

权威 实用 经典



# 2013 考研历届 数学真题题型解析 (数学一)

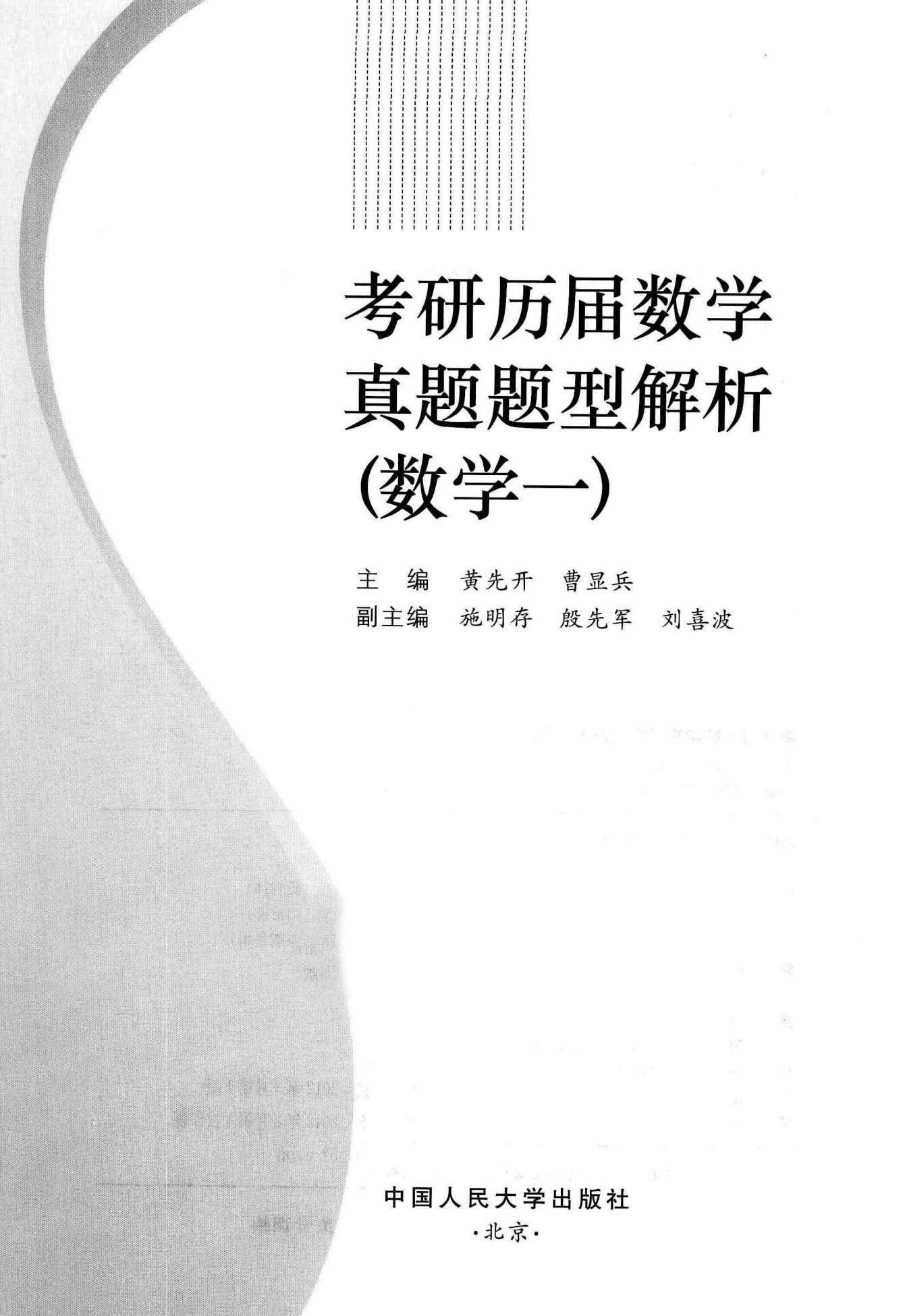
主编 / 黄先开 曹显兵

✓ 囊括16年全部真题 ✓ 名师归纳总结116题型

- ★ 全书按大纲考试要求设置结构，每章下归纳题型分类解析1997—2012年真题
- ★ 题题精解，有分析，有评注，多种解法、多种思路
- ★ 章章总结，将历年试题题型、分值分布情况分别列表，考试重点清晰可见
- ★ 每章后附自测练习题，全部来自其余两类的历年真题，互相借鉴，触类旁通
- ★ 16年试卷附录在后，供考生自测之用，其解析在正文的位置全部标明

