\geqslant 0$$

求得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，且 $x\neq 0$，即

$$D(x)=[-1, 0)\cup(0, 1]$$

(4) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

由题意得

$$1-x\neq 0,\quad \frac{1+x}{1-x}\geqslant 0$$

求得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，且 $x\neq 1$，即

$$D(x)=[-1, 1)$$

(5) $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$

由题意得

$$2+x\geqslant 0,\ 1-x>0,\ \lg(1-x)\neq 0$$

求得 $-2\leqslant x<0$，$0<x<1$，即

$$D(x)=[-2, 0)\cup(0, 1)$$

(6) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$

由题意得 $\left|\frac{x-1}{2}\right|\leqslant 1$，$x^2-x-2>0$

求得 $2<x\leqslant 3$，即

$$D(x)=(2,3]$$

(7) $y=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+\frac{1}{1-\ln x}$

由题意得

$$x>0,\quad 1-\ln x\neq 0$$

求得 $0<x<e$，$x>e$，即

$$D(x)=(0,e)\cup(e,+\infty)$$

(8) $y=\arccos\ln(3x)$

由题意得

$$3x>0,\ |\ln 3x|\leqslant 1$$

求得 $\frac{1}{3e}\leqslant x\leqslant\frac{e}{3}$，即

$$D(x)=\left[\frac{1}{3e},\frac{e}{3}\right]$$

2. 已知 $y=f(x)$的定义域是[0，1]，求下列函数的定义域。

(1) $f(x-4)$　　(2) $f(\lg x)$

(3) $f(\sin x)$

解　(1) $f(x-4)$

由题意得

$$0\leqslant x-4\leqslant 1$$

整理得 $4\leqslant x\leqslant 5$，即

$$D(x)=[4,5]$$

(2) $f(\lg x)$

由题意得

$$0\leqslant\lg x\leqslant 1$$

整理得，$1\leqslant x\leqslant 10$，即

$$D(x)=[1,10]$$

(3) $f(\sin x)$

由题意得

$$0\leqslant \sin x\leqslant 1$$

求得 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即

$$D(x)=[2k\pi,(2k+1)\pi],\ k\in\mathbf{Z}$$

3. 已知 $f(x)=x^2+x-3$，求 $f(2)$，$f(-2)$，$f(x+h)$。

解 $f(2)=2^2+2-3=3$

$$f(-2)=(-2)^2+(-2)-3=-1$$

$$f(x+h)=(x+h)^2+(x+h)-3=x^2+(2h+1)x+h^2+h-3$$

4. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，且 $f(-2)=0$，$f(0)=1$，$f(1)=5$，求 $f(-1)$与 $f(2)$。

解 根据题意可知：

$$\begin{cases}f(-2)=a(-2)^2-2b+c=0\\ f(0)=c=1\\ f(1)=a+b+c=5\end{cases}$$

求得 $a=\dfrac{7}{6}$，$b=\dfrac{17}{6}$，$c=1$，代入原式得

$$f(x)=\frac{7}{6}x^2+\frac{17}{6}x+1$$

所以 $f(-1)=-\dfrac{2}{3}$，$f(2)=\dfrac{34}{3}$。

5. 设 $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\\ 2(1-x) & \dfrac{1}{2}\leqslant x<1\\ 0 & x\geqslant 1\end{cases}$

(1) 求 $f(x)$的定义域，并指出它的分段点。

(2) 求 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$f\left(\dfrac{3}{4}\right)$，$f(2)$的值。

(3) 画出 $f(x)$的图像。

解 (1) 由题意得

$$D(x)=(-\infty,+\infty)$$

它的分段点为 $x=0$，$x=\dfrac{1}{2}$，$x=1$。

(2) $$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0,\quad f\left(\frac{1}{3}\right)=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=2\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2},\quad f(2)=0$$

(3) $f(x)$的图像如图 1-1 所示。

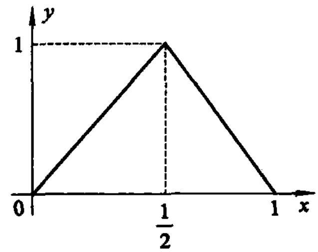


图 1-1

6. 下列各组函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

(2) $f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$

(3) $f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

(4) $f(x)=\arccos x$，$g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$

(5) $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$，$g(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x-1)$

(6) $f(x)=|x-1|$，$g(x)=\begin{cases}1-x & x<1\\ 0 & x=1\\ x-1 & x>1\end{cases}$

解 (1) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

根据题意可知：$R(f)=\mathbf{R}$，$g(x)\geqslant 0$，因为 $f(x)$与 $g(x)$的值域不相同，故 $f(x)$与 $g(x)$不相同。

(2) $f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$

根据题意可知：$f(x)$定义域为 $\mathbf{R}$，$g(x)$定义域为 $x\geqslant 0$，因为 $f(x)$与 $g(x)$的定义域不相同，故 $f(x)$与 $g(x)$不相同。

(3) $f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

根据题意可知：$f(x)$定义域为 $\mathbf{R}$，$g(x)$定义域为 $x\neq 1$，因为 $f(x)$与 $g(x)$的定义域不相同，故 $f(x)$与 $g(x)$不相同。

(4) $f(x)=\arccos x$，$g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$

根据题意可知：$f(x)$与$g(x)$的定义域相同，都为$|x|\leqslant 1$，又因为$\arcsin x+\arccos x=1$，所以对应法则也相同，故$f(x)$与$g(x)$相同。

(5) $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$，$g(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x-1)$

