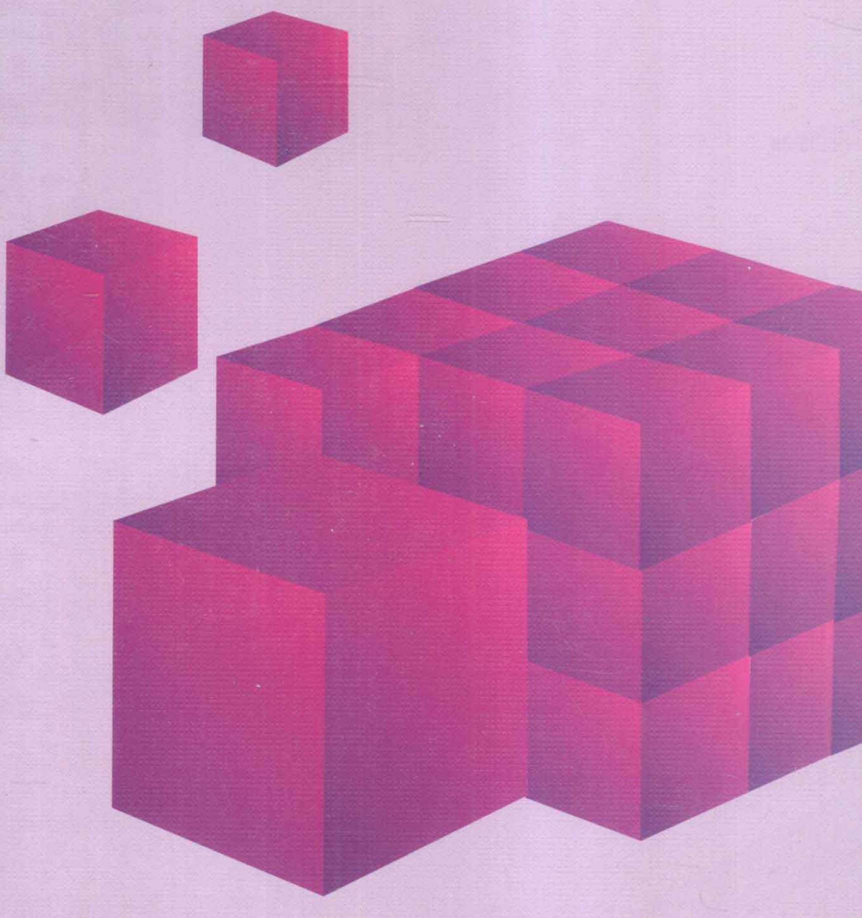
概率论与数理统计习题解答

GAILULUN YU SHULITONGJI

XITI JIEDA

主编 ◎ 李裕奇 赵联文 郑海涛 王璐



西南交通大學出版社
SWJUP Http://press.swjtu.edu.cn

概率论与数理统计

习 题 解 答

主编 李裕奇 赵联文 郑海涛 王 璐

西南交通大学出版社
·成 都·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计习题解答 / 李裕奇等主编. 一成都：西南交通大学出版社，2012.1
ISBN 978-7-5643-1559-7

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①概率论－高等学校－题解②数理统计－高等学校－题解 Ⅳ. ①021-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 269511 号

概率论与数理统计习题解答

主编 李裕奇 赵联文 郑海涛 王 璐

*

责任编辑 王 旻
特邀编辑 王玉珂
封面设计 本格设计
西南交通大学出版社出版发行
(成都二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行部电话：028-87600564)
http: //press.swjtu.edu.cn
成都蓉军广告印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸：185 mm×260 mm 印张：28.125
字数：928 千字
2012 年 1 月第 1 版 2012 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5643-1559-7
定价：45.00 元

前　言

概率论与数理统计是大学理工科本科阶段的一门重要的、也是最难的一门数学基础理论课程，掌握这门课程知识的程度会对本科学生将来的学习、工作与生活产生深远的影响. 但学习掌握这门课程知识具有相当的难度，特别是每当学生们在一道道概率统计试题，一个个实际随机数学问题面前，茫然失措，无处着手时，总是迫切希望在手边拥有一本能教会他们破题、解题，提供解题思路，指明解题步骤，明确解题方法的学习指导书籍，这样会使他们能够从容面对和解决概率统计问题，并加快学习掌握这门知识的速度. 为了帮助读者更好地学习概率论与数理统计的基本概念、基本理论与基本方法，我们编写了本书，读者可以通过主教材与本书的对照、思考与分析的学习，扎实地掌握概率统计的基本概念，熟练公式的运用，逐步地掌握求解事件的概率方法，建立概率模型，建立统计模型与初步进行随机数据的统计分析方法，提升解决实际随机数学问题的本能，具备较高的随机数学素养.

本书是由西南交通大学数学学院统计系李裕奇、赵联文、郑海涛与王璐等老师，通过多年的课程教学实践共同编写完成的，内容包括概率论部分（第一至第五章），数理统计部分（第六至第九章）及考研概率统计真题部分（第十章）等三部分试题的完全解答，详细分析了每道题的解决方法、解决思路与解题步骤，便于初学者掌握. 本书不仅包括了由国防工业出版社出版的《概率论与数理统计》（李裕奇，赵联文，王沁，刘赪等编）教材的全部习题解答，即囊括了教材中每一节后的基本练习，每一章后的综合练习与自测题的详尽解答，另外还包括了许多基于重点、难点内容的附加题的详尽解答，以及 1998 年以来考研概率统计真题的详尽解答，能适合各种层次、种目标的学习者使用，可供从事概率统计相关工作的科技人员参考. 本书收集习题数量大，解题方法简明易懂，分析思路丝丝入扣，习题深浅严格到位，力求使读者通过此书的运用，达到尽快提高求解概率统计试题的能力，提高分析和解决实际概率统计问题的能力，期望能让读者有恍然一觉之明悟，大有收获之感叹，跃跃一试之萌动，即是编者的莫大欣慰.