中国人民大学出版社





# 考研历届数学 真题题型解析 (数学一)

主 编 黄先开 曹显兵

副主编 施明存 殷先军 刘喜波

中国人民大学出版社  
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

考研历届数学真题题型解析·数学一/黄先开,曹显兵主编.—北京:中国人民大学出版社,2012.3  
ISBN 978-7-300-15341-4

I. ①考… II. ①黄… ②曹… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第029603号

考研历届数学真题题型解析(数学一)

主 编 黄先开 曹显兵

Kaoyan Lijie Shuxue Zhenti Tixing Jiexi (Shuxue Yi)

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街31号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242(总编室)

010-62511398(质管部)

010-82501766(邮购部)

010-62514148(门市部)

010-62515195(发行公司)

010-62515275(盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.lkao.com.cn>(中国1考网)

经 销 新华书店

印 刷 北京市鑫霸印务有限公司

规 格 185 mm×260 mm 16开本

版 次 2012年3月第1版

印 张 28.25

印 次 2012年3月第1次印刷

字 数 669 000

定 价 52.00元

# 前言

自从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统一考试以来，至今已 25 年，共命制试卷近百份，有上千道试题。这些试题是参加命题的专家、教授的智慧 and 劳动的结晶，它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，展示出统考以来数学考试的全貌，又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》要求下的命题指导思想、原则、特点和趋势，是广大考生和教师了解试题信息、分析命题动态、总结命题规律最直接、最宝贵的第一手资料。

拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的数学历年真题，是广大准备考研学子的期盼。通过认真分析研究、了解、消化和掌握历年试题，可以发现命题的特点和趋势，找出知识之间的有机联系，总结每部分内容的考查重点、难点，归纳常考典型题型，凝练解题思路、方法和技巧，明确复习方向，从而真正做到有的放矢、事半功倍地进行复习。本书是作者在十多年收集、整理资料和进行考研数学辅导的基础上，通过对历年试题的精心分析研究，并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的，相信能够满足考生的要求。

本书具有以下特点：

**1. 内容最全面。**汇集了 1997 年以来 16 年的所有试题，便于考生全面系统地把握历年试题的动态变化。在每章后面还将其余类型试卷的相关典型真题作为习题提供，以便考生进一步巩固相关知识，考生有了本书后，也就相当于拥有了其余两类试卷的资料。

**2. 题型最丰富。**根据考试大纲的要求，每一章节均按题型进行归类，并对每一题型进行了分析、归纳和总结。这样考生可通过题型研究，把握命题特点和命题思路，做到举一反三，触类旁通。

**3. 解析最详尽。**先分析——解题的思路、方法，然后详解——详细、规范的解答过程，再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结，所涉及的知识点、命题意图和可能延伸的考查情形。对命题思路、解题的重点难点进行这样深入细致的解析，相信有助于考生把握解题规律、拓展分析思路、提炼答题技巧，从而大大提高应试水平。

**4. 对照最直接。**本书在每部分的开头，先列出了考试大纲规定的内容与要求，与此相对照再进行题型归类和分析总结，顺序与考试大纲和一般教材一

致，便于考生对照复习。

**5. 总结最完整。**除每类题型均有归纳总结外，每章还有历年考研试题按题型分布和分数的总结，这样可以帮助考生了解每类题型考查的频率、所占的比重，从而发现命题的重点、最常考的题型，以便更有针对性地进行复习。

本书既根据考试内容按章节编排，又提供成套试卷。复习前期建议考生按章节内容与教材、经典讲义同步进行，后期可将本书作为模拟训练套题使用。尽管本书每题均有详尽的解析，但希望读者不要轻易去查看分析、详解和评注，而一定要自己先动手去进行演练。在每题做完之后，再去看书中的分析、详解和评注，仔细回顾、研究一下自己的分析、思路和解答过程与书中有什么异同；如果存在问题，应尽量查清原因，看看自己是在基本理论、基本概念与基本方法等方面有欠缺，还是在做题技巧、知识的综合与灵活运用等方面掌握不够。**注意，这样的归纳总结过程是必不可少的，其重要性甚至超过做题本身。**整本书都这样复习下来，在掌握基本理论、基本概念和基本方法上，在综合、灵活运用知识和思维能力的训练上，相信读者一定会有质的提高。

