双层规划理论及其在管理中的应用

Bilevel Programming Theory and Application in Management

胡长英◎著

知识产权出版社
全国百佳图书出版单位

双层规划理论
及其在管理中的应用

Bilevel Programming Theory and Application in Management

胡长英◎著

知识产权出版社
全国百佳图书出版单位

内容提要

本书详细地阐述了双层规划的基本理论、性质和求解算法，包括线性双层规划问题、整数双层规划问题、凸双层规划问题和一般非线性双层规划问题。目前，这些问题都是运筹学领域的研究热点，在最近20年产生大量研究成果，本书吸收了其中一些应用率高的研究结果。同时，本书还系统地阐述了双层规划方法在实际生产管理中的应用，讨论了双层规划方法在实际应用时的优点和不足。

责任编辑：雷春丽　　　**责任校对**：韩秀天
执行编辑：甘军萍　　　**责任出版**：卢运霞
封面设计：张　冀

图书在版编目（CIP）数据

双层规划理论及其在管理中的应用/胡长英著．—北京：知识产权出版社，2012.6
ISBN 978-7-5130-1313-0

Ⅰ.①双…　Ⅱ.①胡…　Ⅲ.①管理学　Ⅳ.①C93

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第086469号

双层规划理论及其在管理中的应用
SHUANGCENGGUIHUA　LILUN　JIQIZAI　GUANLIZHONGDE　YINGYONG
胡长英　著

出版发行：知识产权出版社
社　　址：北京市海淀区马甸南村1号　　**邮　　编**：100088
网　　址：http：//www.ipph.cn　　**邮　　箱**：bjb@cnipr.com
发行电话：010-82000860转8101/8102　　**传　　真**：010-82005070/82000893
责编电话：010-82000860转8107　　**编辑邮箱**：leichunli@cnipr.com
印　　刷：北京雁林吉兆印刷有限公司　　**经　　销**：新华书店及相关销售网点
开　　本：787mm×1092mm　1/16　　**印　　张**：23.5
版　　次：2012年6月第1版　　**印　　次**：2012年6月第1次印刷
字　　数：442千字　　**定　　价**：58.00元
ISBN 978-7-5130-1313-0/C・132（4185）

前　言

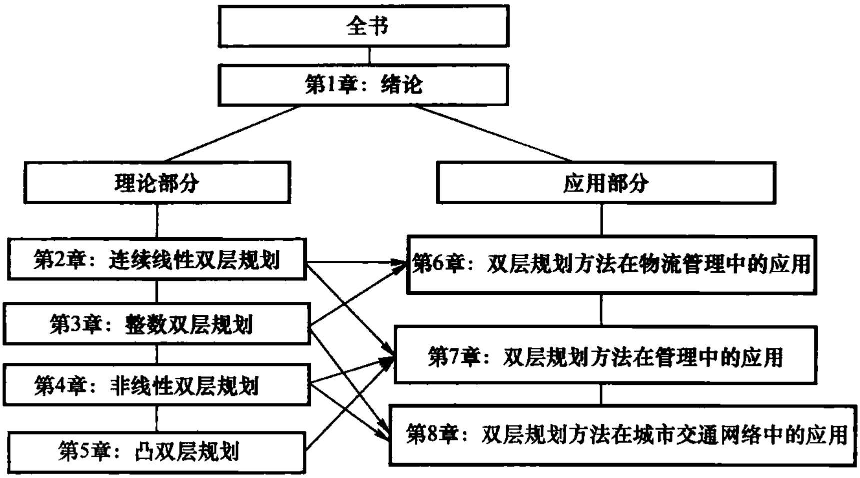
数学规划是一门广泛应用于经济计划、工程设计、政府规划、生产管理、交通运输、国防安全等领域的重要学科，而双层规划方法则是讨论多层结构决策问题的最佳数学规划方法之一。双层规划模型考虑了决策过程中不同决策者（领导与随从）的作用与表现，这对于解决许多实际问题来说是十分重要的。它的模型最初来源于经济、金融、交通等实际领域，而且最初的研究人员也大多来自经济管理界和工程界。后来，由于其涉及很深的数学理论，并具有广泛的实际应用价值，许多数学工作者也投入到双层规划的研究中来。现在，双层规划已经成为国际上数学规划界的一个研究热点，吸引了运筹学、管理学、经济学和交通科学等许多领域的专家、学者们的关注，在这些学者们的不懈努力下，已经有许多模型和算法产生，并被应用到实践中去。

