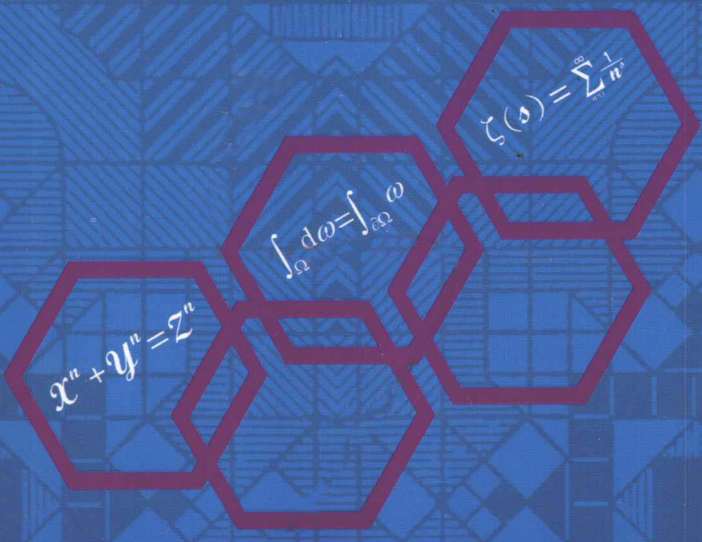
INTERNATIONAL MATHEMATICS
COMPETITION FOR
UNIVERSITY STUDENTS

历届IMC

国际大学生数学竞赛试题集

1994—2010

王丽萍　编译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

INTERNATIONAL MATHEMATICS COMPETITION FOR UNIVERSITY STUDENTS

历届IMC国际大学生数学竞赛试题集

1994—2010

王丽萍 编译

$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$

$\int_{\Omega}d\omega=\int_{\partial\Omega}\omega$

$x^n+y^n=z^n$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

国际大学生数学竞赛是国际上较高层次的大学生参加的高级别数学竞赛.本书汇集了从第1届至17届国际大学生数学竞赛的试题及其解答.

本书适合于大学数学系师生及相关专业研究人员和数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

历届国际大学生数学竞赛试题集:1994～2010/王丽萍编译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.12

ISBN 978-7-5603-3424-0

Ⅰ.①历… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学—高等学校—竞赛题 Ⅳ.①O13—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第258520号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杨万鑫
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张12 字数219千字
版 次 2012年1月第1版 2012年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3424-0
定 价 28.00元

前言

据美国弗吉尼亚大学经济系专门研究教育和劳动力经济学的博士生兰小欢研究，美国的数学新博士的真实工资有十多年没涨过了，原因是博士生供给数量大增(数据来自 Survey of Earned Doctorates).

本来在20世纪80～90年代，美国的数学家日子过得很舒服，但从1985年开始，由于中国的改革开放，大批中国学生涌入美国数学系，于是20世纪90年代初期，美国数学家找工作开始困难.雪上加霜的是，1990年左右，苏联解体了，一下子涌入美国数学系和物理系的来自东欧的神秘天才们的数量增长了356%.到20世纪90年代中后期，数学系毕业生更难找到工作了，一个标志性的数字是两次事件后，选择博士后的人数从最初的10%增加到了20世纪90年代末的40%(参见 *The Influx of Foreign Phos and the Impact on Postdoctoral Positions*).

这件事说明，能对美国数学研究就业市场造成冲击的三股力量分别来自于中国、俄罗斯和东欧，前两者(包括美国)的大学生数学竞赛试题集，本工作室已出版完毕，现在该轮到东欧了.

本书是始于东欧的大学生数学竞赛的试题集，在日语中有“即使腐烂也是鲷鱼”这样一句话，意思就是一流的东西即使衰败了，也还会保留着一缕光辉.

东欧是国际中学生数学竞赛的发源地，也是20世纪初世界数学的重镇，张奠宙先生曾在20世纪80年代写过一本名为《二十世纪数学史话》的书(张奠宙，赵斌.现代化知识文库《二十世纪数学史话》，知识出版社，上海)，其中专有一章(第六章)就叫“波兰学派的崛起”，书中介绍经历了第二次世界大战(年轻的数学家多半战死沙场)及东欧剧变(数学家大多逃到欧美)之后，东欧的数学实力有所衰退，但他们的数学传统还在，就像今天的英国仍隐现着昔日大英帝

国日不落的余辉一样，今天东欧的数学传统仍是我们需要效仿的，称其为国际一流，实不为过.

