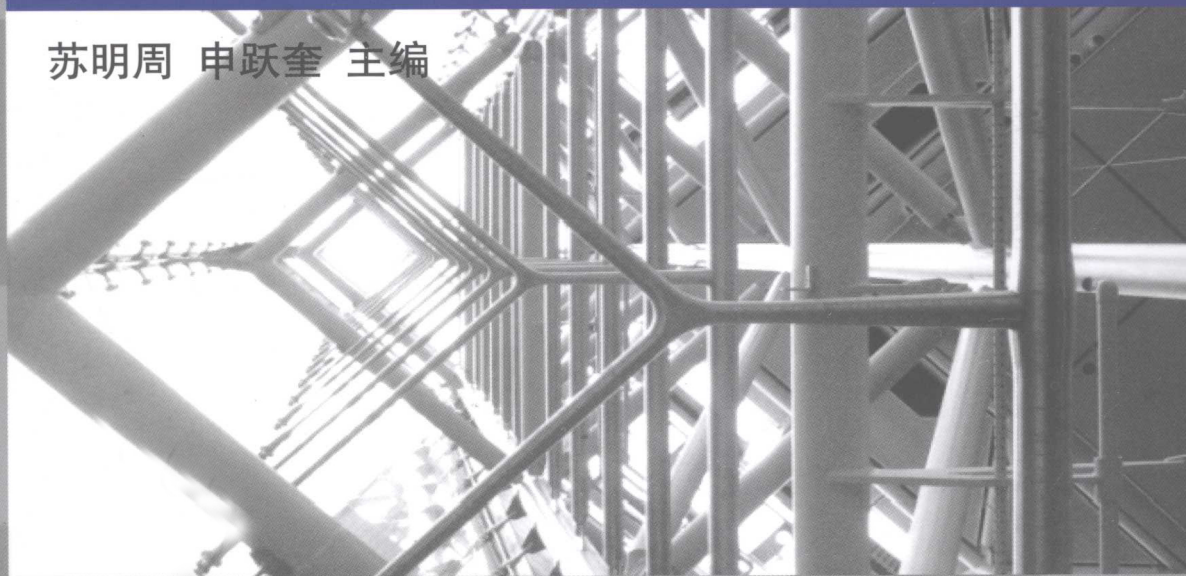




全国高等院校土木工程类系列教材

# 钢结构稳定原理

苏明周 申跃奎 主编



科学出版社

全国高等院校土木工程类系列教材

# 钢结构稳定原理

苏明周 申跃奎 主编

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是高等学校土木工程专业的专业基础课教材,着重介绍钢结构稳定的基本理论,包括轴心受压构件的稳定、压弯构件的稳定、受弯构件的稳定、框架平面内的稳定和板的稳定等。本书侧重于稳定基本概念和基本分析方法的介绍,并配有必要的例题和习题,以期读者能正确理解稳定问题的本质。

本书可作高等院校土木工程专业本科教材,也可供工程力学、水利和桥梁等相关专业本科生、研究生和从事土木工程设计、施工的技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

---

钢结构稳定原理/苏明周,申跃奎主编. —北京:科学出版社,2012  
全国高等院校土木工程类系列教材  
ISBN 978-7-03-033510-4

I. ①钢… II. ①苏… ②申… III. ①钢结构-结构稳定性-高等学校-教材 IV. ①TU391.01

---

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 019496 号

---

责任编辑:童安齐 任加林 / 责任校对:刘玉靖  
责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号  
邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2012年3月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2012年3月第一次印刷 印张:11

字数:241 000

定价:25.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈骏杰〉)

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62137026(BA08)

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229; 010-64034315; 13501151303

## 前 言

稳定问题是钢结构的最重要问题之一,其分为板件的稳定、构件的稳定和结构的整体稳定三个层次。这三个层次的稳定问题相互影响,使稳定问题具有多样性、整体性和相关性的特点,因而非常复杂。随着社会经济的发展,钢结构的工程应用越来越多,结构形式趋于多样化,稳定问题也越来越突出。实际工程中因失稳造成钢结构安全的事故也时有发生,其主要原因归结于设计者和施工人员对稳定问题缺乏足够的认识。为此,本书侧重于对稳定问题基本概念的阐述,辅以一定数量的例题和习题,并与我国钢结构设计规范的规定相结合,力图通过稳定分析使读者清楚各种性质的稳定问题。

本书共分六章:第一章介绍钢结构稳定的基本概念和基本分析方法,以期读者对稳定问题的性质有一个大致的了解;第二至四章和第六章分别介绍轴心受压、压弯构件、受弯构件和板件的稳定问题,主要解决构件的整体稳定问题和板件的局部稳定问题;第五章介绍框架平面内的弯曲失稳问题,结合简单的框架结构形式阐述结构的稳定问题及解决方法。

本书内容的安排注重深入浅出,每一部分都从简单的问题开始,而后逐步深入,从理想情况到有缺陷情况,从弹性情况到弹塑性情况,从而使初学者容易理解和接受。另外,鉴于目前有限元计算软件的发展,很多稳定问题都可以通过有限元分析解决,因此本书没有介绍稳定分析的数值积分法。

