高等数学试题库

试题及选解

下册

赵崇诰　莫仲卿　杨志响
杨期澄　尹　群　杨　军　编

上海科学技术文献出版社

高等数学试题库

试题及选解

下册

赵崇诰 莫仲卿 杨志响
杨期澄 尹 群 杨 军
编

上海科学技术文献出版社
1993.8.

(沪) 新登字 301 号

内 容 提 要

本书中的试题是由江苏省"CJS-1 高等数学试题库系统"(第三版，约 6500 题) 中选出，重新作了补充、加工整理、编排. 选出的部分试题，尽量在内容、试题类型以及难度等方面，具有代表性；每题都给出参考答案；部分典型题或较难题给出解答或提示.

本书是广大数学教师以及学习高等数学的学生的一本很好的参考书.

高等数学试题库
试题及选解
赵崇诰 莫仲卿 杨志响 杨朔澄 尹 群 杨 军 编
*
上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路 2 号)
镇江新光印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32 印张 24.25 字数 545 千字
1993 年 8 月第一版 1993 年 8 月第一次印刷
印数 1—10000
ISBN 5439—0330—X/G·152
定价 (上、下两册): 12.00 元

目　　录

第 一 部 分

试 题

第五章　多元函数微分学

客 观 题

判别正误:(5.1 – 5.22)

5.1　$z_1=\ln[x(x-y)]$ 与 $z_2=\ln x+\ln(x-y)$ 表示同一个函数.

5.2　若当 $p\to p_0$（沿平行于 x 轴直线）时，有 $f(x,y)\to A$，当 $p\to p_0$（沿平行于 y 轴直线）时，有 $f(x,y)\to B$，且 $A=B$，则当 $p\to p_0$ 时，$f(x,y)\to A$.

5.3　如果 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点及其邻域内有定义，

且 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续．

5.4　设 $f(x,y)=\begin{cases}0 \ , \ xy=0 \\ 1 \ , \ xy\neq 0\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 是连续的．

5.5　二元函数

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \ , & x^2+y^2\neq 0 \\ 1 \ , & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在(0,0)点连续.

5.6　若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则在 D 上至少存在两点 (x_1,y_1),(x_2,y_2)，使得对 D 内任一点 (x,y) 有：

$$f(x_1,y_1)\leqslant f(x,y)\leqslant f(x_2,y_2).$$

5.7　$\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\cos(xy)=-\sin(xy).$

5.8　设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$

5.9　假设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\sin z=x^y$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{tg}z\ln x.$

5.10　设$u=f(x,y,z)$，而$z=g(x,y)$，其中f,g可微，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}$，由此得 $\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0.$

5.11　函数 $f(x,y)$ 在 (x,y) 点偏导数存在，则 $f(x,y)$ 在 (x,y) 点必连续．

5.12　对于二元函数 $z=f(x,y)$，如果 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 存在，且 $f(x,y)$ 连续，则 $f(x,y)$ 的全微分存在．

5.13　设 $z=f(x,y)$ 的二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 均存在，则二者必相等．

5.14　曲面 $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切平面平行于直线 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$.

5.15　曲面 $\sin(xy)+\sin(yz)+\sin(xz)=1$ 在点 $(1,\frac{\pi}{2},0)$ 处的切平面方程为 $z=0$.

5.16　曲面 $z=\ln(x^2+y^2)$ 在点 $M(1,0,0)$ 处的法线垂直于平面 $z=2x$.

5.17　曲面 $x^2+y^2+z^2=49$ 在点 $(6,2,3)$ 处的法线方程为 $\frac{x-6}{6}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$.

5.18　若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，且 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=0$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0$，则 (x_0,y_0) 必为 $f(x,y)$ 的极值点.

5.19　若点 $P(x_0,y_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 的极值点，则必有 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P=0$.

5.20 若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值一定是极大值，最小值一定是极小值.

5.21 假设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 邻域内有二阶连续偏导数，记 $A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}$，$B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$，$C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}$，若$A>0,AC-B^2>0$,则$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$取极小值.

5.22 函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 M 处的梯度是该函数在点 M 处的方向导数的最大值.

选择填充(只有一个正确答案):(5.23－5.39)

5.23 设$u=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-x}}{\sqrt{2x-x^2-y^2}}$,则它的定义域为________.

(A) $0<x^2+y^2\leqslant 2x$　　(B) $x\leqslant x^2+y^2<2x$

(C) $x\leqslant x^2+y^2<0$.

5.24 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2)$为________.

(A) 1　　(B) 0　　(C) 不存在.

5.25 若$f(x,y)=3x+2y$,则$f[xy,f(x,y)]=$________.

(A) $3xy+6x$　　(B) $3xy+4y$

(C) $3xy+6x+4y$.