本书主要讨论了双层规划模型的基本理论、求解算法及其在实际问题中的应用。全书可分为两部分——双层规划理论研究部分和实际应用部分。理论研究部分包含第 2 章至第 5 章，其中第 2 章重点阐述连续线性双层规划的理论基础和求解算法。这类规划问题由于结构简单，研究得较为充分，可供使用的求解算法较多，应用于实践的情形也比较多。第 3 章阐释了整数双层规划问题的基本理论和算法。这类上、下层带有离散变量的双层规划问题在物流选址、登山问题中都有广泛的应用，我们将在第 6 章介绍这类模型的实际应用情况。第 4 章阐述了一般非线性双层规划问题的基本理论和求解

算法。这类问题比较复杂，研究难度也较大。对于上、下层函数都是光滑的非线性双层规划模型，已经有一些求解算法给出，但是对于一般的非光滑或者下层问题解不唯一的双层规划模型，相关理论研究还很欠缺。第5章阐述了凸双层规划问题，即上层目标函数和约束函数均是二次连续可微凸函数，而下层是凸规划问题的双层规划问题。这类问题由于结构比较特殊，已经有一些可行的求解算法给出，而且在实际的生产中也有着很好的应用。

第二部分包含第6章至第8章，研究了双层规划方法在物流选址、逆向物流、供应链管理、环境保护、城市交通网络、奥运会承办等实际问题中的应用。这些问题都带有明显的上、下层结构关系，如政府与企业、物流公司与顾客、生产商与零售商、交通管理部门与道路使用者、奥组委与承办城市等。我们把每一对有影响关系的个体或组织称为决策者，其中处于上层的决策者一般先给出决策（例如交通管理部门先制定道路网络），故上层决策者又称为领导者。位于下层的决策者在上层领导者给出决策方案后需要制定自己最佳的决策方案（如道路使用者在交通网络给定的情形下选择自己的最优道路），这个决策者被称为跟随者或随从者。跟随者给出决策后，领导者再根据跟随者的决策方案调整自己的策略，力求使自己的目标达到最优。这样通过相互影响，系统最终会达到一个状态，领导者和跟随者都不愿意更改计划，此时可认为二者之间达到了一种平衡状态。达到平衡状态时双层规划的解称为相对最优解，此时领导者和跟随者均达到了相对满意的状态。本书分别根据物流管理、供应链管理、交通管理、奥运会承办等问题的实际运行情况设计了双层规划模型，并根据模型类型给出适用的求解算法，通过求解模型寻求两个决策者均达到相对满意状态时的最佳方案。每一章的最后，我们将用一些实例来说明所建的模型和算法是可行的。

本书的结构顺序以及各章节关系由下图给出：



本书可作为管理科学、运筹学领域高年级研究生的学习参考书，也可作为这些领域中教师的教学参考书。

目　　录

第1章　绪　　论

1.1　双层规划方法的理论综述

双层规划问题（Bilevel Programming Problem，BLPP），又称双层优化问题，是指包含上、下两层规划问题，其中上层问题是以下层问题为约束条件的规划问题。双层规划模型考虑了决策过程中不同决策者（领导与随从）的作用与表现，一般双层规划模型的形式如下：

$$
\begin{aligned}
\text{(P)}\qquad & \min_{x,y} F(x,y) \\
& \text{s. t.}\quad G(x,y)\leqslant 0, && (1.1.1)\\
& \qquad\quad H(x,y)=0 && (1.1.2)
\end{aligned}
$$