参加本书编写的人员有苏明周(第一、六章)、申跃奎(第二章部分内容及第三章)、何远宾(第二章主要内容)、申红侠(第四章及第五章)。全书由顾强教授主审,在此对他深表谢意。

由于编者水平所限,书中不足之处在所难免,希望读者提出宝贵的意见和建议。

# 目 录

## 前言

<b>第一章 概论</b> .....	1
1.1 钢结构的失稳现象 .....	1
1.2 钢结构稳定问题的分类 .....	1
1.2.1 平衡分岔失稳 .....	1
1.2.2 极值点失稳 .....	3
1.2.3 跃越失稳 .....	3
1.3 稳定问题的计算方法 .....	4
1.3.1 平衡法 .....	5
1.3.2 能量法 .....	5
习题.....	9
<b>第二章 轴心受压构件的稳定</b> .....	10
2.1 轴心受压构件的失稳现象 .....	10
2.2 轴心受压构件的弯曲失稳 .....	11
2.2.1 两端铰接理想轴心受压构件的弹性弯曲失稳 .....	11
2.2.2 边界条件的影响 .....	13
2.2.3 构件初弯曲及荷载作用初偏心的影响 .....	16
2.2.4 两端铰接理想轴心受压构件的非弹性弯曲失稳 .....	19
2.2.5 残余应力的影响 .....	25
2.2.6 轴心受压构件弯曲失稳理论在钢结构设计中的应用 .....	26
2.3 开口薄壁构件的弯曲和扭转 .....	33
2.3.1 薄壁构件与扇性坐标 .....	33
2.3.2 扭转的类型 .....	38
2.4 轴心受压构件的扭转失稳 .....	41
2.4.1 轴心受压构件的弹性扭转失稳 .....	41
2.4.2 轴心受压构件的弹塑性扭转失稳 .....	46
2.4.3 轴心受压构件扭转失稳理论在钢结构设计中的应用 .....	47
2.5 轴心受压构件的弯扭失稳 .....	47
2.5.1 轴心受压构件的弹性弯扭失稳 .....	48
2.5.2 轴心受压构件的弹塑性弯扭失稳 .....	53
2.5.3 轴心受压构件弯扭失稳理论在钢结构设计中的应用 .....	53
习题 .....	55

<b>第三章 压弯构件的稳定</b> .....	57
3.1 压弯构件的失稳现象 .....	57
3.2 压弯构件的平面内弯曲失稳 .....	59
3.2.1 横向荷载作用下弹性压弯构件的变形和内力 .....	60
3.2.2 端弯矩作用下弹性压弯构件的变形和内力 .....	64
3.2.3 压弯构件的等效弯矩和等效弯矩系数 .....	66
3.2.4 弹性压弯构件的转角位移方程 .....	67
3.2.5 压弯构件在弯矩作用平面内的极限荷载 .....	69
3.2.6 压弯构件弯曲失稳理论在钢结构设计中的应用 .....	73
3.3 压弯构件在弯矩作用平面外弯扭失稳 .....	76
3.3.1 压弯构件的弹性弯扭失稳 .....	76
3.3.2 压弯构件的非弹性弯扭失稳 .....	83
3.3.3 压弯构件弯扭失稳理论在钢结构设计中的应用 .....	84
习题 .....	87
<b>第四章 受弯构件的稳定</b> .....	89
4.1 受弯构件的失稳现象 .....	89
4.1.1 受弯构件的截面形式 .....	89
4.1.2 受弯构件的失稳现象 .....	89
4.2 受弯构件的弹性弯扭失稳 .....	90
4.2.1 纯弯构件的弹性弯扭失稳 .....	90
4.2.2 不等端弯矩作用受弯构件的弹性弯扭失稳 .....	96
4.2.3 横向荷载作用受弯构件的弹性弯扭失稳 .....	97
4.2.4 受弯构件的等效弯矩系数 .....	101
4.3 受弯构件的非弹性弯扭失稳 .....	103
4.4 受弯构件弯扭失稳理论在钢结构设计中的应用 .....	103
习题 .....	109
<b>第五章 框架平面内的稳定</b> .....	110
5.1 框架平面内的失稳现象 .....	110
5.1.1 无侧移框架 .....	110
5.1.2 有侧移框架 .....	111
5.2 框架的弹性失稳 .....	112
5.2.1 平衡法求解框架的临界荷载 .....	112
5.2.2 位移法求解框架的临界荷载 .....	115
5.2.3 近似法求解多层多跨框架的临界荷载 .....	118
5.2.4 主弯矩对框架稳定的影响 .....	124
5.3 框架的非弹性失稳 .....	127
5.4 框架平面内的弯曲失稳理论在钢结构设计中的应用 .....	128
习题 .....	129