本书一方面保留了我们过去编写的历年试题解析图书的优点，同时在这次编写完善过程中，参考了众多相关的教材和复习指导书，在此不一一提及，谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。

由于时间比较仓促，加上编者水平所限，书中难免还有不足之处，恳请广大读者批评指正。

成功来源于自信，只要广大考生充满信心，通过脚踏实地的艰苦努力，就一定能够心想事成。

编者

2012年2月于北京

# 目 录

## 第一部分 高等数学

|                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| 第一章 函数、极限、连续 .....                | 3  |
| 题型 1.1 函数的概念及其特性 .....            | 3  |
| 题型 1.2 极限的概念与性质 .....             | 5  |
| 题型 1.3 函数极限的计算 .....              | 6  |
| 题型 1.4 函数极限的逆问题 .....             | 10 |
| 题型 1.5 数列的极限 .....                | 12 |
| 题型 1.6 无穷小量的比较 .....              | 14 |
| 本章总结 .....                        | 16 |
| 自测练习题 .....                       | 17 |
| 自测练习题答案或提示 .....                  | 21 |
| 第二章 一元函数微分学 .....                 | 22 |
| 题型 2.1 导数的定义 .....                | 22 |
| 题型 2.2 利用导数求曲线的切线、法线方程 .....      | 25 |
| 题型 2.3 一般导函数的计算 .....             | 26 |
| 题型 2.4 可导、连续与极限的关系 .....          | 28 |
| 题型 2.5 微分的概念与计算 .....             | 29 |
| 题型 2.6 利用导数确定单调区间与极值 .....        | 29 |
| 题型 2.7 求函数曲线的凹凸区间与拐点 .....        | 32 |
| 题型 2.8 求函数曲线的渐近线 .....            | 33 |
| 题型 2.9 确定函数方程 $f(x) = 0$ 的根 ..... | 34 |
| 题型 2.10 微分中值定理的综合应用 .....         | 35 |
| 题型 2.11 利用导数证明不等式 .....           | 38 |
| 题型 2.12 曲率与弧长的计算 .....            | 42 |
| 本章总结 .....                        | 43 |
| 自测练习题 .....                       | 43 |
| 自测练习题答案或提示 .....                  | 48 |
| 第三章 一元函数积分学 .....                 | 50 |
| 题型 3.1 原函数与不定积分的概念 .....          | 50 |
| 题型 3.2 定积分的基本概念与性质 .....          | 51 |

|            |                          |            |
|------------|--------------------------|------------|
| 题型 3.3     | 不定积分的计算 .....            | 53         |
| 题型 3.4     | 定积分的计算 .....             | 54         |
| 题型 3.5     | 变限积分 .....               | 56         |
| 题型 3.6     | 定积分的证明题 .....            | 59         |
| 题型 3.7     | 反常积分 .....               | 64         |
| 题型 3.8     | 应用题 .....                | 66         |
| 本章总结       | .....                    | 72         |
| 自测练习题      | .....                    | 73         |
| 自测练习题答案或提示 | .....                    | 77         |
| <b>第四章</b> | <b>向量代数与空间解析几何 .....</b> | <b>80</b>  |
| 题型 4.1     | 求点到直线和点到平面的距离 .....      | 80         |
| 题型 4.2     | 建立旋转曲面的方程 .....          | 81         |
| 本章总结       | .....                    | 84         |
| <b>第五章</b> | <b>多元函数微分学 .....</b>     | <b>85</b>  |
| 题型 5.1     | 基本概念题 .....              | 85         |
| 题型 5.2     | 求多元复合函数的偏导数和全微分 .....    | 88         |
| 题型 5.3     | 求隐函数的偏导数和全微分 .....       | 91         |
| 题型 5.4     | 利用变量代换将方程变形 .....        | 93         |
| 题型 5.5     | 求函数的方向导数和梯度 .....        | 95         |
| 题型 5.6     | 多元函数微分学的几何应用 .....       | 96         |
| 题型 5.7     | 求多元函数的极值与最值 .....        | 98         |
| 本章总结       | .....                    | 105        |
| 自测练习题      | .....                    | 105        |
| 自测练习题答案或提示 | .....                    | 108        |
| <b>第六章</b> | <b>重积分 .....</b>         | <b>110</b> |
| 题型 6.1     | 二重积分的定义 .....            | 110        |
| 题型 6.2     | 交换积分顺序 .....             | 111        |
| 题型 6.3     | 利用区域的对称性和函数的奇偶性求积分 ..... | 113        |
| 题型 6.4     | 分块积分 .....               | 114        |
| 题型 6.5     | 选择适当坐标系计算重积分 .....       | 116        |
| 题型 6.6     | 重积分的应用 .....             | 119        |
| 本章总结       | .....                    | 122        |
| 自测练习题      | .....                    | 122        |
| 自测练习题答案或提示 | .....                    | 124        |
| <b>第七章</b> | <b>曲线、曲面积分 .....</b>     | <b>126</b> |
| 题型 7.1     | 计算第一类曲线积分 .....          | 126        |