一位科学网网友在博客中说：

高等教育追求"公平"太久了，结果公平变成了"平庸". 是该追求"精英"的时候了，至少允许一部分高校先精英化起来.

不过在中国不追求"公平"会不稳定，不和谐. 为了和谐，人人都应该"被"大学生，不管这个大学生是什么质量.

这本国际大学生数学竞赛试题集就是我们试图追求精英化教育的一个举措.

大学数学教育问题成堆，大学生学习数学的热情衰退. 有一则据考证是山寨版的哈佛大学图书馆墙上的训言说得很有哲理：

"此刻打盹，你将做梦；而此刻学习，你将圆梦."

大学生厌学数学有许多原因：一是经历了千军万马过独木桥般的高考之后对填鸭式的应试教育厌烦了；二是看看周围的教授，地位与声望似乎与学问并非正相关；三是就业的师哥、师姐工作的好坏似乎也和学习成绩的优劣无关，而最重要的是要有一个好爹！

这是一个社会问题，只不过在大学表现尤甚. 朱锡庆在《知识笔记》中指出："歪门邪道成为一种争胜的手段被引入学术竞争的游戏，因为正道与邪术成本相差悬殊，正道难敌邪术，看看学术流氓成王的人越来越多，邪术迅速扩张增强，就像侵入人体的癌细胞四处蔓延，以致于最终游戏规则事实上被篡改，游戏的性质被完全改变."《纽约客》记者何伟到浙江一家小工厂采访，工人们在墙壁上刻下"人生何处不成名，学不成名誓不还"的名言.（这句话是在网上流传的毛泽东励志语录60句之首，对于生于20世纪60年代的我辈对毛主席语录再熟悉不过了，其余59句均倒背如流，仅这一句没听说过，于是便查了一下，原来是中国著名地质学家丁文江的一首诗，全文是这样的：

男儿立志出乡关，学不成名誓不还.

埋骨岂须桑梓地，人生何处不青山.

由此可见网络充斥着大量似是而非的东西，实在不是学习知识之场所.）

我国在20世纪80年代也搞过大学生数学竞赛，但只坚持了十年，试题质量颇高，到今天还有许多人在找当年的题目. 我们工作室将不余遗力地推进高校数学教育精英化，但是我们遗憾地发现，目前国内的所谓大学生数学竞赛俨然已演化成为考研数学的一次练习，这与精英化教育已经完全背道而驰了，所

以再想像民国时期大师辈出已不太可能.

早期的清华大学数学系之所以人才辈出，是与当时的解难题训练分不开的.据中科院研究生院张里千教授回忆:“当时，杨武之公开承认自己的数学成就、解题能力不及他的学生，但他认为解不出难题的教授也可以培养出杰出的学生，因为老师知道哪些题难，哪些题重要，可以布置给学生去想.”据华罗庚先生后来回忆，当时他们一个班有约 40 人，这门课老师出了几道难题，他(华罗庚)就上图书馆查题鉴、查参考书，向助教请教，每天晚上开夜车，匆匆忙忙完成才发现当天就要交作业了，每次都以为只有他一人按期交作业并得全分，但发下来时，才发现每次都是四个人，另外三人就是陈省身、许宝騄、柯召(许宝騄先生纪念文集编委会编《道德文章垂范人间》，北京大学出版社，北京:p336).

从本书列出的试题看，除了少数成题(如第 2 届 2.3 题)及若干适合做中学生数学奥林匹克试题(如第 9 届 2.2 题、第 14 届 1.1 题)和直接拿经典结果当试题(如第 2 届 2.6 题)外，均为新颖的证明题及计算题，而且证明多于计算，意味着更偏于纯数学.

闵可夫斯基曾说:“真正的狄利克雷原理，在于处理问题时进行尽可能多的清晰的思考，避免尽可能多的无谓的计算.”而外尔在描述他的老师希尔伯特时说:“直截了当是他工作的一大特点，他总是能摆脱各种计算，以前所未有的清晰方式呈现问题.”

书中的许多证明对于国内读者来说是相当精彩的，如第 1 届的 1.3 题，用到三次单位根，既在情理之中又在意料之外.

本书既适合大学生也适合天才的中学生阅读，因为现在有些中学生已达到了很高水平.2010 年丘成桐中学数学奖于 2010 年 12 月 16 日在清华大学颁发，上海市市北中学高三学生陈波宇一举摘得金奖，获奖论文为《Weierstrass 函数在不可列的稠密集上不可导的一种证明》.