---

<b>第六章 板的稳定</b> .....	130
6.1 板的失稳现象 .....	130
6.2 板的小挠度理论弹性屈曲 .....	131
6.2.1 小挠度理论板的平衡方程 .....	131
6.2.2 平衡法求解单向均匀受压四边简支板的弹性屈曲荷载 .....	134
6.2.3 能量法求解板的弹性屈曲荷载 .....	136
6.2.4 不同条件下板的弹性屈曲荷载 .....	139
6.3 板的大挠度理论弹性屈曲 .....	144
6.3.1 大挠度理论板的平衡方程 .....	144
6.3.2 单向均匀受压简支板的屈曲后强度 .....	147
6.4 板的弹塑性屈曲 .....	150
6.5 板失稳理论在钢结构设计中的应用 .....	151
6.5.1 轴心受压构件的板件局部稳定计算 .....	151
6.5.2 梁的局部稳定和腹板加劲肋计算 .....	153
6.5.3 压弯构件的板件局部稳定计算 .....	158
6.5.4 冷弯薄壁型钢构件中的板件的有效宽度 .....	159
习题 .....	161
<b>答案</b> .....	163
<b>主要参考文献</b> .....	165

# 第一章 概 论

## 1.1 钢结构的失稳现象

钢材具有强度高、材质均匀和力学性能好等优点,使得钢结构广泛地应用于大跨度结构、高层建筑、重型厂房、轻钢结构、高耸结构、桥梁结构、贮仓、容器等建、构筑物中。钢结构构件与广泛采用的钢筋混凝土结构构件相比,在相同受力条件下其截面轮廓尺寸较小,构件较细长,板件较柔薄。构件受压时,可能会出现整体或局部失稳现象。与强度破坏不同,失稳时构件的受力状态可能会发生突然改变而丧失承载能力,甚至导致结构整体倒塌。同时,稳定问题又具有多样性、整体性和相关性而非常复杂。因此,稳定问题是钢结构中的一个非常重要的问题,这也是钢结构区别于其他结构形式的一个主要特点。了解稳定问题的分类,掌握不同失稳类型的特征和计算方法,正确分析实际工程中钢结构的稳定承载能力,对从事钢结构设计和施工的人员来说非常重要。下面列举一些钢结构失稳的典型工程事例,以便读者对钢结构稳定问题有直观的认识。

1907年,加拿大首次建造的跨越 Quebec 河的三跨悬伸桥因压杆失稳而垮塌。该桥的两个边跨长 152.4m,中跨长 548.6m。悬伸的下弦压杆是由 4 个分肢组成,为格构式截面,但由于所设置的角钢缀条过弱,不能保证分肢作为一个整体工作,在钢桥合拢前,分肢屈曲,然后弦杆失稳造成整体垮塌,75 人遇难,9000t 钢材坠入河中。

美国 Connecticut 州 Hartford 市体育馆的屋盖为网架结构,平面尺寸为 91.44m×109.73m,受压弦杆和腹杆均采用 4 个等边角钢组成的十字形截面。设计时只考虑了压杆的弯曲屈曲,没有考虑十字形截面的扭转屈曲,也没有考虑为压杆设置的支撑因偏心连接可能发生弯扭屈曲,导致该体育馆在 1978 年 1 月 18 日的大雨雪之夜因压杆屈曲而垮塌。

辽宁省某重型机械厂 14.4m 跨的屋架采用梭形轻钢屋架,设计者在计算中点设置矩形钢箍支撑的受压腹杆时,未区分绕截面两个主轴弯曲的稳定性,错用了计算长度系数,于 1990 年 2 月因一根受压腹杆在平面外的长细比达到 300 而屈曲,导致屋盖垮塌,造成 42 人死亡和 179 人受伤的特大事故。

## 1.2 钢结构稳定问题的分类

钢结构的失稳类型是多种多样的,但就其性质而言,可以分为三类,即平衡分岔失稳、极值点失稳和跃越失稳。

### 1.2.1 平衡分岔失稳

平衡分岔失稳是指构件或板件在某一荷载点存在相邻的对应于两种不同变形形式的



平衡状态,构件或板件有变形形式的改变,所以称之为平衡分岔失稳,也称第一类稳定问题。理想的轴心受压构件和在中面内受压的平板等都属于平衡分岔失稳。分岔失稳根据失稳后的平衡是否处于稳定状态,可以分为稳定分岔失稳和不稳定分岔失稳两种。

1. 稳定分岔失稳

图 1.1(a)所示承受轴心压力  $N$  的理想轴心受压构件。当  $N$  较小时,构件仅产生轴向压缩变形  $\Delta$ ,当荷载达到屈曲荷载  $N_{cr}$ 后,构件发生屈曲,产生侧向挠度  $v$ 。

按照大挠度理论分析,理想的轴心受压构件失稳后,挠度  $v$  增加时荷载还略有增加,失稳后构件的荷载-挠度曲线是  $AB$  或  $AB'$ ,这时平衡状态是稳定的。不过大挠度理论分析表明,荷载的增加非常小而挠度的增加却非常大,构件因弯曲变形而产生附加弯矩,在压力和弯矩的共同作用下,中央截面边缘纤维首先屈服,随着塑性的发展,构件很快达到承载能力,所以轴心受压构件的屈曲后强度不能被利用。