|                  |                          |            |
|------------------|--------------------------|------------|
| 题型 7.2           | 计算第二类平面曲线积分 .....        | 128        |
| 题型 7.3           | 有关曲线积分与路径无关的问题 .....     | 134        |
| 题型 7.4           | 计算第二类空间曲线积分 .....        | 140        |
| 题型 7.5           | 计算第一类曲面积分 .....          | 143        |
| 题型 7.6           | 计算第二类曲面积分 .....          | 146        |
| 题型 7.7           | 计算向量场的散度及旋度 .....        | 152        |
| 本章总结             | .....                    | 153        |
| <b>第八章 无穷级数</b>  | .....                    | <b>155</b> |
| 题型 8.1           | 判定数项级数的敛散性 .....         | 156        |
| 题型 8.2           | 证明数项级数的敛散性 .....         | 160        |
| 题型 8.3           | 求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域 ..... | 163        |
| 题型 8.4           | 求幂级数的和函数 .....           | 166        |
| 题型 8.5           | 求数项级数的和 .....            | 170        |
| 题型 8.6           | 求函数的幂级数展开式 .....         | 171        |
| 题型 8.7           | 傅里叶级数 .....              | 174        |
| 本章总结             | .....                    | 176        |
| 自测练习题            | .....                    | 177        |
| 自测练习题答案或提示       | .....                    | 179        |
| <b>第九章 常微分方程</b> | .....                    | <b>181</b> |
| 题型 9.1           | 一阶微分方程 .....             | 181        |
| 题型 9.2           | 可降阶方程 .....              | 184        |
| 题型 9.3           | 高阶常系数线性微分方程 .....        | 186        |
| 题型 9.4           | 微分方程的应用 .....            | 189        |
| 题型 9.5           | 欧拉方程 .....               | 193        |
| 本章总结             | .....                    | 194        |
| 自测练习题            | .....                    | 195        |
| 自测练习题答案或提示       | .....                    | 199        |
| <b>第二部分 线性代数</b> |                          |            |
| <b>第一章 行列式</b>   | .....                    | <b>205</b> |
| 题型 1.1           | 利用行列式和矩阵的运算性质计算行列式 ..... | 205        |
| 题型 1.2           | 利用秩、特征值和相似矩阵等计算行列式 ..... | 207        |
| 本章总结             | .....                    | 208        |
| 自测练习题            | .....                    | 208        |
| 自测练习题答案或提示       | .....                    | 210        |

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| <b>第二章 矩阵</b>                | 211 |
| 题型 2.1 有关逆矩阵的计算与证明           | 211 |
| 题型 2.2 与初等变换有关的命题            | 213 |
| 题型 2.3 与伴随矩阵 $A^*$ 有关的命题     | 215 |
| 题型 2.4 矩阵秩的计算与证明             | 217 |
| 本章总结                         | 219 |
| 自测练习题                        | 220 |
| 自测练习题答案或提示                   | 225 |
| <b>第三章 向量</b>                | 227 |
| 题型 3.1 向量的线性组合与线性表示          | 227 |
| 题型 3.2 向量组的线性相关性             | 228 |
| 题型 3.3 有关向量空间的命题             | 234 |
| 本章总结                         | 236 |
| 自测练习题                        | 236 |
| 自测练习题答案或提示                   | 240 |
| <b>第四章 线性方程组</b>             | 242 |
| 题型 4.1 解的判定、性质和结构            | 242 |
| 题型 4.2 求齐次线性方程组的基础解系、通解      | 243 |
| 题型 4.3 求非齐次线性方程组的通解          | 245 |
| 题型 4.4 抽象方程组的求解问题            | 253 |
| 题型 4.5 有关基础解系的命题             | 255 |
| 题型 4.6 讨论两个方程组解之间的关系(公共解、同解) | 256 |
| 题型 4.7 与 $AB = 0$ 有关的命题      | 258 |
| 题型 4.8 线性方程组的综合应用            | 259 |
| 本章总结                         | 262 |
| 自测练习题                        | 262 |
| 自测练习题答案或提示                   | 267 |
| <b>第五章 特征值与特征向量</b>          | 269 |
| 题型 5.1 求数字矩阵的特征值和特征向量        | 269 |
| 题型 5.2 求抽象矩阵的特征值             | 272 |
| 题型 5.3 特征值、特征向量的逆问题          | 273 |
| 题型 5.4 相似矩阵的判定及其逆问题          | 275 |
| 题型 5.5 可对角化的判定及其逆问题          | 278 |
| 题型 5.6 实对称矩阵的性质              | 279 |
| 题型 5.7 特征值、特征向量的应用           | 284 |