其中 y 是上层决策者的决策变量，$F(x,\ y)$ 是上层决策者的目标函数，式（1.1.1）和式（1.1.2）是上层决策者在决策过程中受到的约束条件。而 x 则是在上层决策变量 y 给定的条件下，下层规划（见下式）的最优解：

$$
\begin{aligned}
& \min\ f(x,y) \\
& \text{s. t.}\quad g(x,y)\leqslant 0 && (1.1.3)\\
& \qquad\quad h(x,y)=0 && (1.1.4)
\end{aligned}
$$

其中 $f(x,\ y)$ 是下层决策者的目标函数，不等式（1.1.3）及等式（1.1.4）是下层决策者在决策过程中受到的约束条件。

一般来讲，为了便于研究模型及其算法，我们限定上面模型中的所有函数都是连续可微的。这里处于上层的决策者由于先给出决策，一般称为领导者，下层的决策者要在领导者决策后方能做出决策，一般称为跟随者。上、下层的目标函数和约束条件没有必然的联系，但是一方的变量会参与并影响到另一方的决策过程中。上层首先给出决策，然后观察下层的反应，下层在上层决策方案给定的前提下寻找自己的最优策略。下层给出行动方案后，上层将根据下层的反应调整其方案，力求使自己的利益最大化，重新给出方案，接下来下层将再次根据上层新给出的决策修正自己的方案。反复进行这样的过程，直至上、下层都不愿意继续调整其决策为止。此时模型达到一个相对平衡、满意的状态，这时的决策方案称

为相对最优方案。

有时我们将上面的双层规划问题（P）简写为下面的形式：

$$\min_{x}\{F(x,y):G(x,y)\leqslant 0,H(x,y)=0\}$$

$$\min_{x}\{f(x,y):g(x,y)\leqslant 0,h(x,y)=0\}$$

如果把下层问题的最优解集记作 $\Psi(y)$，即

$$\Psi(y)=\arg\min_{x}\{f(x,y):g(x,y)\leqslant 0,h(x,y)=0\}$$

则双层规划问题（P）可以写成下面的单层规划形式：

$$\begin{aligned}\min_{y}\quad & F(x,y)\\ \text{s. t.}\quad & G(x,y)\leqslant 0,\\ & H(x,y)=0\\ & x\in\Psi(y)\end{aligned}$$

或写成 $\min_{y}\{F(x,\ y):G(x,\ y)\leqslant 0,\ H(x,\ y)=0,\ x\in\Psi(y)\}$。

由上面的规划形式可以看出双层规划问题实质上是传统的非线性规划问题的一种扩展。它除了具有一般标准的约束之外，还有一种特殊的约束，即它变量的一部分是以其余的变量作为参数的另一个参数优化问题的最优解，也有人将这种特殊的约束扩展为参数变分不等式问题。

一般来讲，只有当下层规划问题对于每个给定的上层变量 y 都有唯一确定的解时，整个双层规划问题才确定有最优解，此时用“双层优化”这个定义才有意义。本书不严格地把所有具有（P）形式的双层规划问题都称为双层优化问题，不论其最优解是否一定存在。

双层规划问题和对策论有密切的关系。从对策的角度来看，它也被称为静态的、非合作的 Stackelberg 问题，或者说是 Stackelberg 博弈模型的延伸。1934 年，德国经济学家 Von Stackelberg 在研究非平衡市场经济问题中提出一类二人对策模型。在该模型中，一般假设两个决策者都知道另一方的目标函数和可行方案，且用自己的决策来影响另一方的行动。一位先给出决策方案，另外一位观察第一位的决策后再给出方案，故两个决策者也分别称为领导者和跟随者。这里“静态”的含义是每个决策者每次只给出一个行动方案，领导者首先制订计划，目标是尽可能减少自己的成本，于是跟随者观察领导者的行动后，做出决策，目标是使自己达到最优，每个决策者都不考虑他们关系之外的影响因素。由于每个决策者的可行方案是相互依赖的，故领导者的行动会直接影响跟随者的目标函数和允许的行动方案，反之也成立。Stackelberg 博弈模型与双层规划模型在决策顺序、求解过程上都十分相似，所不同的是后者中每个决策者都可以带有自己的