四边支承的薄板,当中面均匀作用的压力  $N$  达到屈曲荷载  $N_{cr}$ 后发生屈曲,除产生轴向压缩变形  $\Delta$ 外,还产生侧向挠度  $w$ 。屈曲后由于侧边支承的约束作用,在板的中面内产生薄膜力,牵制板的变形,使得屈曲后的荷载还能有大幅度的提高,荷载-挠度曲线如图 1.1(b)中  $OAB$  或  $OAB'$ 所示。屈曲后板的平衡状态也是稳定的,属于稳定分岔失稳。板的屈曲后强度可能远远超过其屈曲荷载,因此国内外钢结构规范对薄板屈曲后强度的利用均有所规定。

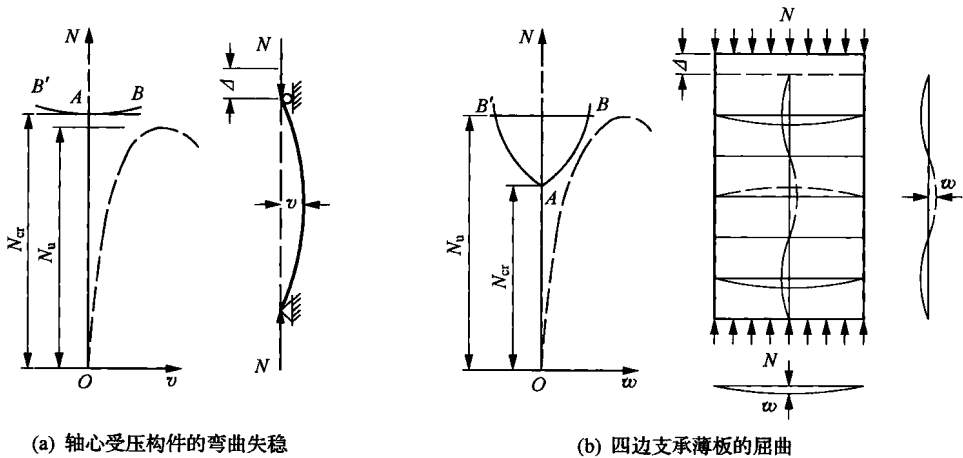


图 1.1 稳定分岔失稳

需要说明的是,初弯曲和荷载作用点的初偏心等几何缺陷会降低构件和板件的承载力,荷载-挠度曲线如图 1.1 中虚线所示,呈现极值点失稳特征,极值点所对应的荷载  $N_u$  即为其承载力。但对于稳定分岔失稳类型,缺陷对承载力的影响较小,属于缺陷不敏感型。对于薄板,其承载力仍有可能高于屈曲荷载。

## 2. 不稳定分岔失稳

不稳定分岔失稳是指结构或构件屈曲后只能在远低于屈曲荷载的条件下才能维持平衡状态。如均匀受压的圆柱壳,其荷载-变形曲线如图 1.2 中  $OAB$  或  $OAB'$  所示,属于不稳定的分岔失稳类型。微小的缺陷使得圆柱壳在达到平衡分岔屈曲荷载之前,有可能由屈曲前的稳定平衡状态跳跃到非邻近的平衡状态,如图中  $OA'CB$  曲线,而不经理想的分岔点  $A$ 。因此,这种屈曲形式也叫有限干扰屈曲。缺陷对这类结构的影响非常大,属于缺陷敏感型,其实际的极限荷载  $N_0$  远小于理论上的屈曲荷载  $N_{cr}$ ,荷载-变形曲线如图 1.2 中虚线所示。研究这类稳定问题的目的在于寻求远小于屈曲荷载的安全可靠的极限荷载。

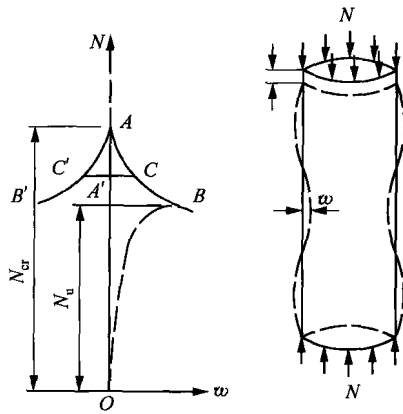


图 1.2 圆柱壳的失稳-不稳定分岔失稳现象

### 1.2.2 极值点失稳

图 1.3 给出偏心受压构件在压力作用下产生弯曲变形的荷载-挠度曲线。在曲线的上升段  $OAB$ ,构件的挠度随荷载的增加而增加,处于稳定平衡状态, $A$  点表示构件中央截面边缘纤维开始屈服,此后随着荷载的增加该截面的塑性区向内扩展,弯曲变形加快,曲线在达到最高点  $B$  后出现下降段  $BC$ ,表明要维持构件的平衡就必须减小构件端部的压力,构件处于不稳定平衡状态。这说明曲线的极值点  $B$  为该压弯构件在弯矩作用平面内的承载能力极限状态,对应的荷载  $N_u$  为构件的极限荷载。由图 1.3 可知,构件的荷载-挠度曲线只有极值点,弯曲变形形式没有改变,没有出现理想轴心受压构件在同一点存在两种不同变形状态的分岔点,故这种失稳形式被称为极值点失稳,也称为第二类稳定问题。