根据题意可知：$f(x)$与$g(x)$的定义域相同，都为$x>1$，且对应法则也相同，故$f(x)$与$g(x)$相同。

(6) $f(x)=|x-1|$，$g(x)=\begin{cases}1-x & x<1\\ 0 & x=1\\ x-1 & x>1\end{cases}$

根据题意可知：$f(x)$与$g(x)$的定义域相同，都为$\mathbf{R}$，且对应法则也相同，故$f(x)$与$g(x)$相同。

7. 指出下列函数的单调性。

(1) $f(x)=3x-1$　　(2) $y=\cos x$，$x\in[0,\pi]$

(3) $y=3^x$　　(4) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$

解　(1) $f(x)=3x-1$

设$x_1<x_2$，即$x_2-x_1>0$，$f(x)=y=3x-1$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=3\times(x_2-x_1)>0$$

所以函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增。

(2) $y=\cos x$，$x\in[0,\pi]$

设$0\leqslant x_1<x_2\leqslant\pi$，即$x_2-x_1>0$，$f(x)=y=\cos x$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\cos x_2-\cos x_1=-2\sin\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}<0$$

所以函数$f(x)$在$[0,\pi]$上单调递减。

(3) $y=3^x$

设$x_1<x_2$，即$x_2-x_1>0$，$f(x)=y=3^x$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=3^{x_2}-3^{x_1}=3^{x_1}(3^{x_2-x_1}-1)>0$$

所以函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增。

(4) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$

设$0<x_1<x_2$，即$\dfrac{x_2}{x_1}>1$，$f(x)=y=\log_{\frac{1}{2}}x$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\log_{\frac{1}{2}}x_2-\log_{\frac{1}{2}}x_1=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x_2}{x_1}<0$$

所以函数$f(x)$在$(0,\infty)$上单调递减。

8. 设函数 $f(x)$与 $g(x)$在区间 I 上单调增加，试证 $f(x)+g(x)$也在区间 I 上单调增加。

证明　设 $x_1<x_2$，且 x_1，$x_2\in I$，有：

$$f(x_2)-f(x_1)>0,\quad g(x_2)-g(x_1)>0$$

因此

$$f(x_2)+g(x_2)-[f(x_1)+g(x_1)]=[f(x_2)-f(x_1)]+[g(x_2)-g(x_1)]>0$$

故 $f(x)+g(x)$在区间 I 上单调递增。

9. 设函数 $f(x)$在区间$[a, b]$和$[b, c]$上单调增加，试证 $f(x)$在区间$[a, c]$上仍单调增加。

证明　设对区间$[a, c]$上任意的 x_1，x_2 有

$$x_1<x_2$$

① 当 $a<x_1<x_2<b<c$ 时，由 $f(x)$在$[a, b]$上单调增加，可知：

$$f(b)>f(x_2)>f(x_1)>f(a)$$

由 $f(x)$在$[b, c]$上单调增加，可知：

$$f(c)>f(b)$$

所以

$$f(c)>f(x_2)>f(x_1)$$

② 当 $a<x_1<b<x_2<c$ 时，由 $f(x)$在$[a, b]$上单调增加，可知：

$$f(b)>f(x_1)$$

由 $f(x)$在$[b, c]$上单调增加可知：

$$f(x_2)>f(b)$$

所以

$$f(x_2)>f(x_1)$$

③ 当 $a<b<x_1<x_2<c$ 时，由 $f(x)$在$[a, b]$上单调增加，可知：

$$f(b)>f(a)$$

由 $f(x)$在$[b, c]$上单调增加，可知：

$$f(x_2)>f(x_1)>f(b)$$

所以

$$f(x_2)>f(x_1)>f(b)>f(a)$$

综上所述，函数 $f(x)$在$[a, c]$上单调增加。

10. 设函数 $f(x)$与 $g(x)$在区间 I 上有界，试证 $f(x)\pm g(x)$和 $f(x)\cdot g(x)$也在区间 I 上有界。

证明　(1) 由题意可知：

$$|f(x)|\leqslant M_1, \quad |g(x)|\leqslant M_2, x\in I$$

所以

$$|f(x)\pm g(x)|\leqslant|f(x)|+|g(x)|\leqslant M_1+M_2$$

故 $f(x)\pm g(x)$ 在区间 I 上有界。

(2) 由题意可知：

$$|f(x)|\leqslant M_1, |g(x)|\leqslant M_2, x\in I$$

所以

$$|f(x)\cdot g(x)|\leqslant|f(x)|\cdot|g(x)|\leqslant M_1\cdot M_2$$

故 $f(x)\cdot g(x)$ 在区间 I 上有界。

11. 证明：函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 有界。

证明 由 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 可得

$$x^2y+y-x=0$$

由 $\Delta\geqslant 0$ 可知：

$$1-4y^2\geqslant 0$$

所以 $|y|\leqslant\dfrac{1}{2}$，故函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 有界。

12. 讨论函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的有界性。

证明 令 $\dfrac{1}{x}=u$，则 $y=\sin u$，由正弦的性质得 $|y|\leqslant 1$，故 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界函数。

13. 讨论下列函数的奇偶性。

(1) $f(x)=x\cos x+\sin x$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4+x^2-1$

(3) $f(x)=2x^2+x-1$

(4) $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

(5) $f(x)=\lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

(6) $f(x)=\begin{cases}1-x & x\leqslant 0\\ 1+x & x>0\end{cases}$

解 (1) $f(x)=x\cos x+\sin x$

因为

$$f(-x)=-x\cos x-\sin x \quad (x\in\mathbf{R})$$

$$-f(x)=-x\cos x-\sin x \quad (x\in\mathbf{R})$$

所以 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数。