5.26 如果 $f(x-y,\ln x)=\dfrac{(1-\frac{y}{x})e^x}{e^y\ln(x^x)}$，则$f(x,y)$ $=$________.

(A) $\frac{xe^{x}}{y}$ (B) xe^{x} (C) $\frac{xe^{x}}{ye^{2y}}$.

5.27 对于二元函数 $z=f(x,y)$，如果 ______，则 $f(x,y)$ 的全微分存在.

(A) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$存在

(B) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$存在且$f(x,y)$连续

(C) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$存在且连续.

5.28 设函数 $z(x,y)=x^{3}y+e^{xy}-\sin(x^{2}-y^{2})$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$ ______.

(A) e (B) $2+e$ (C) $1+e$.

5.29 设$u=x^{y^{z}}$,则 $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(3,2,2)}=$ ______.

(A) $324\ln3$ (B) $81\ln3$

(C) $4\ln3$ (D) $324\ln3\ln2$.

5.30 函数 $z=x^{2}y^{3}$ 当 $x=2,y=-1,\triangle x=0.02,\triangle y=-0.01$ 时的全微分 $dz=$ ______.

(A) 0.20 (B) -0.20 (C) -0.20404.

5.31 设$z=\mathrm{arctg}\frac{x+y}{x-y}$,则 $dz=$ ______.

(A) $\frac{xdy-ydx}{x^{2}+y^{2}}$ (B) $\frac{-ydy+xdx}{x^{2}+y^{2}}$

(C) $\frac{xdy-ydx}{x^{2}-y^{2}}$.

5.32　设 $u=f(x^2+y^2+z^2)$，其中 f 三次可导，则 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=$ ________.

(A) $xyzf'''(x^2+y^2+z^2)$

(B) $4xyzf'''(x^2+y^2+z^2)$

(C) $8xyzf'''(x^2+y^2+z^2)$.

5.33　设 $u=f(x^2,y^2,z^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$ ________.

(A) $2xf''_{12}$　　(B) $4xyf''_{12}$　　(C) $4xyf''_{22}$.

5.34　设 $u=f(x+y,xz)$ 其中 f 具有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=$ ________.

(A) $xf''_{12}+xzf''_{22}$　　(B) $f'_2+xf''_{12}+xzf''_{22}$

(C) xzf''_{22}.

5.35　已知方程 $e^z-xyz=0$ 确定隐函数 $z=f(x,y)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

(A) $\dfrac{yz}{e^z-xy}$　　(B) $\dfrac{yz-e^z}{xy}$　　(C) $\dfrac{yz+xy}{e^z}$.

5.36　螺旋线 $x=a\cos\theta,y=a\sin\theta,z=k\theta$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程是 ________.

(A) $\dfrac{x-0}{-a}=\dfrac{z-k}{k}$

(B) $\dfrac{x-a}{-1}=\dfrac{y-a}{0}=\dfrac{z-k}{k}$

(C) $\dfrac{x-0}{-a}=\dfrac{y-a}{0}=\dfrac{z-k}{k}$

(D) $\dfrac{x-0}{-a}=\dfrac{y-a}{0}=\dfrac{z-\frac{\pi k}{2}}{k}$.

★5.37 假设曲线 $\begin{cases} y=1-2x \\ z=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}x^2 \end{cases}$ 在点 $(1,-1,-2)$ 处的切线与直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0 \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 的夹角为 φ，则 φ 之值为 ________.

(A) 0　　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{\pi}{4}$.

5.38 设 $f(x,y,z)=x+y^2+xz$，则 $f(x,y,z)$ 在 $(1,0,1)$ 沿方向 $\vec{l}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ 的方向导数为 ________.

(A) 1　　(B) $\dfrac{5}{3}$　　(C) $\dfrac{7}{3}$.

5.39 设函数 $z=\sqrt{|xy|}$，则在点 $(0,0)$ 沿着与 Ox 轴正向成 α 角方向的方向导数为 ________.

(A) 0　　(B) $\sqrt{|\sin\alpha\cos\alpha|}$　　(C) 1.

填　充:(5.40 − 5.51)

5.40 若 $f(x,y)=x^2+y^2$，$\varphi(x,y)=x^2-y^2$，则

$f[\varphi(x,y),y^2]=$ ________.

5.41　设 $z=x+y+f(x-y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^2$，则函数 $z=$ ________.

5.42　若$f(x,y)=\begin{cases} x^2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-y^2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$，

则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,y)}=$ ________.

5.43　设 $z=f(x,y)$，且$\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=\varphi(t) \end{cases}$，其中 f，φ 可微，则 $z'(t)=$ ________.

5.44　若$u=e^{-x^2y}$，则 $du|_{(1,1)}=$ ________.

5.45　设 $w=f(x-y,y-z,z-t)$，其中f可微，则 $\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial t}=$ ________.