西南交通大学数学学院统计系的何平教授、邓绍高副教授、王沁副教授、刘赪副教授、程世娟、袁代林、唐家银、王建鹏、杨宝莹等老师也参与了编写工作，还有毛丹梅、王巧玲、李克胜等研究生也参与了本书的部分编写工作. 本书的编成与出版得到了西南交通大学数学学院和西南交通大学出版社的大力支持，作者在此表示非常衷心的感谢. 对于书中的谬误与不妥之处，敬请读者批评指正.

李裕奇

2011 年 7 月于成都

目　　录

第一章　概率论的基本概念

一、基本内容

1. 随机试验、样本空间及随机事件

（1）随机试验 E.

若一试验具有以下三个特点：

① 可以在相同条件下重复进行.

② 每次试验的可能结果不止一个，但每次试验只能出现一个，并且事先明确试验的所有可能结果.

③ 进行一次试验之前不能确定哪一个结果出现.

则称此试验为随机试验.

（2）样本空间 S.

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间. 组成样本空间的元素，即 E 的每个可能结果，称为样本点，或称为基本事件.

（3）随机事件.

随机试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件. 当且仅当事件包含的样本点中至少一个出现时，称这一事件发生.

（4）事件间的运算.

设 A，B，C 为随机事件，则

$$A\cup B=B\cup A,\ A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$
$$A\cap B=B\cap A,\ A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A-B=A\cap\overline{B}=A\overline{B},\ \overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i},\ \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$$

2. 事件发生的频率和概率

（1）事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 为 n 次试验中事件 A 发生的次数 n_A 与试验总次数 n 之比，即 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$.

（2）事件 A 发生的概率 $P(A)$具备以下三个特点：

① $\forall A\subset S$，$P(A)\geqslant 0$.

② $P(S)=1$.

③ 若 A_1，A_2，…为两两互不相容的事件列，即$\forall i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，则有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

（3）概率的基本性质.

① $P(\varnothing)=0$.

② $\forall i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$（i，$j=1$，2，…，n），则有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

③ $\forall A\subset B$，则有 $P(A)\leqslant P(B)$，且有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

④ $\forall A\subset S$，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

⑤ $\forall A$，$P(A)+P(\overline{A})=1$.

⑥ $\forall A$，B，$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$，且有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

3. 古典概型（等可能概型）与几何概型

（1）古典概型概念.

若试验具有以下两个特点：

① 试验的样本空间中的元素个数只有有限个，不妨设为 n 个，记为 e_1，e_2，…，e_n.

② 每个基本事件$\{e_i\}$出现的可能性相同，则称此试验为古典概型.

（2）古典概型计算公式.

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件的总数}}$$

（3）几何概型.

若试验具备以下两个特点：

① 每次试验的可能结果有无限多个，且全部可能结果的集合可用一个有度量（如长度、面积、体积等）的几何区域来表示.

② 每次试验中每个可能结果的出现是等可能的，这样的试验被称为几何概型. 若样本空间 S 对应于区域 G，事件 A 对应于区域 g，则几何概型计算公式为

$$P(A)=\frac{g\text{的几何度量}}{G\text{的几何度量}}$$

4. 条件概率

（1）条件概率.

设 A，B 为两事件，且 $P(A)>0$，则称 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生条件下事件 B 发生的条件概率.

（2）乘法定理.

设 A，B 为两事件，且 $P(A)>0$，则有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

（3）全概率公式.

设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，B_1，B_2，…，B_n 为 S 的一个划分，(完备事件组)，即满足条件：

① B_1，B_2，…，B_n 两两互不相容，即 $\forall i\neq j$，$B_iB_j=\varnothing$（i，$j=1$，2，…，n）.

② $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$，且 $P(B_i)>0$（$i=1$，2，…，n），则有

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$$

（4）贝叶斯公式.

设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，B_1，B_2，…，B_n 为 S 的一个划分，且 $P(A)>0$，$P(B_i)>0$（i=1，2，…，n），则有

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)},\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

5. 事件的独立性

（1）两个事件的独立性.

设 A，B 是两事件，若有 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A，B 为相互独立的事件.

（2）逆事件的独立性.

如果四对事件 A 与 B，$\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中有一对是相互独立的事件，则另外各对也是相互独立的事件.

（3）多个事件的独立性.

设 A_1，A_2，…，A_n 为 n 个事件，如果对于任意 k $(1\leqslant k\leqslant n)$，任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，具有等式 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$，则称 A_1，A_2，…，A_n 为相互独立事件.

设 A_1，A_2，…为可列多个事件，如果其中任意有限个事件是相互独立的，则称这可列多个事件为相互独立事件列.

6. 贝努利概型

（1）概　念.

设一次试验 E 的结果，仅为 A 或 $\overline{A}$，且 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p\ (0<p<1)$，将 E 独立重复进行 n 次，则称这一串重复进行的独立试验为 n 重贝努利试验，亦称为贝努利概型.

（2）二项概率公式.

n 重贝努利试验中事件 A 恰发生 k 次的概率为 $P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}$（$k=0，1，\cdots，n$；$0<p<1$）.

二、基本要求

（1）理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件之间的关系和运算.

（2）理解事件频率的概念，掌握频率的计算公式.

（3）理解概率的公理化定义，掌握概率的基本性质，掌握古典概型计算公式与几何概型计算公式.

（4）理解条件概率的概念，掌握概率的乘法定理，学会运用全概率公式和贝叶斯公式求事件的概率.

（5）理解事件的独立性概念，了解事件的独立性定义，并学会运用事件的独立性解题.

（6）理解试验的独立性概念，掌握贝努利概型，学会二项概率的计算方法.

三、习题详解

基本练习 1.1

1. 试判断下列试验是否为随机试验：（1）在恒力作用下一质点作匀加速运动.（2）在一定条件下进行射击，观察是否击中靶上的红心.（3）在 5 个同样的球（标号 1，2，3，4，5）中，任意取一个，观察所取球的标号.（4）在分析天平上称量一小包白糖，并记录称量结果.

解　判断一个试验是否是随机试验，应检查其是否满足以下三条：① 试验在相同条件下可以重复进行. ② 每次试验的可能结果不止一个，且每次试验只会出现一个可能结果. ③ 事先明确试验的全部可能结果，但每次试验之前不能确定哪一个结果会发生，照此判定.

（1）不是随机试验，因为这样的试验只有唯一的结果.