### 1.2.3 跃越失稳

如图 1.4(a)所示的两端铰接的较平坦的拱结构,在径向均布荷载  $q$  较小时,拱中的轴力为压力。当  $q$  增加到临界值  $q_{cr}$  时,拱突然向下跳跃,变成向下拱曲,此时拱中的轴力变成拉力。以拱的初始状态为  $O$  点,其荷载-挠度曲线如图 1.4(b)所示。该曲线有稳定的上升段  $OA$ ,达到曲线的最高点  $A$  时突然跳跃到一个非邻近的变形状态  $C$  点,下降段

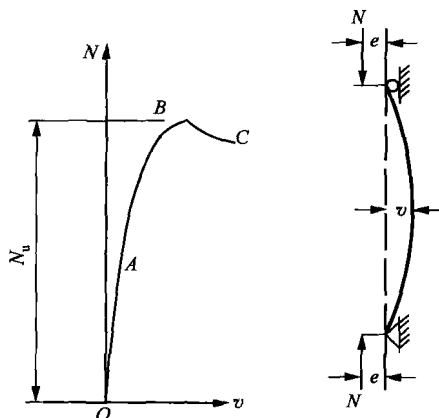
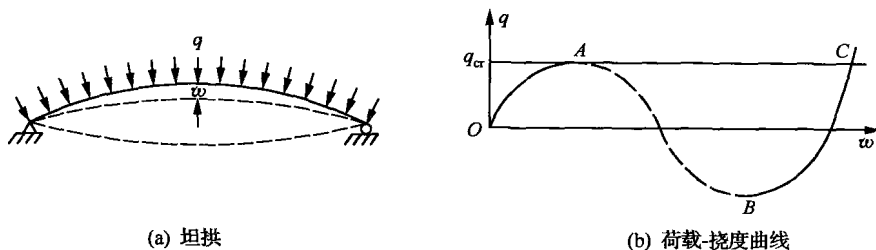


图 1.3 偏心受压构件的极值点失稳现象

AB 是不稳定的,后面的 BC 段虽然是上升的,但此时结构已经破坏,故不能利用。曲线的最高点 A 对应的荷载即为临界荷载  $q_{cr}$ 。由于在失稳时有一个突然跳跃的现象,故被称为跃越失稳。它既无平衡分岔点,又无极值点。扁壳结构和扁平的网壳结构会发生跃越失稳现象,坡度较缓的门式刚架结构在特定条件下也会出现跃越失稳现象。



(a) 坦拱

(b) 荷载-挠度曲线

图 1.4 坦拱的跃越失稳

### 1.3 稳定问题的计算方法

稳定问题分析都是针对在外力作用下结构存在变形的条件进行的,且此变形必须与结构或构件失稳时的变形相对应,同时还要计入轴力的附加作用,使得所研究的荷载与结构变形呈非线性关系,故稳定分析属于几何非线性问题,应采用二阶分析方法。稳定计算涉及构件或结构的一系列初始条件,如结构体系、构件的几何长度、连接条件、截面的组成、形状、尺寸和残余应力分布,以及钢材性能和外荷载作用等,所给出的结果,无论是屈曲荷载还是极限荷载都标志着所计算结构或构件达到了稳定承载力。

稳定问题的计算方法有三种,即平衡法、能量法和动力法。由于动力法属于结构动力学范畴,这里不作介绍。

### 1.3.1 平衡法

中性平衡法或静力平衡法,简称平衡法,是求解结构屈曲荷载的最基本方法。对于有平衡分岔点的弹性稳定问题,在分岔点存在两个极为邻近的平衡状态,一个是原结构的平衡状态,另一个是已经有了微小变形的结构平衡状态。平衡法是根据已产生了微小变形后结构的受力条件建立平衡方程后求解的。若得到的符合平衡方程的解有不止一个,结构的分岔屈曲荷载取其中的最小值。平衡法只能求解屈曲荷载,不能判断结构平衡状态的稳定性。在很多情况下,采用平衡法可以获得精确解。

**例 1.1** 用平衡法求解图 1.5(a)中下端有弹簧铰的单自由度悬臂刚压杆的屈曲荷载。已知弹簧的转动刚度为  $r$ ,杆件长度为  $l$ 。

**解** 当杆有微小转角  $\theta$  时[图 1.5(b)],荷载  $N$  对下端  $A$  产生的弯矩为  $N\Delta = Nl\sin\theta$ 。当  $\theta$  很小时,  $\sin\theta \approx \theta$ 。弹簧铰产生的抵抗力矩为  $M_0 = r\theta$ 。由力矩平衡得

$$Nl\sin\theta - r\theta = (Nl - r)\theta = 0$$

当  $\theta=0$  时,表示杆仍处于铅直状态,未发生倾斜,与题意不符,是一个平凡解,因此  $\theta \neq 0$ ,故  $Nl - r = 0$ ,得到杆的分岔屈曲荷载为  $N_{cr} = r/l$ 。