本书中除了有些内容本身是中学程度只不过提法和证法与现行中学提法不同(如第 9 届 2.4 题立体几何二面角问题，第 1 届 1.3 题、第 4 届 1.4 题判定有理性及无理性问题，第 12 届 2.1 题二次函数问题)外，还有一些涉及现在中学竞赛的热点，如函数的迭代与不动点(第 3 届 2.1 题，第 5 届 2.3 题)，此外对于大学物理系学生也应该是有参考价值的，毕竟数学是研究物理的手段及基础，甚至可以说最前沿的物理本身就是数学，如现在的热门研究——弦论.

弦理论的雏形是在 1968 年由意大利物理学家加布里埃莱·威尼采亚诺(Gabriele Veneziano)提出的.他当时在麻省理工学院工作，希望找到能描述原

子核内强作用力的数学函数.在一本数学书中,他发现有200年历史之久的欧拉函数能描述他所要求解的强作用力.不久后,斯坦福大学的理论物理学家莱奥纳特·苏斯坎(Leonard Susskind)指出,这个函数可理解为一小段类似橡皮筋一样扭曲抖动的"线段",即"弦".

不同学科的融合与渗透为各学科的发展提供了源源不断的动力.例如,邵逸夫奖于2011年9月28日在香港会展中心举行.数学科学奖被平均颁予瑞士苏黎世联邦理工学院数学与物理学教授德梅特里奥斯·克里斯托多罗(Demetrios Christodoulou)和美国哥伦比亚大学戴维斯数学教授理查德·哈密顿(Richard Hamilton),以表彰他们在洛伦兹(H. A. Lorentz)几何与黎曼几何中的非线性偏微分方程方面的高度创新工作,及对广义相对论和拓扑学的应用.

如果你的自我期许是大学数理精英,那么本书你值得拥有.昭明太子有言:"自炫自媒者,仕女之丑行;不忮不求者,明达之用心".此言极是,有道是:"君子中道而立,能看随之"——学问就摆在那儿,你爱看不看,随便你(江晓原语),看了你得,不看你失.

刘培杰

2011年10月20日于哈工大

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室已出版(即将出版)图书目录

书　　名	出版时间	定　价	编号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007—09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007—09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007—09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007—09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010—06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008—01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010—07	38.00	75
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010—01	18.00	61
数学眼光透视	2008—01	38.00	24
数学思想领悟	2008—01	38.00	25
数学应用展观	2008—01	38.00	26
数学建模导引	2008—01	28.00	23
数学方法溯源	2008—01	38.00	27
数学史话览胜	2008—01	28.00	28
从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007—10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008—01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008—05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011—08	138.00	136
从比勃巴赫到德·布朗斯	即将出版		
数学解题中的物理方法	2011—06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011—06	48.00	115
中学数学计算技巧	2012—01	48.00	116
中学数学证明方法	2012—01	58.00	117
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006—05	58.00	5
历届 CMO 试题集	2008—09	28.00	40
历届 IMC 国际大学生数学竞赛试题集(1994—2010)	2012—01	28.00	143
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007—03	28.00	15

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室已出版(即将出版)图书目录

书　名	出版时间	定　价	编号
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009—03	88.00	43
历届俄罗斯大学生数学竞赛试题及解答	即将出版	68.00	
前苏联大学生数学竞赛试题集	2011—09	68.00	128

书　名	出版时间	定　价	编号
数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006—05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008—01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008—07	58.00	36
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010—01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011—08	58.00	87

书　名	出版时间	定　价	编号
发展空间想象力	2010—01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010—02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007—08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006—12	18.00	10
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007—09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010—07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008—09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010—06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009—01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009—06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011—01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011—03	38.00	113
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2012—01	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011—02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅰ)	2010—06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅱ)	2011—01	28.00	78
几何学教程(平面几何卷)	2011—03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011—07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010—06	88.00	70
几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)	2010—07	138.00	76,77

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室已出版(即将出版)图书目录

书　　名	出版时间	定　价	编号
三角形的五心	2009—06	28.00	51
俄罗斯平面几何问题集	2009—08	88.00	55
俄罗斯平面几何 5000 题	2011—03	58.00	89
计算方法与几何证题	2011—06	28.00	129
463 个俄罗斯几何老问题	2011—12	28.00	152