（2）是随机试验，因为射击可在同样条件下进行，每次射击有两个可能结果：击中或不中，且射击之前不能确定是否击中或不中.

（3）是随机试验，因为取球可在同样条件下进行，每次取球有 5 个可能结果：1，2，3，4，5，且取球之前不能确定取出几号球.

（4）是随机试验，因为称量可在同样条件下进行，每次称量的结果用 x 表示，则有 $x\in(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$，其中 a 为小包白糖的重量，ε 为称量结果的误差限. 易见每次称量会有无穷多个可能结果，在称量之前不能确定哪一个结果会发生.

2. 试写出下列试验的样本空间：（1）记录一个小班（30 人）一次概率考试的平均分数（以百分制记分）.（2）同时掷 3 颗骰子一次，记录骰子点数之和.（3）生产某产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数.（4）对某工厂的产品进行检查，合格的记上“正品”，不合格的记上“次品”. 如果连续查出两个次品的停止检查，或检查 4 个产品停止检查，记录检查结果.（5）在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.（6）将一尺之棰折成 3 段，观察各段的长度.

解

（1）显然，若这个小班 30 人中人人都得 0 分，自然班平均分数为 0；若人人都得 100 分，自然班平均分数为 100，而班级总分从 0 取到 30×100 都是可能的，故样本空间为 $S_1=\left\{\dfrac{0}{30},\ \dfrac{1}{30},\ \dfrac{2}{30},\ \cdots,\ \dfrac{30\times100}{30}\right\}$

（2）因为每个骰子的最小点数为 1，故 3 个骰子的最小点数和为 3；而每个骰子的最大点数为 6，故 3 个骰子的最大点数和为 18. 而 3 个骰子点数和从 3 取到 18 都是可能的，故此试验的样本空间为 $S_2=\{3, 4, 5, \cdots, 18\}$.

（3）由于生产的产品直到有 10 个正品为止，故生产此种产品的总数至少为 10，即全部 10 个为正品；其次为 11，即其中有 1 个次品；同理，生产产品总数可能为 12，13，…，故此试验的样本空间为 $S_3=\{10, 11, 12, 13, \cdots\}$.

（4）记正品为“1”，次品为“0”，则此试验的样本空间可用“0”和“1”表示，如“00”表示连续 2 个次品，“010”表示第一次查到次品，第二次查到正品，第三次查到次品，但“010”并不是本试验的一个基本事件，因其不满足试验的要求，而“0100”或“0101”才是本试验的基本事件，故此试验的样本空间可表示为 $S_4=\{00, 0100, 100, 1010, 0101, 0110, 0111, 1110, 1011, 1111, 1100, 1101\}$.

（5）在单位圆内任取一点，这一点的坐标设为(x, y)，则 x，y 应满足条件 $x^2+y^2\leqslant 1$，故此试验的样本空间为 $S_5=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

（6）将一尺之棰折为 3 段，设各段长为 x，y，z，则 x，y，z 应满足条件 $x+y+z=1$，且 $x>0$，$y>0$，$z>0$，故此试验的样本空间为 $S_6=\{(x, y, z)\mid x+y+z=1, x>0, y>0, z>0\}$.

3. 设 A，B，C 为三个事件，试将下列事件用 A，B，C 的运算关系表示出来：（1）三个事件都发生.（2）三个事件都不发生.（3）三个事件至少有一个发生.（4）A 发生，B，C 不发生.（5）A，B 都发生，C 不发生.（6）三个事件中至少有两个发生.（7）不多于一个事件发生.（8）不多于两个事件发生.

解

（1） ABC.

（2） $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$.

（3） $A\cup B\cup C$ 或 $\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$，或

$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$.

（4） $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-(B\cup C)$.

（5） $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$.

（6） $AB\cup BC\cup AC$.

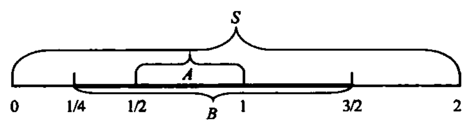
（7） $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$ 或 $\overline{AB\cup BC\cup AC}$.

（8） $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{ABC}$，或

$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C$.

4. 设 $S=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，$A=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x\leqslant 1\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{3}{2}\right\}$，具体写出下列各事件：（1）$\overline{A}B$.（2）$\overline{A}\cup B$.（3）$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$.（4）$AB$.

解 将 S，A 与 B 表示为如图所示：



题 4 图

（1） $\overline{A}B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\text{ 或 }1<x<\frac{3}{2}\right\}$.

（2） $\overline{A}\cup B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}=S$.

（3） $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=A\cup B=B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{3}{2}\right\}$.

（4） $AB=A=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x<1\right\}$.

5. 下列各式说明什么包含关系？（1）$AB=A$.（2）$A\cup B=A$.（3）$A\cup B\cup C=A$.

解

（1） $AB=A$ 表示事件 A 包含于事件 B，事件 B 包含事件 A，即 $A\subset B$.

（2） $A\cup B=A$ 表示事件 B 包含于事件 A，事件 A 包含事件 B，即 $B\subset A$.

（3） $A\cup B\cup C=A$ 表示事件 $B\cup C$ 包含于事件 A，事件 A 包含事件 $B\cup C$，即 $B\cup C\subset A$.

6. 证明：对于任意两事件 A 与 B，关系式（1）$A\subset B$.（2）$\overline{A}\supset\overline{B}$.（3）$A\cup B=B$.（4）$AB=A$.（5）$A\overline{B}=\varnothing$ 相互等价.

证

（1）⇒（2），如果 $A\subset B$，则 $B=A\cup(B-A)$，由德·摩根公式知，$\overline{B}=\overline{A\cup(B-A)}=\overline{A}\cap\overline{(B-A)}\subset\overline{A}$，故（1）⇒（2）成立.

（2）⇒（3），因为 $\overline{B}\subset\overline{A}$ 表示"B 不发生则 A 一定不发生"，这就是说 A 是 B 的部分事件，即 $A\subset B$，故 $A\cup B=B$.

（3）⇒（4），显然有 $AB\subset A$，由（3）知 $A\cup B=B$，故 $AB=A(A\cup B)=A\cup AB\supset A$，即由 $AB\subset A$ 且 $AB\supset A$，得 $AB=A$.