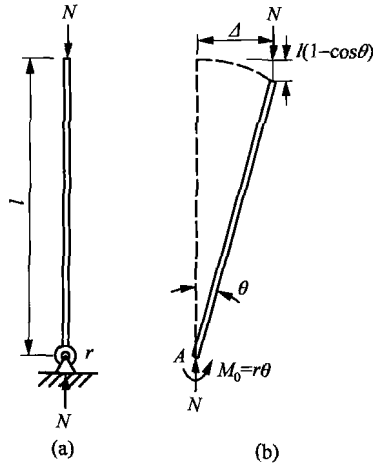


图 1.5 弹簧铰悬臂刚压杆

### 1.3.2 能量法

如果结构承受保守力系,可以根据有变形结构的受力条件建立结构的总势能。总势能是结构的应变能和外力势能之和。如果结构处在平衡状态,那么总势能必有驻值。根据势能驻值原理,由总势能对于位移的一阶变分为零,可得到平衡方程,再由平衡方程求解分岔屈曲荷载。按照小变形理论,能量法一般只能获得屈曲荷载的近似解;采用大挠度理论分析时,能量法可以判断屈曲后的平衡状态是否稳定。对于处于平衡状态的结构,当有微小干扰时其势能有变化,在平衡位置势能对位移的一阶变分是零。如果它的势能具有最小值,二阶变分是正值,平衡状态是稳定的。稳定平衡时总势能最小的原理称为最小

势能原理。如果它的势能具有最大值,它的二阶变分是负值,平衡状态是不稳定的。因此,用势能驻值原理可以求解屈曲荷载,而用势能最小原理可以判断屈曲后平衡状态的稳定性。能量法作为稳定计算的近似分析方法,分为解析法和数值法两大类。解析法包括能量守恒原理、势能驻值原理和最小势能原理、瑞利-里兹法和迦辽金法等。数值法包括有限差分法、有限积分法和有限单元法等。这里仅介绍解析法。

### 1. 能量守恒原理

对于承受保守力系的弹性结构,当结构偏离原来的平衡位置而有微小变形时,如果应变能增量  $\Delta U$  大于外力功增量  $\Delta W$ ,说明结构有恢复原平衡位置的能力,即结构处于稳定的平衡状态,如果  $\Delta U$  小于  $\Delta W$ ,则结构处于不稳定的平衡状态。中间状态为

$$\Delta U = \Delta W \quad (1.1)$$

式(1.1)即为能量守恒原理的表达式,表示贮存在结构中的应变能等于外力所做的功,此时结构处于平衡状态。Timoshenko 首先采用此方法求解弹性稳定问题,因此又被称为 Timoshenko 能量法。

**例 1.2** 用能量守恒原理求解图 1.5(a)中下端有弹簧铰的单自由度悬臂刚压杆的屈曲荷载。

**解** 刚压杆的应变能增量为

$$\Delta U = \frac{r\theta^2}{2} \quad (1)$$

外力功为

$$\Delta W = Nl(1 - \cos\theta) \quad (2)$$

当变形微小时,  $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2) \approx \theta^2/2$ , 故

$$\Delta W = \frac{Nl\theta^2}{2}$$

代入式(1.1)得

$$N_{cr} = \frac{r}{l} \quad (3)$$

与例 1.1 的结果一致,这是因为求总势能时结构的变形为其真实变形。

### 2. 势能驻值原理和最小势能原理

#### 1) 势能驻值原理

势能驻值原理为:外力作用的结构体系有微小变形时总势能不变,即总势能有驻值时,结构处于平衡状态,其表达式为

$$\delta\Pi = \delta(U + V) = 0 \quad (1.2)$$

式中:  $\Pi$ ——结构的总势能;

$\delta\Pi$ ——总势能的一阶变分;

$U$ ——结构的应变能;

$V$ ——外力势能,  $V = -W$ ,  $W$  为外力做的功。

## 2) 最小势能原理

当外力作用的处于平衡状态的结构体系有微小变形时,如果总势能的二阶变分  $\delta^2\Pi > 0$ , 则结构的总势能最小,结构处于稳定平衡状态。若  $\delta^2\Pi < 0$ , 则结构的总势能最大,处于不稳定的平衡状态。

设  $\Pi(x)$  为结构的总势能,当有微小变形时,其总势能为  $\Pi(x+\delta x)$ ,利用泰勒级数有

$$\Pi(x+\delta x) = \Pi(x) + \frac{d\Pi(x)}{dx}\delta x + \frac{1}{2!} \frac{d^2\Pi(x)}{dx^2}(\delta x)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3\Pi(x)}{dx^3}(\delta x)^3 + \dots \quad (1.3)$$