约束条件，而且当时 Stackelberg 博弈模型还只限于在博弈论中进行研究，没有划归到运筹学的领域。最开始给出“多层优化问题”概念的是 Chandler 和 Norton，他们在 1970 年定义了一种广义数学规划模型，在这个模型中，约束域是由一系列的数学规划模型按照一定的顺序求解后得到的集合构成。模型中有多个决策者，决策者们按照顺序进行决策，每个决策者的行动对其他人产生影响，但不能控制其他人的行动。后来很多人将目标锁定了只有两个人参与决策的规划问题，即“双层规划问题”。真正对双层规划这一领域展开系统研究，应从 20 世纪 80 年代初由 J. F. Bar，J. E. Falk，E. Aiyosh，K. Shimizu，T. Basar，J. B. Cruz，W. F. Bialas 和 M. H. Karwan 等分别在专业期刊上发表了一批重要的论文算起。这些文章中首次在 Stackelberg 模型中对两层决策者分别引入约束条件，将 Stackelberg 问题转化为双层规划问题。进入 20 世纪 90 年代以后，双层规划的研究逐渐成为运筹学最有发展前景的热点研究领域之一。

我国对双层规划的研究始于 20 世纪 80 年代，主要集中在一些特殊的双层规划问题，如线性双层规划、整数双层规划和线性约束的二次双层规划问题等。最早开展双层规划研究的是东南大学的盛昭翰教授（20 世纪 80 年代中期），但从决策过程的角度来说最早研究 Stackelberg 对策的有东北大学的张嗣嬴院士和中国科学院自动化研究所的郑应平研究员等（20 世纪 80 年代初）。20 世纪 90 年代初以来，在中国科学院系统科学研究所汪寿阳研究员、应用数学研究所韩继业研究员和湘潭大学阮国帧教授等人的推动下，双层规划的理论与应用研究在中国获得了快速的发展，一批国内的学者和教授们在双层规划的理论与算法研究方面都取得了可喜的成就。

目前双层规划方法的研究，主要集中在解的最优性条件方面和一些特殊双层规划问题的算法设计方面。Vicente，L. N. 和 P. Calamai（[196]）、Anandalingam，G. 和 T. Friesz（[9]）、Migdalas，A. 和 P. M. Pardalos（[137]）、Jonathan F Bard（[97] — [99]）以及 Stephan Dempe（[38]，[169] — [172]）等都对双层规划的理论和算法设计作出了重要贡献。20 世纪末，Harker，P. T. and J. S. Pang（[158]，[162]），Luo，Z. Q.，J. S. Pang 和 D. Ralph（[118]）等人借助变分不等式，将双层规划问题推广为带平衡约束的数学规划（MPEC）问题，利用 MPEC 的相关理论求解双层规划问题。在求解双层规划的方法中，较为成功的是利用 KKT 条件或值函数等将双层规划变成单层规划问题，借助单层规划的求解算法（如罚函数方法、分支定界方法、序列二次规划方法、割平面法等）进行求解。但是转化后的问题中，约束规格（如 MFCQ 条件）通常是不成立的，这给求解问题增加了难度。为了克服这一难点，人们相继给出了解决方