500 个最新世界著名数学智力趣题	2008—06	48.00	3
400 个最新世界著名数学最值问题	2008—09	48.00	36
500 个世界著名数学征解问题	2009—06	48.00	52
400 个中国最佳初等数学征解老问题	2010—01	48.00	60
500 个俄罗斯数学经典老题	2011—01	28.00	81

超越吉米多维奇——数列的极限	2009—11	48.00	58
初等数论难题集(第一卷)	2009—05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011—02	128.00	82,83
谈谈素数	2011—03	18.00	91
平方和	2011—03	18.00	92
数论概貌	2011—03	18.00	93
代数数论	2011—03	48.00	94
初等数论的知识与问题	2011—02	28.00	95
超越数论基础	2011—03	28.00	96
数论初等教程	2011—03	28.00	97
数论基础	2011—03	18.00	98
数论入门	2011—03	38.00	99
解析数论引论	2011—03	48.00	100
基础数论	2011—03	28.00	101
超越数	2011—03	18.00	109
三角和方法	2011—03	18.00	112
谈谈不定方程	2011—05	28.00	119
整数论	2011—05	38.00	120
初等数论 100 例	2011—05	18.00	122
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题(上、下)	2012—01	138.00	144,145
算术探索	2011—12	158.00	148

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室已出版(即将出版)图书目录

书　　名	出版时间	定　价	编号
俄罗斯函数问题集	2011-03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011-01	48.00	79
博弈论精粹	2008-03	58.00	30
多项式和无理数	2008-01	68.00	22
模糊数据统计学	2008-03	48.00	31
解析不等式新论	2009-06	68.00	48
反问题的计算方法及应用	2011-11	28.00	147
建立不等式的方法	2011-03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009-08	68.00	56
不等式研究(第二辑)	2011-12	68.00	153
初等数学研究(Ⅰ)	2008-09	68.00	37
初等数学研究(Ⅱ)(上、下)	2009-05	118.00	46,47
中国初等数学研究　2009 卷(第 1 辑)	2009-05	20.00	45
中国初等数学研究　2010 卷(第 2 辑)	2010-05	30.00	68
中国初等数学研究　2011 卷(第 3 辑)	2011-07	60.00	127
不等式的秘密	2012-01	28.00	154
初等不等式的证明方法	2010-06	38.00	123
数学奥林匹克不等式散论	2010-06	38.00	124
数学奥林匹克不等式欣赏	2011-09	38.00	138
理论与实用算术	2010-06	28.00	126
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010-01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上、下)	2011-08	158.00	134,135
中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00	13
统计学专业英语	2007-03	28.00	16
数学 我爱你	2008-01	28.00	20
精神的圣徒　别样的人生——60 位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00	39
数学史概论	2009-06	78.00	50
斐波那契数列	2010-02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010-07	38.00	72
数学的创造	2011-02	48.00	85
数学中的美	2011-02	38.00	84

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室已出版(即将出版)图书目录

书　　名	出版时间	定　价	编号
最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009－02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009－08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007－04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009－08	28.00	54
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010－01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010－01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011－03	68.00	118
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010－01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011－07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011－07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011－07	38.00	133
2011 年全国及各省市高考数学试题审题要津与解法研究	2011－10	48.00	139
新课标高考数学——五年试题分章详解(2007～2011)(上、下)	2011－10	78.00	140,141
30 分钟拿下高考数学选择题、填空题	2012－01	48.00	146
高考数学压轴题解题诀窍	2011－12		118

方程式论	2011－03	38.00	105
初级方程式论	2011－03	28.00	106
Galois 理论	2011－03	18.00	107
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011－03	28.00	108
线性偏微分方程讲义	2011－03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011－03	28.00	111
代数方程式论	2011－05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011－07	48.00	137

闵嗣鹤文集	2011－03	98.00	102
吴从炘数学活动三十年(1951～1980)	2010－07	99.00	32

吴振奎高等数学解题真经(概率统计卷)	2012－01	38.00	149
吴振奎高等数学解题真经(微积分卷)	2012－01	68.00	150
吴振奎高等数学解题真经(线性代数卷)	2012－01	58.00	151
钱昌本教你快乐学数学(上)	2011－12	48.00	155

目 录

第 1 届国际大学生数学竞赛

保加利亚, 1994

第一天

1.1 a) 设 A 是一个对称、可逆的 $n\times n$ $(n\geqslant 2)$ 矩阵, 其元素均为正实数, 证明: $z_n\leqslant n^2-2n$, 其中 z_n 为 A^{-1} 中零元素的个数.

b) 请问 $n\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

的逆矩阵中有多少个零元素?