5.46　设$z=xf(xy,e^y)$，其中f可微，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

5.47　设 $z=f[\varphi(x)-y,x+\psi(y)]$，其中 f，φ，ψ 均可微，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

5.48　设 $F(x,y,z)$ 连续可微，且$\dfrac{\partial F}{\partial x}$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}$，$\dfrac{\partial F}{\partial z}$ 均不为 0，由方程 $F(x,y,z)=0$ 可确定三个隐函数 $x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$，$z=z(x,y)$，则 $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

5.49　设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-y,y-z,z-x)=0$ 所确定，其中 F 为可微函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

5.50　设 $u=\sin(y+3z)$，其中 $z=z(x,y)$ 由 $z^2y-xz^3-1=0$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$ ________.

5.51　椭球面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的切平面方程为 ________；法线方程为 ________.

§5－1　多元函数

5.52　设 $f(x)=x^2+x$，$g(x,y)=xy$，$h(x)=x+1$，求：(1) $f[g(1,2)]$；　(2) $g[f(1),h(2)]$.

★5.53　已知 $f(x+y,x-y)=xy+y^2$，求 $f(x,y)$.

5.54　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，当 $y\neq0$ 时，求 $f\left(1,\dfrac{x}{y}\right)$.

5.55　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

5.56　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to k}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x\ (k\neq0)$.

5.57　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

5.58　已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明:极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

5.59　假设函数 $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$,

证明:函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

§5－2　偏导数与全微分

★5.60　设 $f(x,y)=\begin{cases}x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,

证明：函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿任何方向的方向导数存在，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微．

5.61　设 $f(x,y)=e^{-x}\sin(x+2y)$,求 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,\frac{\pi}{4})}$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,\frac{\pi}{4})}$.

5.62　设 $z=\ln(x^2+xy+y^2)$,计算 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5.63　已知 $z=e^{\sin\frac{y}{x}}$,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5.64　已知$z=e^{x}(\cos y+x\sin y)$,求dz.

5.65　已知$u=x^{y^{2}z}$,求du.

5.66　已知$u=f(\sqrt{x^{2}+y^{2}})$,其中f可微,求du.

5.67　已知$z=\ln\left(\cos\frac{x}{y}\right)$,求$dz$.

5.68　设$z=\frac{xy}{x+y}$,证明:$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

5.69　设$u=x^{y}y^{x}$,证明:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u(x+y+\ln u).$$

★5.70　设 $u=\sin x+\varphi(\sin x+\cos y)$,$\varphi$ 为可微函数,且当 $x=0$ 时,$u=\sin^{2}y$,计算 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

★5.71　已知 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^{2}+y^{2}}{x}$,$z(1,y)=\sin y$,求 $z(x,y)$　$(x>0)$.

5.72　证明:函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^{2}+y^{2}}, & x^{2}+y^{2}\neq 0\\ 0, & x^{2}+y^{2}=0\end{cases}$ 在点(0,0)处不连续,但存在一阶偏导数.

★5.73　证明:函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^{2}+y^{2})\sin\frac{1}{x^{2}+y^{2}}, & x^{2}+y^{2}\neq 0\\ 0, & x^{2}+y^{2}=0\end{cases}$$

的偏导数在点(0,0)不连续,但$f(x,y)$在点(0,0)可微.

★5.74　证明：连续函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}, \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ 都存在，但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

5.75　设 $f(x,y,z)=10x\ln(10y^{10})+10^{3z}y$，求 $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial f(u,v,w)}{\partial y}$ 在点 $(x,y,z)=(100,10,1)$ 处的值，其中 $u=xy$，$v=yz$，$w=z^2\lg(\sqrt[3]{993})$.

5.76　设 $z=\operatorname{arctg}(xy)$，其中 $y=e^x$，求 $z'(x)$.

5.77　设 $z=e^{x-2y}$，其中 $x=\sin t, y=t^3$，求 $z'(t)$.

★5.78　设 $u=e^{x+y}$，其中 y 是由方程 $y-\dfrac{1}{2}\sin y=x$ 所确定的 x 的函数，求 $u'(x), u''(x)$.

5.79　设 $z=u^2\ln v$，其中 $u=\dfrac{x}{y}, v=3x-2y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5.80　设 $z=ue^{\frac{u}{v}}$，其中 $u=x^2+y^2, v=xy$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

★5.81　设 $z=(x+y)^{x+y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5.82　设 $z=f\left(\dfrac{y-nz}{x-mz}\right)$，其中 f 可微，证明：

$$(x-mz)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-nz)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

5.83　已知 $w=F(x,y,z)$，$z=f(x,y)$，$y=g(x)$，其中 f,g,F 可微，求 $w'(x)$.

5.84　设函数 $z=f(u,v)$，其中 f 具有一阶连续偏导