法。Luo，Z. Q.，J. S. Pang 和 D. Ralph（[118]）；Ye，J.，D. L. Zhu 和 Q. Zhu（[227]）以及 Marcotte，P. 和 D. L. Zhu（[126]）等将 BLPP 问题转化为单层规划问题后，利用精确罚函数方法求解。但是在这些研究中，获得一阶可微精确罚函数的结果都要求非退化条件，该条件意味着双层规划问题局部等价于标准的单层规划问题，因而较强。针对这一现象，Luo，Z. Q.、J. S. Pang、D. Ralph、Fukushima 等提出分片逐次二次规划方法（PSQP），PSQP 方法在不要求非退化条件成立的情况下具有局部二次收敛性。已有数据试验表明该类算法是比较有效的，但是还有两个问题需要解决，一个是下降面的求法，另一个是它的整体收敛性，而这两个问题本身也是非常困难的。随后 Ralph，D. 和 H. Y. Jiang 等又提出了内点罚函数法、改进的逐次二次规划方法（SQP）、光滑化方法等算法，然而，这些算法也只有在非退化条件成立的情况下，才具有整体收敛性。目前已经证明，信赖域算法是一种求解非线性规划问题比较有效的算法，但由于双层规划问题是非凸、非光滑的规划问题，如何在双层规划的算法中利用信赖域算法的思想是一个非常困难的问题。到目前为止，仅 S. Scholtes 和 M. Stohr 给出了一种求解双层规划的信赖域算法，但是该算法中包含一个精确罚函数的罚因子需要预先给定，而这本身就是一个难以解决的问题。同时，该算法也仅能得到原问题的 Clarke 稳定点，而不是原问题的稳定点。除此之外，国际上还没有出现有效求解双层规划的信赖域算法（详细论述请参见 [196]）。因此，到目前为止，除了一些结构较特殊的双层规划模型，如连续线性双层规划模型、变量个数有限的整数双层规划模型和凸双层规划模型可以找到可行或近似可行的求解算法外，大多数双层规划问题都还没有公认的可行求解算法。

从数学角度来看，双层规划问题也是非常复杂的。由于双层规划问题本身所具有的非凸、非光滑性，无论是对于双层规划问题的理论研究还是算法设计都遇到了很大的困难，不少重要的问题仍没有得到系统的研究。即使是非常简单的线性双层规划问题，如果在给定上层变量的前提下，下层问题的解不唯一，则在任何可行解处，都有可能不满足单层规划问题中常用的规则性条件，故无法保证整个双层规划问题的最优解是存在的。已经证明，即使最简单的连续线性双层规划问题也是 NP—难问题，详细情况请见 S. Y. Wang（[173]）、Ye，J、D. L. Zhu and Q. Zhu (226)、Liu，G. S.，Han，J. Y. and Zhang J. Z（[115]）、Marcotte，P. and D. L. Zhu（[126]））等。因此，从数学角度来说，双层规划理论研究还有许多需要完善的地方，很多难点问题都有待于解决。而从计算角度来说，许多模型还没有可行的求解算法，有些类型的双层规划模型虽然有求解算法，但这些算法只能给出近似解，无法给出全局、甚至局部最优解。因此，到目前为止，双

层优化理论还有着广阔的的研究空间。

1.2 双层规划方法的应用简介

虽然双层规划方法的理论发展得较慢，但并没有影响它在其他领域中的应用。由于在现实生活中，任何一个部门的决策都不可避免地受到它的上级部门的影响，也不可避免地对它的下级部门产生影响，如果只使用单层规划方法就会将本来联系的事物割裂开来，不能全面分析问题和解决问题。因此，双层（或多层）规划方法被频繁地应用到各个领域中。例如用双层规划方法来研究非平衡经济市场竞争、资源分配、价格制定、供应链管理、生产计划、兵力部署、工程设计、交通网络、环境保护等各个领域。在这些应用中，交通领域和供应链管理由于其特殊结构，在应用了双层规划方法后，已经取得了一系列可喜的成果。