|                                       |            |
|---------------------------------------|------------|
| 本章总结 .....                            | 286        |
| 自测练习题 .....                           | 286        |
| 自测练习题答案或提示 .....                      | 289        |
| <b>第六章 二次型</b> .....                  | <b>292</b> |
| 题型 6.1 二次型的矩阵、秩和正负惯性指数 .....          | 292        |
| 题型 6.2 化二次型为标准形 .....                 | 293        |
| 题型 6.3 化二次型为标准形的逆问题 .....             | 295        |
| 题型 6.4 合同变换与合同矩阵 .....                | 299        |
| 题型 6.5 正定二次型与正定矩阵 .....               | 300        |
| 本章总结 .....                            | 301        |
| 自测练习题 .....                           | 302        |
| 自测练习题答案或提示 .....                      | 303        |
| <br><b>第三部分 概率论与数理统计</b>              |            |
| <b>第一章 随机事件与概率</b> .....              | <b>307</b> |
| 题型 1.1 古典概型与几何概型 .....                | 307        |
| 题型 1.2 乘法公式、条件概率公式 .....              | 309        |
| 题型 1.3 全概率公式、贝叶斯公式 .....              | 309        |
| 题型 1.4 事件的独立性 .....                   | 310        |
| 题型 1.5 贝努利概型 .....                    | 313        |
| 本章总结 .....                            | 313        |
| 自测练习题 .....                           | 314        |
| 自测练习题答案或提示 .....                      | 316        |
| <b>第二章 随机变量及其分布</b> .....             | <b>318</b> |
| 题型 2.1 分布函数的概念及其性质 .....              | 318        |
| 题型 2.2 求随机变量的分布律, 分布函数 .....          | 321        |
| 题型 2.3 利用常见分布计算概率 .....               | 322        |
| 题型 2.4 常见分布的逆问题 .....                 | 323        |
| 题型 2.5 随机变量函数的分布 .....                | 325        |
| 本章总结 .....                            | 326        |
| 自测练习题 .....                           | 327        |
| 自测练习题答案或提示 .....                      | 330        |
| <b>第三章 多维随机变量及其分布</b> .....           | <b>332</b> |
| 题型 3.1 二维离散型随机变量的联合分布、边缘分布、条件分布 ..... | 332        |