（4）⇒（5），由（4）知 $AB=A$，故 $A\overline{B}=(AB)\overline{B}=A(B\overline{B})=A\varnothing=\varnothing$，即（5）式成立.

（5）⇒（1），用反证法：若（1）不成立，则有 $B\subset A$，故 $A-B$ 不是不可能事件，即 $A\overline{B}\neq\varnothing$，这与（5）矛盾，因此（5）⇒（6）得证.

7. 证明下列事件等式成立：（1）$A\cup B=A\overline{B}\cup B$.（2）$(A-AB)\cup B=A\cup B=\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$.

证

（1）因为由摩根律知 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，而

$$\overline{A\overline{B}\cup B}=\overline{A\overline{B}}\cap\overline{B}=(\overline{A}\cup\overline{\overline{B}})\overline{B}=(\overline{A}\cup B)\overline{B}=\overline{A}\overline{B}\cup B\overline{B}=\overline{A}\overline{B}\cup\varnothing=\overline{A}\overline{B}$$

所以 $\overline{A\cup B}=\overline{A\overline{B}\cup B}$

即 $A\cup B=A\overline{B}\cup B$ 成立.

（2）因为 $\overline{(A-AB)\cup B}=\overline{(A-AB)}\cap\overline{B}=(\overline{A\overline{AB}})\overline{B}=(\overline{A}\cup AB)\overline{B}$

$$=(\overline{A}\,\overline{B})\cup(AB)\overline{B}=\overline{A}\,\overline{B}\cup AB\overline{B}=\overline{A}\,\overline{B}\cup\varnothing=\overline{A}\,\overline{B}$$

所以 $(A-AB)\cup B=\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$

又 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$

故 $A\cup B=\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$

得知（2）式成立.

8. 化简事件算式：$(AB)\cup(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)\cup(\overline{A}\,\overline{B})$.

解 $(AB)\cup(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)\cup(\overline{AB})=(AB\cup A\overline{B})\cup(\overline{A}B\cup\overline{AB})=A\cup\overline{A}=S$

9. 已知 $(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup\overline{B})\cup(\overline{A\cup B})\cup(\overline{\overline{A}\cup B})=C$，试求 B.

解 因为 $(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup\overline{B})=A\overline{A}\cup A\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{B}$

$$\overline{(\overline{A\cup B})\cup(\overline{\overline{A}\cup B})}=(A\cup B)\,(\overline{A}\cup B)=A\overline{A}\cup AB\cup B\overline{A}\cup B=B$$

由题设得 $C=(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup\overline{B})\cup(\overline{A\cup B})\cup(\overline{\overline{A}\cup B})=\overline{B}\cup\overline{(\overline{A\cup B})\cup(\overline{\overline{A}\cup B})}=\overline{B}\cup\overline{B}=\overline{B}$

所以 $B=\overline{\overline{B}}=\overline{C}$

10. 若事件 A，B，C 满足等式，$A\cup C=B\cup C$，试问 $A=B$ 是否成立？

解 否. 参见示例，设事件 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$B=\{1, 2, 3\}$，$C=\{4, 5, 6\}$，易见：$A\cup C=A=B\cup C$，但是 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\neq B=\{1, 2, 3\}$.

基本练习 1.2

1. 在相似于大田培育的环境下，对某良种麦种子做发芽试验，分别任意抽取 5 粒、10 粒、50 粒、100 粒、300 粒、600 粒种子进行培育，观察并统计其发芽数分别依次为 5，8，44，91，272，542 粒. 试由各发芽的频率确定这种小麦的发芽率，其稳定中心当为何值？

解 设 $A=\{$任取这种小麦一粒发芽$\}$，则由频率公式可得

$$f_5(A)=\frac{5}{5}=1,\quad f_{10}(A)=\frac{8}{10}=0.8,\quad f_{50}(A)=\frac{44}{50}=0.88$$

$$f_{100}(A)=\frac{91}{100}=0.91,\quad f_{300}(A)=\frac{272}{300}=0.91,\quad f_{600}(A)=\frac{542}{600}=0.9$$

（1）利用平均值法确定稳定中心：

$$P(A)=\frac{1+0.8+0.88+0.91+0.91+0.9}{6}=0.9$$

（2）利用中位数法确定稳定中心：

将上述所得频率值按从小到大顺序排列为：$0.8<0.88<0.9<0.91=0.91<1$. 所以取中间两值的平均

$$P(A)=\frac{0.9+0.91}{2}=0.905$$

2. 已知 $P(A)=P(B)=1/4$，$P(C)=1/2$，$P(AB)=1/8$，$P(BC)=P(CA)=0$，试求 A，B，C 中至少有一个发生的概率.

解 $\{A，B，C\text{中至少有一个发生}\}=A\cup B\cup C$

而 $ABC\subset BC$

且 $P(BC)=0$

所以有 $P(ABC)=0$

故而 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-0-0+0=\frac{7}{8}$$

3. 设 $P(A)=a$，$P(B)=b$，$P(A\cup B)=c$，试求 $P(AB)$，$P(A\overline{B})$ 及 $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解 由于 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

所以

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=a+b-c$$

$$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=a-(a+b-c)=c-b$$

$$P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{\overline{A}\overline{B}})=1-P(A\cup B)=1-c$$

4. 已知 $A\supset BC$，证明：$P(A)\geqslant P(B)+P(C)-1$.

证 因为 $A\supset BC$，所以 $P(A)\geqslant P(BC)$.

而 $P(BC)=P(B)+P(C)-P(B\cup C)\geqslant P(B)+P(C)-1$

所以有 $P(A)\geqslant P(AB)\geqslant P(B)+P(C)-1$

5. 设 A，B 是任意两个互不相容的事件，试求 $P(A-B)$.

解 由于 $AB=\varnothing$，而 $A-B=A-AB$，故而

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(\varnothing)=P(A)$$

6. 设 A，B 为两事件，$P(A)=0.5$，$P(A-B)=0.2$，试求 $P(\overline{AB})$.