应用于城市交通网络设计和供应链管理的双层规划模型中，上层决策者一般是交通主管部门或是政府，上层首先选择使自己最优的变量并参与到下层的决策当中，下层跟随者一般是网络使用者或企业，将根据上层已给出的变量来确定自己的决策变量以使自己达到相对的最优。例如在城市交通网络设计中，上层是交通管理部门，其目标是设计畅通无阻的交通网络。设其目标函数是整个交通网络的通行时间 $F(v, y)$，其中 y 是反映各路段收费价格的向量，v 是各路段上的流量向量。交通管理部门希望通过收费来限制流量，使整个网络运行时间尽可能少。而下层是道路使用者，控制着道路流量 v，但他们决定使用哪条道路是受政府价格变量 y 的影响，其目标函数是 $f(v,y)=\sum\limits_i t_i(v,y)$，其中 $t_i(v, y)$ 是使用者通过第 i 条道路的网络时间。为此可以给出反映二者关系的双层规划模型：

$$
\begin{aligned}
&\min_y F(v,y)\\
\text{s.t.}\quad & G(v,y)\leqslant 0\\
&\min_v f(v,y)\\
\text{s.t.}\quad & g(v,y)\leqslant 0
\end{aligned}
$$

这里 $G(v, y)$，$g(v, y)$ 分别是交管部门和使用者受到的约束条件。交管部门每给出一组价格方案，使用者们就会根据各路段上的价格选择适合自己的道路，随后，交管部门根据使用者们的选择，调整其收费价格，例如提高流量较大的道路上的收费价格，而对使用较少的道路降低价格，重新给出价格方案。根据新制定的收费方案，使用者将重新选择成本最小的道路，这样通过相互调整，最

后达到一个状态，交管部门和使用者都不愿意更改自己的方案，此时我们认为网络达到了一个平衡状态，这个平衡状态对应的方案就是模型的最优解。所以可以通过求解模型来寻求使整个网络达到最优的可行方案。

另外，双层规划方法在其他具有等级结构的关系中都有很好的应用。例如在委托代理关系中，公司的所有人委托一位代理商代表其完成某个项目方案或产品销售。双方签订委托代理合同，合同中规定代理商的一些权利和义务，使其有足够的自由裁决权去完成任务，并用效益函数 $G: R\times A \to R$ 来反映。当委托人付给他的酬劳为 $s(x)$，其自己采取的行动为 $a\in A$ 时，其得到的最大收益为 $\max\limits_{a\in A}\int_X G(s(x),a)g(x\mid a)\mathrm{d}x$。而委托人自己的效益函数为 H：$R\to R$，其最大收益为 $\max\limits_{s\in S}\int_X H(x-s(x))g(x\mid a')\mathrm{d}x$，其中 S 是所有可供选择的酬劳方案集合，a'是代理人在委托人给定酬劳的情况下的最优行动。但是这两个式子不足以描述二者之间的关系，对于代理人来说，如果得到的收益小于其投出的成本，其没有兴趣承担这个任务，为此我们需要添加约束条件

$$\int_X G(s(x),a)g(x\mid a)\mathrm{d}x \geqslant C$$

其中 C 是总成本。故此建立了委托人与代理人之间的双层规划模型：

$$\begin{array}{ll}\text{上层} & \max\limits_{s\in S}\int_X H(x-s(x))g(x\mid a')\mathrm{d}x \\ \text{下层} & \max\limits_{a\in A}\int_X G(s(x),a)g(x\mid a)\mathrm{d}x \\ \text{约束条件} & \int_X G(s(x),a)g(x\mid a)\mathrm{d}x \geqslant C\end{array}$$

该例子在 T. Petersen [161] 中有详细讨论。

另一个关于环境保护的例子摘自 A. C. Pigou [3]。设有一个造纸厂位于某条河流的上游，而一些渔民生活在河的下游。造纸厂将其大量的废水、废渣排入河流中，严重污染了水源，使得许多水生物死亡。显然，造纸厂高效率的生产会大大减少河里鱼的数量，从而影响渔民的收益。如果造纸厂不承担污染的后果，渔民就不得不承担损失。令 $F(x)$，$G(x, y)$ 分别为造纸厂和渔民的收益函数，其中 x 是纸张产量，y 是渔民收获的鱼的数量。显然渔民的收益函数 $G(x, y)$ 受纸张生产量影响。一般情况下假定 $F(x)$，$G(x, y)$ 是凹函数，而且 $G(x, y)$ 是变量 x 的递减函数。如果二者都想最大化自己的利润，毫无疑问渔民要破产。为此我们假定政府会参与进来，保护环境和生态平衡。假定政府通过征收产量税来限制造纸厂的生产，税率为 r，则造纸厂的收益变为 $F(x)-rx$。而政府的目标是尽可