结构处于平衡状态,故  $\frac{d\Pi(x)}{dx} = 0$ 。总势能的增量为

$$\Delta\Pi = \Pi(x+\delta x) - \Pi(x) = \frac{1}{2!} \frac{d^2\Pi(x)}{dx^2}(\delta x)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3\Pi(x)}{dx^3}(\delta x)^3 + \dots \quad (1.4)$$

当  $\Delta\Pi > 0$  时,总势能有最小值,平衡是稳定的;当  $\Delta\Pi < 0$  时,总势能有最大值,平衡是不稳定的。由于式(1.4)右端前一项的绝对值总大于后一项的绝对值,因此,当  $\frac{d^2\Pi(x)}{dx^2} > 0$  时,平衡是稳定的;当  $\frac{d^2\Pi(x)}{dx^2} < 0$  时,平衡是不稳定的。当  $\frac{d^2\Pi(x)}{dx^2} = 0$  时,也可以得到构件的屈曲荷载。此时,由于  $(\delta x)^3$  可能为正,也可能为负,因此,必须有  $\frac{d^3\Pi(x)}{dx^3} = 0$ , 此时需要根据  $\frac{d^4\Pi(x)}{dx^4}$  的符号来判断。如果  $\frac{d^4\Pi(x)}{dx^4} = 0$ , 则看  $\frac{d^6\Pi(x)}{dx^6}$  的符号,依此类推。

**例 1.3** 用势能驻值原理求解图 1.5(a)中下端有弹簧铰的单自由度悬臂刚压杆的屈曲荷载,并用最小势能原理判断平衡状态的稳定性。

**解** 刚压杆的总势能为

$$\Pi = U + V = U - W = \frac{r\theta^2}{2} - Nl(1 - \cos\theta) \quad (1)$$

由势能驻值原理  $\frac{d\Pi}{d\theta} = 0$  得

$$r\theta - Nl\sin\theta = 0 \quad (2)$$

小变形时  $\sin\theta \approx \theta$ , 得到分岔屈曲荷载  $N_{cr} = r/l$ 。

总势能的二阶变分为

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = r - Nl\cos\theta = r\left(1 - \frac{\theta}{\tan\theta}\right) \quad (3)$$

当  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  时,  $\frac{\theta}{\tan\theta} \leq 1$ 。由式(3)可知,当  $\theta \neq 0$  时,  $1 - \frac{\theta}{\tan\theta} > 0$ , 故  $\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} > 0$ , 说明平衡状态是稳定的。当  $\theta = 0$  时,  $1 - \frac{\theta}{\tan\theta} = 0$ ,  $\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = 0$ ,  $\frac{d^3\Pi}{d\theta^3} = Nl\sin\theta = 0$ , 而  $\frac{d^4\Pi}{d\theta^4} = Nl\cos\theta = Nl > 0$ , 说明此杆在  $\theta = 0$  时的平衡状态也是稳定的。杆的荷载-挠度曲线如图 1.6 所示。

## 3. 瑞利-里兹法

瑞利-里兹法利用势能驻值原理,直接利用总势能的变分式(1.2)求解。由于在一般

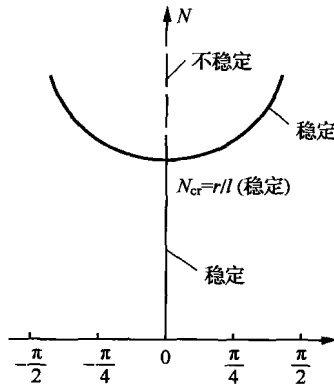


图 1.6 弹簧铰悬臂刚压杆的荷载-挠度曲线

情况下无法知道结构的真实变形曲线,求解时需要假定位移函数,此位移函数需要满足结构的几何边界条件。如结构在一个平面内的弯曲屈曲问题,可以假定位移函数为

$$y = \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(x) \tag{1.5}$$

式中:  $A_i$ ——第  $i$  个待定的独立参数,  $i=1, 2, \dots, n$ ;  
 $\varphi_i(x)$ ——独立坐标函数。

将式(1.5)代入式(1.2),就可以得到  $n$  个独立参数的线性方程组。如果是分岔屈曲问题,则为线性齐次方程组。有非零解的条件是其系数行列式的值为零,就可以得到结构的屈曲荷载。如果方程组含有常数项,则可以求得荷载和变形的关系曲线。

#### 4. 迦辽金法

迦辽金法不需要给出结构的总势能,而是利用势能驻值条件得到的平衡方程求解。因此,假定的位移函数不仅要满足几何边界条件,还要满足力学边界条件。如平衡方程为

$$L(y) = 0 \tag{1.6}$$

则势能驻值条件为

$$\delta \Pi = \int_{x_1}^{x_2} L(y) \delta y dx = 0 \tag{1.7}$$

假定位移函数为  $y = \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(x)$ , 求一阶变分,有

$$\begin{aligned} \delta y &= \frac{\partial y}{\partial A_1} \delta A_1 + \frac{\partial y}{\partial A_2} \delta A_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial A_n} \delta A_n \\ &= \varphi_1(x) \delta A_1 + \varphi_2(x) \delta A_2 + \dots + \varphi_n(x) \delta A_n \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \delta A_i \end{aligned} \tag{1.8}$$