解 令 a_{ij} 和 b_{ij} 分别表示 A 和 A^{-1} 中的元素. 对于 $k\neq m$, 有 $\sum_{i=0}^{n}a_{ki}b_{im}=0$, 因为 a_{ij} 为正, 所以集合 $\{b_{im}\colon\ i=1,2,\ldots,n\}$ 中至少有一个元素为正, 一个元素为负. 所以矩阵 A^{-1} 每一列都至少有两个非零元素, 这就证明了 a).

对于 b), $b_{1,1}=2,\ b_{n,n}=(-1)^n,\ b_{i,i+1}=b_{i+1,i}=(-1)^i,\ i=1,2,\ldots,n-1$, 其他所有的 b_{ij} 均为零.

1.2 设 $f\in C^1(a,b),\ \lim_{x\to a+}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to b-}f(x)=-\infty$, 且当 $x\in(a,b)$ 时, $f'(x)+f^2(x)\geqslant -1$. 证明: $b-a\geqslant\pi$, 并给出使等式 $b-a=\pi$ 成立的一个例子.

解 由所给不等式, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan f(x)+x)=\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}+1\geqslant 0,\quad x\in(a,b),$$

所以 $\arctan f(x)+x$ 在该区间非减, 在该区间的两端点取极限得

$$\frac{\pi}{2}+a\leqslant -\frac{\pi}{2}+b,$$

因此, $b-a\geqslant\pi$. 当 $f(x)=\cot x,\ a=0,\ b=\pi$ 时, 等号成立.

1.3 设集合 S 为包含 $2n-1$ $(n \in \mathbb{N})$ 个互不相等的无理数的集合. 证明: S 中一定存在 n 个不同的元素 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 使得对于所有满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > 0$ 的非负有理数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 数 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ 为无理数.

解 令 $\mathbb{I}$ 为无理数集合, $\mathbb{Q}$ 为有理数集合, $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q} \cap [0, +\infty)$. 我们用归纳法来证明本题. 当 $n=1$ 时, 结论是平凡的. 设 $n-1$ 时结论成立, 我们来证明 n 时结论成立. 由假设可知, 存在 $n-1$ 个不同的元素 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in S$, 使得

$$\begin{gathered} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} \in \mathbb{I}, \\ a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}^+, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} > 0. \end{gathered} \tag{1}$$

设 S 中其他元素为 $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1}$. 若 n 时结论不真, 则对于 $k = 0, 1, \ldots, n-1$, 存在 $r_k \in \mathbb{Q}$, 使得对某些 $b_{ik}, c_k \in \mathbb{Q}^+$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_{ik}x_i + c_kx_{n+k} = r_k; \quad \sum_{i=1}^{n-1} b_{ik} + c_k > 0. \tag{2}$$

且对某些 $d_k \in \mathbb{Q}^+$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} d_kx_{n+k} = R; \quad \sum_{k=0}^{n-1} d_k > 0, \quad R \in \mathbb{Q}. \tag{3}$$

若 (2) 中 $c_k = 0$, 则 (2) 与 (1) 矛盾. 所以 $c_k \neq 0$, 不失一般性, 可设 $c_k = 1$. 且由于 (2) 中 $x_{n+k} \in \mathbb{I}$, 所以 $\sum_{i=1}^{n-1} b_{ik} > 0$. 把 (2) 代入 (3), 我们得到

$$\sum_{k=0}^{n-1} d_k \left(-\sum_{i=1}^{n-1} b_{ik}x_i + r_k \right) = R \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} d_kb_{ik} \right) x_i \in \mathbb{Q}.$$

由 d_k 和 b_{ik} 满足的条件, 知上式与 (1) 矛盾.

1.4 设 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 且设 F 和 G 均为 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射 (算子), 满足 $F \circ G - G \circ F = \alpha F$.

a) 证明: 对于所有的 $k \in \mathbb{N}$, 有 $F^k \circ G - G \circ F^k = \alpha k F^k$.

b) 证明: 存在 $k \geqslant 1$, 使得 $F^k = 0$.