能保护环境和渔民的利益，设 $H(x, y, r)$ 表示政府的效益函数，则上面的关系可以写成如下的优化问题：

$$\max_{r}\{H(x,y,r):r\geqslant 0\} \text{——政府}$$

$$\max_{x}\{F(x,r)-rx:x\geqslant 0\} \text{——造纸厂}$$

$$\max_{y}\{G(x,y):y\geqslant 0\} \text{——渔民}$$

显然这是一个三层规划问题，但是可以通过 KK－T 条件将其转化为双层规划问题。当然，上面的例子中每一个决策者都可能受到一些条件的限制，因此，可以将模型中各层问题添加约束条件，形成更加完善的多层规划模型。

近一二十年，双层规划的应用领域迅速增加，例如国防、军事战备、国家之间公共海域的使用等都已经应用双层规划模型来模拟实际情况，期望找到令参与者双方都满意的折中方案。但是，不可否认的是现有的解决双层规划问题的算法能够解决的问题规模和实际亟待解决的问题都有着较大的差距。此外，由于许多实际问题本身比较复杂，有些能反映实际问题的双层规划模型在现阶段还没有可行的算法来求解，往往要借助一些老的算法来逼近，从而使模型无法得到全局最优解（有时甚至连局部最优解都得不到）。而对于一些根据实际问题设计的模型，例如非线性的、非光滑的双层规划模型，有的根本无法找到可行的求解算法，只能借助枚举法或近似方法去寻找近似最优解，这大大降低了模型的应用效率。故此，针对实际问题中各种具有特殊结构的问题，研究建立科学有效的模型，并设计合适可行的求解算法，不仅具有重要的理论价值，还具有十分重要的现实意义。

本书将主要阐述整数线性双层规划模型、连续线性双层规划模型，凸双层规划模型和一般非线性双层规划模型的一些已经成型的理论成果，针对一些特殊模型给出求解算法，并把这些模型和算法应用到管理、交通以及环境保护等问题中。本书的主要参考文献有双层规划基础（Stephan Dempe [38]）、实用双层规划（Jonathan F. Bard [98]）、凸规划（Stephen Boyd 和 Lieven Vandenberghe [183]）和 线性规划与网络流（Mokhtar S. Bazaraa 和 John J. Jarvis [131] ）。

第 2 章　连续线性双层规划

连续线性双层规划问题（Linear Bilevel Programming Problem，L－BLPP）是指变量均为连续变量，且上、下层都是线性规划的双层规划问题。线性双层规划问题早在 20 世纪 70 年代中期就已经开始被讨论，发展至今已经有许多有效的求解算法，如 K－T 算法、互补算法、罚函数算法等。人们将连续线性双层规划方法应用于工程、管理、交通等领域，主要用于讨论多目标决策问题或带有等级结构，且上、下层具有不同目标函数的问题中。典型的应用有供应链管理模型、库存管理模型、生产计划模型等。本章将重点阐释连续线性双层规划的基本性质、定理、最优性条件和求解方法等，其应用将在第 6 章、第 7 章探讨。

2.1　连续线性规划的基本理论

连续线性双层规划问题的研究是以单层线性规划问题的理论为基础的，为了更好地论述线性双层规划问题，我们首先介绍单层线性规划问题的相关理论和求解算法。

带有约束的线性规划问题（Linear Programming，LP）一般可以写成下面的数学形式（2.1.1）：

$$\min_{x} f(x)=cx \tag{2.1.1a}$$

$$(\mathrm{LP})\qquad \text{s.t. } Ax=b \tag{2.1.1b}$$

$$x\geqslant 0 \tag{2.1.1c}$$

其中，$x\in \mathbf{R}^n$ 是 n 维列向量，c 是 n 维行向量，A 是 $m\times n$ 矩阵，$m\leqslant n$；b 是 m 维列向量。约束函数式（2.1.1b）是线性函数，式（2.1.1c）是非负约束。满足所有约束条件的点集 $S(x)=\{x\mid Ax=b,\ x\geqslant 0\}$ 称为 LP 的可行解集。在这里目标函数的系数 c 一般解释为成本，矩阵 A 通常被认为是技术系数，而 b 则代表可利用的资源水平。该线性规划问题描述的是在给定的技术水平下、资源有限时的成本最小方案。