解 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.2$

所以 $P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.5-0.2=0.3$

故 $P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.3=0.7$

7. 某市有 50% 的住户订日报，有 65% 的住户订晚报，有 85% 的住户至少订这两种报纸中的一种. 试问同时订这两种报纸的住户百分比是多少？

解 设 $A=\{\text{住户订日报}\}$，$B=\{\text{住户订晚报}\}$，已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.65$，$P(A\cup B)=0.85$，

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.5+0.65-0.85=0.3$$

即同时订两种报纸的住户占 30%.

8. 设 A，B 为两事件，且 $P(A)=p$，$P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$. 试求 $P(B)$.

解 由于 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

而 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

故 $P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)$

而 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$

得 $$P(A)+P(B)=1$$

所以 $$P(B)=1-P(A)=1-p$$

基本练习 1.3

1. 在 0，1，2，…，9 这 10 个数中任取 4 个，能排成 4 位偶数的概率是多少？

解 基本事件是从 10 个数中任取 4 个作全排列，样本空间 S 的样本点总数为 $n=10\times9\times8\times7=\mathrm{A}_{10}^4$，记事件 $A=\{$排成 4 位偶数$\}$，则 A 包含基本事件数为以下两种情况之和：

（1）个位数为 0，前面 3 位数可以从其余 9 个数字中任取 3 个来排列，故排列的总数 $k_1=9\times8\times7=504$．

（2）个位数和首位数都不为 0 时，个位是偶数共有 4 种取法，首位则要从除了 0 之外余下的 8 个数字中任取 1 个，然后中间的两位数从余下的 8 个数字中任取 2 个来排列，故排列的总数 $k_2=4\times8\times8\times7=1\ 792$．所以事件 A 所包含的基本事件总数为 $k_1+k_2=504+1\ 792=2\ 296$，

故而 $$P(A)=\frac{k_1+k_2}{n}=\frac{2\ 296}{5\ 040}=0.455\ 6$$

2. 在 11 张卡片上分别写上 probability 中的 11 个字母，从中任意抽取 7 张.试求其排列结果为 ability 的概率.

解 设 $A=\{$抽出的 7 张能排列成 ability$\}$．从 11 张卡片中任意抽取 7 张排成一排，排法总数为 A_{11}^7；而排成 ability 全部可能的排法为 $\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_1^1=2\times2=4$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{4}{\mathrm{A}_{11}^7}=0.000\ 002\ 4$$

3. 10 个螺丝钉有 3 个是坏的，随机抽取 4 个．试问：（1）恰好有两个是坏的概率是多少？（2）4 个全是好的概率是多少？

解 设 $A_k=\{$从 10 个螺丝钉中任取 4 个，其中恰有 k 个坏的$\}$（$k=0，1，2，3$），

（1） $$P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_7^2}{\mathrm{C}_{10}^4}=\frac{63}{210}=0.3$$

（2） $$P(A_0)=\frac{\mathrm{C}_3^0\mathrm{C}_7^4}{\mathrm{C}_{10}^4}=\frac{35}{210}=0.166\ 7$$

4. 10 层楼的一部电梯上同载 7 个乘客，且电梯可停在 10 层楼的每一层．试求不发生两位及两位以上乘客在同一层离开电梯的概率.

解 每一位乘客都可以在 10 层楼的任意一层离开电梯（类似于有放回的取数），所有可能结果总数为 $n=10^7$，记事件 $A=\{$不发生两位及两位以上的乘客在同一层离开电梯$\}$，当 A 发生时，7 个人不在同一层离开电梯，故所有可能结果总数为 $k=10\times9\times8\times7\times6\times5\times4=\mathrm{A}_{10}^7$，所以

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\mathrm{A}_{10}^7}{10^7}=\frac{189}{3\ 125}=0.060\ 48$$

5. 某商店有 3 桶油漆，分别为红漆、黑漆和白漆，在搬运中所有的标签都脱落，售货员随意将这些漆卖给需要红漆、黑漆和白漆的三位顾客．试问至少有一位顾客买到所需颜色油漆的概率.

解法一 设 $A=\{$至少有一位顾客买到所需颜色油漆$\}$，这是一个配对问题，因为将 3 桶油漆随意卖给三位顾客的可能结果有 3! 种，可以这样思考，把 3 种油漆编为 1，2，3 号，三位顾客对应编为 1，2，3 号，第 i 号油漆卖给第 i 号顾客，算作一个配对．1，2，3 号的全部排列结果为 3! 种，即 123 132 213 231 312 321，剔除没有一个配对的排列 231 与 312，知至少有一位顾客买到所需油漆的可能结果有 4 个，故所求概率为

$$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

解法二 利用概率加法公式解决，记事件 $A_i=\{$第 i 位顾客买到所需颜色的油漆$\}$（$i=1，2，3$），则 $A_1\cup A_2\cup A_3=\{$至少有一位顾客买到所需颜色油漆$\}$.

$$P(A_i)=\frac{1}{3},\qquad i=1,\ 2,\ 3$$

$$P(A_iA_j)=\frac{1}{3\times 2},\qquad i,\ j=1,\ 2,\ 3;\ i<j$$

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{3\times 2\times 1}$$

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\\&=3\times\frac{1}{3}-3\times\frac{1}{3\times 2}+\frac{1}{3\times 2\times 1}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

6. 袋中装有编号为 1，2，…，n 的 n 个球，每次从中任意摸一球. 若按下面的方式，试求第 k 次摸球时，首次摸到 1 号球的概率：(1) 有放回方式摸球. (2) 不放回方式摸球.

解

(1) 设 $A=\{$有放回第 k 次摸球时首次摸到 1 号球$\}$，因为有放回时每次摸球都有 n 种可能，故摸 k 次共有 n^k 种可能的结果. 若摸第 k 次首次摸到 1 号球，那前面 $k-1$ 次就都是从 1 号以外的 $n-1$ 个球中摸取，从而有利于 A 的结果有 $1\times(n-1)^{k-1}$ 种，故

$$P(A)=\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$$

(2) 设 $B=\{$不放回摸球 k 次时首次摸到 1 号球$\}$，显然 $k\leqslant n$ ($k>n$ 时为不可能事件). 设想将 k 次摸到的球排成一排，总的结果个数相当于从 n 个球中一次摸取 k 个的排列数 A_n^k，每种结果是等可能的. 若第 k 次摸球时，首次摸到 1 号球，那前面的 $k-1$ 次就相当于从 1 号以外的 $n-1$ 个球中一次摸取 $k-1$ 个的排列，从而有利于 B 的结果，有 $1\times A_{n-1}^{k-1}$ 种，故

$$P(B)=\frac{A_{n-1}^{k-1}}{A_n^k}=\frac{1}{n}$$

7. 掷硬币 $2n$ 次，试求出正面次数多于出反面次数的概率.