将式(1.8)代入式(1.7),由于式(1.8)中的  $\delta A_1, \delta A_2, \dots, \delta A_n$  均为不等于零的任意微量,则有

$$\begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} L(y)\varphi_1(x)dx = 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} L(y)\varphi_2(x)dx = 0 \\ \vdots \\ \int_{x_1}^{x_2} L(y)\varphi_n(x)dx = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

即得到迦辽金方程组。经积分后,可得到关于  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的联立线性方程组。如果此方程组为齐次的,则可求得结构的屈曲荷载;如果方程组为非齐次的,则可得到荷载和变形之间的关系曲线。

### 习 题

1.1 用平衡法求图 1.7 中下端铰接、上端有弹簧支承的单自由度刚压杆的屈曲荷载。杆的长度为  $l$ , 弹簧常数为  $k$ , 顶端作用有铅垂力  $N$ 。

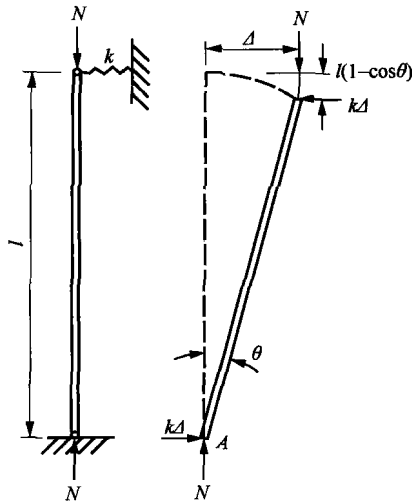


图 1.7 弹簧支承刚压杆

1.2 用势能驻值原理求解题 1.1 的屈曲荷载,并用最小势能原理判断杆平衡状态的稳定性,并画出荷载-侧移曲线。



## 第二章 轴心受压构件的稳定

### 2.1 轴心受压构件的失稳现象

本章介绍轴心受压构件的整体稳定性问题。所谓轴心受压构件是指只受轴向压力作用且压力通过截面形心的直杆。

如果用手沿着长度方向压一个细长而挺直的竹棍,那么在压力的作用下开始时竹棍呈直线状态;当施加的压力达到某个值时,细竹棍会突然产生弯曲,不能继续承担更大的荷载;如果此时松开手,细竹棍又会恢复到原来挺直的状态,且截面没有任何程度的破坏。这就是轴心受压构件在弹性阶段丧失整体稳定的一种表现,也称失稳现象。

钢材的强度高,由钢材制作而成的受压构件都比较细长,所以容易因失稳而导致构件丧失承载力。钢结构轴心受压构件的失稳现象是多种多样的。上面介绍的失稳时构件发生弯曲是最常见的构件失稳形式之一,称为弯曲失稳[图 2.1(a)]。此外构件还可能发生扭转失稳和弯扭失稳。对某些抗扭刚度较差的轴心受压构件(如十字形截面),当轴心压力  $N$  达到临界值时,直线稳定平衡状态不再保持而发生微扭转;若  $N$  再稍微增加,则扭转变形迅速增大,使构件丧失承载能力,即构件发生扭转失稳,也叫扭转屈曲[图 2.1(b)]。截面为单轴对称(如 T 形截面)的轴心受压构件绕对称轴失稳时,构件在发生弯曲变形的同时还伴随有扭转变形,故称为弯扭失稳或弯扭屈曲[图 2.1(c)]。截面没有对称轴的轴心受压构件,其屈曲形态均为弯扭屈曲。

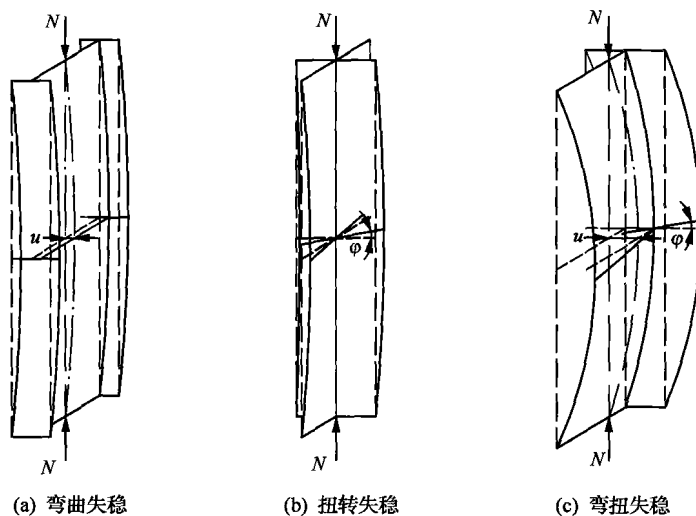


图 2.1 轴心受压构件的失稳形式