式（2.1.1）是标准的线性规划形式，容易证明不符合式（2.1.1）形式的线

性规划问题可以很容易地转化为式（2.1.1）的形式。例如，若约束式（2.1.1b）是线性不等式 $\boldsymbol{A}x\leqslant b$，我们可以通过在不等式左边加一个松弛变量 $x'\in\mathbf{R}$，使之变为等式：$\boldsymbol{A}x+x'=b$，其中 $x'\geqslant 0$。同理，对于形式为 $\boldsymbol{A}x\geqslant b$ 的约束可以通过减去松弛变量 x' 使之成为等式：$\boldsymbol{A}x-x'=b$，其中 $x'\geqslant 0$。式（2.1.1b）中的 b 一般认为是非负的（$b\geqslant 0$），显然在左侧加上或减去合适的松弛变量后仍能保证 $b\geqslant 0$。在约束式（2.1.1c）中若存在某个变量 x_i 没有非负限制，则可以令 $x_i=x_i^+-x_i^-$，其中 $x_i^+\geqslant 0$，$x_i^-\geqslant 0$ 分别称为 x_i 的正部和负部。用 $x_i^+-x_i^-$ 替换式（2.1.1）所有函数（包括目标函数和约束函数）中的变量 x_i，则得到的线性规划中所有变量都满足非负限制。

式（2.1.1b）中若 $m=n$，且系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 各行线性无关，则 LP 有唯一一组解，此时目标函数 cx 和非负约束 $x\geqslant 0$ 将不再起作用，故我们一般假定 $m<n$，且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 行是线性无关的，这时方程组 $\boldsymbol{A}x=b$ 有 $n-m$ 个自由未知量。

例 1　设线性规划

$$\begin{aligned}&\min_x 2x_1+x_2+4x_3+2x_4\\ \text{s.t.}\quad & x_1+2x_2+x_3+x_4=2\\ & x_2+3x_3+2x_4=5\\ & x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0,x_4\geqslant 0\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

这里 $m=2$，$n=4$，$m<n$，x_3，x_4 是自由未知量（自由未知量取法不唯一），且

$$\begin{aligned}x_1&=-8+5x_3+3x_4\\ x_2&=5-3x_3-2x_4\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

注意到目标函数是 cx，故目标函数的最小值点一定在可行域的边界上达到，例如在上述规划式（2.1.2）中，将式（2.1.3）代入目标函数 $f(x)=2x_1+x_2+4x_3+2x_4$ 后得 $f(x)=11x_3+6x_4-11$，这意味着 $f(x)$ 在 $x_3>0$，$x_4>0$ 时没有最小值，除非 $x_3=0$，$x_4=0$。

一、基本定义和定理

1. 基矩阵和基本可行解

在线性规划问题（2.1.1）的约束条件 $\boldsymbol{A}x=b$ 中，若系数矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}(m<n)$ 是行满秩的，即 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩为 m，则意味着可以在矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的 n 列中挑选 m 个线性无关的列，不妨设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的前 m 列线性无关，故 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 可以写成 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 的形式，其中 $\boldsymbol{B}$ 是由矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的前 m 行、前 m 列构成的 m 维可逆矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是 $m\times(n-m)$ 矩阵。对应地，我们把向量 x 写成 $x=(x_B,x_C)^T$ 的形式，其中 x_B 是对应于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 m 行 1 列向量，x_C 是 $m-n$ 行 1 列向量，则 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{B}x_B+\boldsymbol{C}x_C=$