解 记事件 $A=\{$出正面次数多于出反面次数$\}$，$B=\{$出正面次数少于出反面次数$\}$，$C=\{$出正面次数等于出反面次数$\}$，则 $A\cup B\cup C=S$，且 A、B、C 两两互不相容，故

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=P(S)=1$$

由于 $\qquad P(A)=P(B)$，$P(C)=1-P(A)-P(B)=1-2P(A)$

所以 $\qquad P(A)=\frac{1}{2}[1-P(C)]=\frac{1}{2}\left[1-\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\right]$

实际上，由二项式知 $2^{2n}=(1+1)^n=\sum\limits_{k=0}^{2n}C_{2n}^k$，即

$$P(A)=\frac{C_{2n}^{n+1}+C_{2n}^{n+2}+\cdots+C_{2n}^{2n}}{2^{2n}},\quad P(B)=\frac{C_{2n}^0+C_{2n}^1+\cdots+C_{2n}^{n-1}}{2^{2n}},\quad P(C)=\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$$

8. 若一年按 365 天计算，试问 500 人中，至少有一个人的生日在 7 月 1 日的概率是多少？

解 此问题属于古典概型中的分房（生日）问题，设 $A=\{$至少有一个人的生日在 7 月 1 日$\}$，可以先考虑问题事件 A 的对立事件的概率为

$$P\{\text{每个人的生日在不在 7 月 1 日}\}=P(\overline{A})=\frac{364^{500}}{365^{500}}$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{364^{500}}{365^{500}}=0.746\ 3$$

9. n 个朋友随机地围绕圆桌就坐. 试问其中两个人一定要坐在一起（即座位相邻）的概率是多少？

解 显然，当 $n=2$ 时，两个人一定要坐在一起（即座位相邻）的概率是 1；当 $n\geqslant 3$ 时，考虑若一人先坐下，则另外一个人总共可有 $n-1$ 个座位供选择. 而要求两个人一定要坐在一起，则此人仅有两种选择，故其概率为 $2/(n-1)$，即

$$P\{\text{两个人一定要坐在一起}\}=\begin{cases}\dfrac{2}{n-1}, & n\geqslant 3\\ 1, & n=2\end{cases}$$

10. 某旅行社 100 人中有 43 人会讲英语，35 人会讲日语，32 人会讲日语和英语，9 人会讲法语、英语和日语，且每人至少会讲英语、日语、法语 3 种语言中的一种．试求：（1）此人会讲英语和日语，但不会讲法语的概率．（2）此人只会讲法语的概率．

解 设 A，B，C 分别为会讲英语、日语、法语，则（1）要求 $P(AB\overline{C})$，（2）要求 $P(\overline{A}\overline{B}C)$．

（1）
$$P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)=\frac{32}{100}-\frac{9}{100}=\frac{23}{100}=0.23$$

（2）因为 $A\cup B\cup C=S$，故

$$P(\overline{A}\overline{B}C)=P(A\cup B\cup C-A\cup B)=P(S)-P(A\cup B)=1-\left(\frac{43}{100}+\frac{35}{100}-\frac{32}{100}\right)=\frac{54}{100}=0.54$$

11. 某城有 N 部卡车，车牌号从 1 到 N. 有一外地人到该城去，把遇到的 n 部车子的牌号抄下（可能重复抄到某些车牌号）. 试求抄到的最大号码正好是 k 的概率（$1\leqslant k\leqslant N$).

解 此问题可看作是对 N 个车牌号进行 n 次有放回抽样，样本空间包括样本点的总数为 N^n，而最大号码正好是 k 的取法可用最大号码不大于 k 的抽样总数减去最大号码不大于 $k-1$ 的抽样总数.

设 $A_k=\{n$ 次有放回抽样中抽到最大号码不大于 $k\}$（$k=1$，2，…，N). 当 A_k 发生时，包含的样本点总数为 k^n（$k=1$，2，…，N). 故 A_{k-1} 发生时，包含的样本点总数为 $(k-1)^n$. 因此所求概率为 $P(A)=\dfrac{k^n-(k-1)^n}{N^n}$

12. 设有某产品 40 件，其中有 10 件次品，其余为正品. 现从中任取 5 件，试求取出的 5 件产品中至少有 4 件次品的概率.

解 设 $A_k=\{$取出的 5 件产品中的次品数为 $k\}$（$k=0$，1，2，3，4，5)，则

$$P(A_k)=\frac{C_{10}^kC_{30}^{5-k}}{C_{40}^5}，\qquad k=0，1，2，3，4，5$$

所求概率为
$$P(A)=P(A_4)+P(A_5)=\frac{C_{10}^4C_{30}^1}{C_{40}^5}+\frac{C_{10}^5C_{30}^0}{C_{40}^5}=\frac{91}{9\ 139}=0.009\ 96$$

13. 某专业研究生复试时，共有 3 张考签，3 个考生应试，一个人抽一张看后立即放回，再让另一个人抽，如此 3 人各抽一次. 试求抽签结束后，至少有一张考签没有被抽到的概率.

解 记事件 $A_i=\{$第 i 张考签没有被抽到$\}$（$i=1$，2，3)，则

$$A_1\cup A_2\cup A_3=\{\text{至少有一张考签没有被抽到}\}$$

$$P(A_i)=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}，\qquad i=1，2，3$$

$$P(A_iA_j)=\frac{1^3}{3^3}=\frac{1}{27}，\qquad i，j=1，2，3；\ i<j$$

$$P(A_1A_2A_3)=0$$

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

$$=3\times\frac{8}{27}-3\times\frac{1}{27}+0=\frac{7}{9}$$

14. 将 10 根绳的 20 个头任意两两相接，试求事件 $A=\{$恰结成 10 个圈$\}$，$B=\{$恰结成 1 个圈$\}$的概率.