解 a) 根据假设, 我们有

$$\begin{aligned}F^k\circ G-G\circ F^k&=\sum_{i=1}^{k}(F^{k-i+1}\circ G\circ F^{i-1}-F^{k-i}\circ G\circ F^{i})\\&=\sum_{i=1}^{k}F^{k-i}\circ(F\circ G-G\circ F)\circ F^{i-1}\\&=\sum_{i=1}^{k}F^{k-i}\circ\alpha F\circ F^{i-1}\\&=\alpha kF^k.\end{aligned}$$

b) 考虑作用在所有 $n\times n$ 矩阵 F 上的线性算子 $L(F)=F\circ G-G\circ F$, 其至多有 n^2 个互不相等的特征值. 假设对于任意的 k, $F^k\neq 0$, 则由 a), L 有无穷多个互不相等的特征值 αk, 矛盾.

1.5 a) 设 $f\in C[0,b]$, $g\in C(\mathbb{R})$, g 是周期为 b 的周期函数. 证明: $\int_0^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x$ 当 $n\to\infty$ 时极限存在, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{b}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^b g(x)\mathrm{d}x.$$

b) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+3\cos^2 nx}\mathrm{d}x.$$

解 令 $\|g\|_1=\int_0^b|g(x)|\mathrm{d}x$,

$$\omega(f,t)=\sup\{|f(x)-f(y)|: x,y\in[0,b],\ |x-y|\leqslant t\}.$$

因为 f 一致连续, 故当 $t\to 0$ 时, 有 $\omega(f,t)\to 0$. 利用 g 的周期性, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n}\int_{b(k-1)/n}^{bk/n}f(x)g(nx)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n}f\Big(\frac{bk}{n}\Big)\int_{b(k-1)/n}^{bk/n}g(nx)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}\int_{b(k-1)/n}^{bk/n}\Big\{f(x)-f\Big(\frac{bk}{n}\Big)\Big\}g(nx)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\Big(\frac{bk}{n}\Big)\int_0^b g(x)\mathrm{d}x+O\Big(\omega\Big(f,\frac{b}{n}\Big)\|g\|_1\Big)\\&=\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{n}\int_{b(k-1)/n}^{bk/n}f(x)\mathrm{d}x\int_0^b g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b}{n}f\Big(\frac{bk}{n}\Big)-\int_{b(k-1)/n}^{bk/n}f(x)\mathrm{d}x\right)\int_0^b g(x)\mathrm{d}s+O\Big(\omega\Big(f,\frac{b}{n}\Big)\|g\|_1\Big)$$
$$=\frac{1}{b}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x\int_0^b g(x)\mathrm{d}x+O\Big(\omega\Big(f,\frac{b}{n}\Big)\|g\|_1\Big).$$

这样就证明了 a).

b) 令 $b=\pi$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=(1+3\cos^2 x)^{-1}$. 由 a) 及

$$\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=2,\quad \int_0^\pi (1+3\cos^2 x)^{-1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+3\cos^2 nx}\mathrm{d}x=1.$$

1.6 设 $f\in C^2[0,N]$, 且对于所有的 $x\in[0,N]$, $|f'(x)|<1$, $f''(x)>0$. 设 $0\leqslant m_0<m_1<\cdots<m_k\leqslant N$ 为整数, 使得 $n_i=f(m_i)$ 也为整数, $i=0,1,\ldots,k$. 记 $b_i=n_i-n_{i-1}$, $a_i=m_i-m_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,k$.

a) 证明:

$$-1<\frac{b_1}{a_1}<\frac{b_2}{a_2}<\cdots<\frac{b_k}{a_k}<1.$$

b) 证明: 对于任意 $A>1$, 至多存在 N/A 个指标 j, 使得 $a_j>A$.

c) 证明: $k\leqslant 3N^{2/3}$ (即曲线 $y=f(x)$ $(x\in[0,N])$ 上至多有 $3N^{2/3}$ 个整点).

解 a) 对于 $i=1,2,\ldots,k$, 存在 $x_i\in(m_{i-1},m_i)$, 使得

$$b_i=f(m_i)-f(m_{i-1})=(m_i-m_{i-1})f'(x_i),$$

故

$$\frac{b_i}{a_i}=f'(x_i),$$

所以

$$-1<\frac{b_i}{a_i}<1.$$

由 f 的凸性, 得 f' 为递增函数, 且因 $x_i<m_i<x_{i+1}$, 有

$$\frac{b_i}{a_i}=f'(x_i)<f'(x_{i+1})=\frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}.$$

b) 令 $S_A=\{j\in\{0,1,\ldots,k\}\colon a_j>A\}$, 则

$$N\geqslant m_k-m_0=\sum_{i=1}^{k}a_i\geqslant\sum_{j\in S_A}a_j>A|S_A|,$$