解 将 20 个头任意两两相接，相当于将 20 个不同数作一排列，故有排法总数为 20!.

（1）当 A 发生时，第一次从 20 个头中任取 1 个，有 20 种取法，取定一个头后，则此绳子的另一头就已确定与其相接，以便能结成一个圈；然后再从剩下的 9 根绳子 18 个头中任取一头，有 18 种取法，然后此头与此绳子的另一头再结成第二个圈. 依次类推，接法总数为 $20\times18\times16\times\cdots\times4\times2=20!!$ 故

$$P(A)=\frac{20!!}{20!}=\frac{1}{19!!}$$

（2）当 B 发生时，第一次从 20 个头中任取 1 个，取定一个头后，则此绳子的另一头就已确定将与剩下的 9 根绳子 18 个头中任取一头相接，接法数为 20×18. 接好第一个头后，仍有 9 根绳子 18 个头待接，于是又从 18 个头中任取 1 个，取定这个头后，则此绳子的另一头就已确定将与剩下的 8 根绳子 16

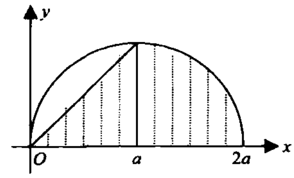
个头中任取一头相接，接法数为 18×16．依次类推，直到接完最后一根绳，接法总数为 20×18×18×16×…×4×4×2×2 = 20!!×18!! 故

$$P(A)=\frac{20!!\times 18!!}{20!}=\frac{18!!}{19!!}$$

15. 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内投一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比．试求原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\pi/4$ 的概率．

解 由掷点试验知此问题为几何概型．随机点落在半圆内任何区域的概率与该区域的面积成正比，而与该区域的位置与形状无关．由图可知，样本空间 S 对应于区域

$$G=\{(x,y)\,|\,0<y<\sqrt{2ax-x^2}\}$$



题 15 图

其面积为 $\frac{1}{2}\pi a^2$．事件 A 对应于区域

$$g=\{(x,\ y)\,|\,0<y<\sqrt{2ax-x^2},\ y\leqslant x\}$$

其面积由三角形与扇形面积可得

$$\frac{1}{2}a\times a+\frac{1}{4}\pi a^2=\frac{1}{2}a^2\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

或由二重积分得

$$\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y+\int_a^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}a^2\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

于是

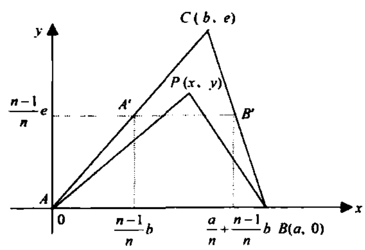
$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}a^2\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}=0.818\ 3$$

16. 在△ABC 内任取一点 P，试证明△ABP 与△ABC 的面积之比大于 $\frac{n-1}{n}$ 的概率为 $\frac{1}{n^2}$．

证明 建立如图所示坐标系，

$$A(0,\ 0),\quad B(a,\ 0),\quad C(b,\ e),\quad P(x,\ y)$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\cdot e,\quad S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}a\cdot y$$



题 16 图

由点 P 可任意落在 $\triangle ABC$ 中，要求

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{y}{e}>\frac{n-1}{n}\Rightarrow y>\frac{n-1}{n}e$$

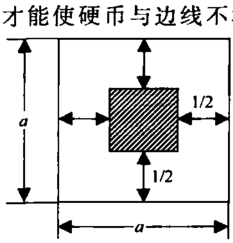
满足此条件的 P 应在 $\triangle A'B'C$ 中，所以

$$P\left(\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{n-1}{n}\right)=\frac{S_{\triangle A'B'C}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{n}+\frac{n-1}{n}b-\frac{n-1}{n}b\right)\times\left(e-\frac{n-1}{n}e\right)}{\frac{1}{2}a\times e}=\frac{1}{n^2}$$

17. 在一张印有方格的纸上投一枚直径为 1 的硬币．试问方格边长 a 要多大才能使硬币与边线不相交的概率小于 1%？

解 由于投掷的等可能性，只需考虑硬币投入一个方格的情况．如图所示，样本空间 S 对应于面积为 a^2 的区域，若硬币与边线不相交，则硬币中心应落入面积为 $(a-1)^2$ 的中心阴影区域内，故



题 17 图

$$P\{\text{硬币与边线不相交}\}=\frac{(a-1)^2}{a^2}<0.01$$

于是有 $a<10/9$

基本练习 1.4

1. 甲、乙两人，每人手中各有 6 张卡片，上面分别写有 1，2，3，4，5，6. 现从两人手中各取一张卡片（取得任何一张卡片的可能性相等），（1）试求两张卡片的数字之和为 6 的概率.（2）如果已知从甲手中取出的卡片上的数字为偶数，问两张卡片上数字之和为 6 的概率是多少？

解 记 $A=\{$两张卡片的数字和为 6$\}$，$B=\{$甲手中取出的为偶数$\}$.

由于甲、乙两人每人手中各有 6 张卡片，故从甲手中可抽得 1，2，3，4，5，6 张卡片中任一张，共有 6 种选择，从乙手中抽取方式亦为 6 种，总抽取方式有 $6\times 6=36$ 种，则此试验的样本空间 S 可表示为

$$S=\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

则 A 发生时，当且仅当样本点（1，5），（2，4），（3，3）（4，2），（5，1）发生，故有

（1）
$$P(A)=\frac{5}{6^2}=\frac{5}{36}$$

（2）当 B 发生时，取法总数为 $C_3^1\times C_6^1$，故

$$P(B)=\frac{3\times 6}{6\times 6}=\frac{1}{2},\quad P(AB)=\frac{2}{6\times 6}=\frac{1}{18},\quad P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/18}{1/2}=\frac{1}{9}$$

2. 在空战中，甲机先向乙机开火，击落乙机的概率是 0.2. 若乙机未被击落，就进行还击，击落甲机的概率是 0.3；若甲机未被击落，则再攻击乙机，击落乙机的概率是 0.4. 试求在这几个回合中，（1）甲机被击落的概率.（2）乙机被击落的概率.

解 设在这三次攻击中，“击落敌机”事件分别为 A，B，C，则依题意有

$$P(A)=0.2,\ P(B\mid\overline{A})=0.3,\ P(C\mid\overline{A}\overline{B})=0.4$$

（1） $P(\text{甲机被击落})=P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=(1-0.2)\times 0.3=0.24$

（2） $P(\text{乙机被击落})=P(A\cup\overline{A}\,\overline{B}C)=P(A)+P(\overline{A}\,\overline{B}C)=P(A)+P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})P(C\mid\overline{A}\,\overline{B})$

$$=0.2+(1-0.2)(1-0.3)\times 0.4=0.424$$

3. 设 A，B 是两随机事件，已知 $P(B)=1/3$，$P(\overline{A}\mid\overline{B})=1/4$，$P(\overline{A}\mid B)=1/5$，试求 $P(A)$.

解法一 由题设已知条件概率 $P(\overline{A}\mid\overline{B})=1/4$，$P(\overline{A}\mid B)=1/5$，$P(B)=1/3$. 故利用全概率公式可得

$$P(\overline{A})=P(B)P(\overline{A}\mid B)+P(\overline{B})P(\overline{A}\mid\overline{B})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{7}{30}$$

于是
$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{7}{30}=\frac{23}{30}=0.766\ 7$$

解法二 利用概率加法公式与乘法公式，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\text{ 与 }P(AB)=P(B)P(A\mid B)$$

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A\cup B)-P(B)+P(AB)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})-P(B)+P(B)P(A\mid B)\\&=1-P(\overline{B})P(\overline{A}\mid\overline{B})-P(B)+P(B)[1-P(\overline{A}\mid B)]\\&=1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{23}{30}=0.766\ 7\end{aligned}$$

4. 两台车床加工同样的零件，第一台出现废品的概率为 0.03，第二台出现废品的概率为 0.02. 加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多 1 倍，试求任意取出的零件是合格品的概率.

解 设 $A_i=\{$取到第 i 台车床加工的零件$\}$（$i=1,2$），由题设条件知，$P(A_1)=2P(A_2)$，且因 $P(A_i)\geqslant 0$（$i=1,2$），$P(A_1)+P(A_2)=1$，故得 $P(A_1)=2/3$，$P(A_2)=1/3$. 又设 $B=\{$取出的零件为合格的$\}$，则由全概率公式知

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$$

且其中 $$P(B\mid A_1)=1-0.03=0.97,\ P(B\mid A_2)=1-0.02=0.98$$

故得 $$P(B)=\frac{2}{3}\times 0.97+\frac{1}{3}\times 0.98=0.973$$

5. 按以往概率考试结果分析，努力学习的学生有 90% 可能考试及格，不努力学习的学生有 90% 可能考试不及格．据调查，学生中有 90% 的人是努力学习的，试问：（1）考试及格的学生中有多大可能是不努力学习的？（2）考试不及格的学生中有多大可能是努力学习的？

解 设 $A=$\{被调查学生是努力学习的\}，则 $\overline{A}=$\{被调查学生是不努力学习的\}，由题设条件知 $P(A)=0.90$，$P(\overline{A})=0.10$．又设 $B=$\{被调查学生考试及格\}，则 $\overline{B}=$\{被调查学生考试不及格\}，且由题设条件知 $P(B\mid A)=0.90$，$P(\overline{B}\mid\overline{A})=0.90$．故由逆概公式知：

（1）
$$P(\overline{A}\mid B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\frac{P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})}$$
$$=\frac{0.10\times(1-0.90)}{0.90\times0.90+0.10\times(1-0.90)}=\frac{0.01}{0.82}=0.012\,2$$

即考试及格的学生中不努力学习的学生仅占 1.22%.

（2）
$$P(A\mid\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)P(\overline{B}\mid A)}{P(A)P(\overline{B}\mid A)+P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})}=\frac{0.90\times(1-0.90)}{0.90\times(1-0.90)+0.10\times0.90}=0.50$$

即考试不及格的学生中努力学习的学生占到 50%.

6. 某人忘记了电话号码的最后一位数字，因而他随意地拨号，求他拨号不超过 3 次而接通所需电话的概率．若已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

解 设 $A_i=$\{第 i 次未接通所需电话\}（$i=1,2,3$），则依题意有

$$P(A_1)=\frac{9}{10},\quad P(A_2\mid A_1)=\frac{8}{9},\quad P(A_3\mid A_1A_2)=\frac{7}{8}$$

故 $$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}=0.7$$

$$P(\text{3 次中至少 1 次接通})=1-0.7=0.3$$

若已知最后一个数字为奇数，则可能的拨号为 1，3，5，7，9，共 5 种可能，类似可得

$$P(\text{3 次中至少 1 次接通})=1-\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=0.6$$

7. 已知 10 只晶体管中有两只是次品，在其中取两次，每次任取一只，作不放回抽样，试求下列事件的概率：（1）两只都是正品．（2）两只都是次品．（3）一只是正品，一只是次品．（4）第二次取出的是次品．

解 设 $A_i=$\{第 i 次取出的是正品\}（$i=1,2$），则

（1）
$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$$

（2）
$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$$

（3）
$$P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{16}{45}$$

（4）
$$P(\overline{A}_2)=P(S\overline{A}_2)=P((A_1\cup\overline{A}_1)\overline{A}_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{5}$$

8. 设一批产品的一、二、三等品各占 60%，30%，10%，现从中任取一件，结果不是三等品，则取得是一等品的概率是多少？

解 设 $A_i=$\{取出的是 i 等品\}（$i=1,2,3$），$P(A_1)=0.6$，$P(A_2)=0.3$，$P(A_3)=0.1$，$P(\overline{A}_3)=1-0.1=0.9$，$P(A_1\overline{A}_3)=0.6$，故由条件概率公式得

$$P(A_1\mid\overline{A}_3)=\frac{P(A_1\overline{A}_3)}{P(\overline{A}_3)}=\frac{0.6}{0.9}=\frac{2}{3}$$