|            |                               |            |
|------------|-------------------------------|------------|
| 题型 3.2     | 二维连续随机变量的联合分布、边缘分布、条件分布 ..... | 336        |
| 题型 3.3     | 二维随机变量函数的分布 .....             | 338        |
| 题型 3.4     | 二维随机变量取值的概率计算 .....           | 343        |
| 题型 3.5     | 随机变量的独立性 .....                | 344        |
| 本章总结       | .....                         | 346        |
| 自测练习题      | .....                         | 347        |
| 自测练习题答案或提示 | .....                         | 349        |
| <b>第四章</b> | <b>随机变量的数字特征 .....</b>        | <b>351</b> |
| 题型 4.1     | 数学期望与方差的计算 .....              | 351        |
| 题型 4.2     | 一维随机变量函数的期望与方差 .....          | 354        |
| 题型 4.3     | 二维随机变量函数的期望与方差 .....          | 355        |
| 题型 4.4     | 协方差与相关系数的计算 .....             | 357        |
| 题型 4.5     | 随机变量的独立性与不相关性 .....           | 361        |
| 本章总结       | .....                         | 361        |
| 自测练习题      | .....                         | 362        |
| 自测练习题答案或提示 | .....                         | 366        |
| <b>第五章</b> | <b>大数定律和中心极限定理 .....</b>      | <b>369</b> |
| 题型 5.1     | 切比雪夫不等式 .....                 | 369        |
| 本章总结       | .....                         | 370        |
| 自测练习题      | .....                         | 370        |
| 自测练习题答案或提示 | .....                         | 371        |
| <b>第六章</b> | <b>数理统计的基本概念 .....</b>        | <b>373</b> |
| 题型 6.1     | 求统计量的数字特征 .....               | 373        |
| 题型 6.2     | 求统计量的分布或取值的概率 .....           | 378        |
| 本章总结       | .....                         | 380        |
| 自测练习题      | .....                         | 381        |
| 自测练习题答案或提示 | .....                         | 382        |
| <b>第七章</b> | <b>参数估计 .....</b>             | <b>383</b> |
| 题型 7.1     | 求参数的矩估计和最大似然估计 .....          | 383        |
| 题型 7.2     | 估计量的评价标准 .....                | 390        |
| 题型 7.3     | 区间估计 .....                    | 393        |
| 本章总结       | .....                         | 394        |
| 自测练习题      | .....                         | 395        |



|                                  |            |
|----------------------------------|------------|
| 自测练习题答案或提示 .....                 | 396        |
| <b>第八章 假设检验 .....</b>            | <b>397</b> |
| 题型 8.1 单正态总体均值 $\mu$ 的假设检验 ..... | 397        |
| 本章总结 .....                       | 398        |

## 附 录

|      |                                |     |
|------|--------------------------------|-----|
| 附录一  | 1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ..... | 399 |
| 附录二  | 1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ..... | 401 |
| 附录三  | 1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ..... | 404 |
| 附录四  | 2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ..... | 406 |
| 附录五  | 2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ..... | 409 |
| 附录六  | 2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ..... | 411 |
| 附录七  | 2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ..... | 413 |
| 附录八  | 2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ..... | 416 |
| 附录九  | 2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ..... | 418 |
| 附录十  | 2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ..... | 421 |
| 附录十一 | 2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ..... | 424 |
| 附录十二 | 2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ..... | 426 |
| 附录十三 | 2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ..... | 429 |
| 附录十四 | 2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ..... | 432 |
| 附录十五 | 2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ..... | 434 |
| 附录十六 | 2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题 ..... | 436 |

PART ONE

第一部分

# 高等数学



# 第一章 函数、极限、连续

## 考试内容与要求

### 考 试 内 容

函数的概念及表示法,函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,复合函数、反函数、分段函数和隐函数,基本初等函数的性质及其图形,初等函数,函数关系的建立,数列极限与函数极限的定义及其性质,函数的左极限和右极限,无穷小量和无穷大量的概念及其关系,无穷小量的性质及无穷小量的比较,极限的四则运算,极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则,两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

函数连续的概念,函数间断点的类型,初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质.

### 考 试 要 求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

## 题型 1.1 函数的概念及其特性

1. (99,3分)\* 设  $f(x)$  是连续函数,  $F(x)$  是  $f(x)$  的原函数,则

\* (99,3分)表示该题为1999年考研数学一真题,其分值为3分,下同.

- (A) 当  $f(x)$  是奇函数时,  $F(x)$  必是偶函数.  
 (B) 当  $f(x)$  是偶函数时,  $F(x)$  必是奇函数.  
 (C) 当  $f(x)$  是周期函数时,  $F(x)$  必是周期函数.  
 (D) 当  $f(x)$  是单调增函数时,  $F(x)$  必是单调增函数.

【 】

**【答案】** 应选(A).

**【分析】** 本题涉及原函数的基本特性, 由于原函数有无穷多个, 如何表示它是问题的关键. 实际上, 只要找出一个原函数, 则所有的原函数就可表示出来, 而  $\int_0^x f(t)dt$  正好就是所需要的一个原函数.

**【详解】**  $f(x)$  的原函数  $F(x)$  可以表示为  $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$ , 于是

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C \xrightarrow{u=-t} \int_0^x f(-u)d(-u) + C.$$

当  $f(x)$  为奇函数时,  $f(-u) = -f(u)$ , 从而有

$$F(-x) = \int_0^x f(u)du + C = \int_0^x f(t)dt + C = F(x),$$

即  $F(x)$  为偶函数,

故应选(A).

至于选项(B)、(C)、(D), 可分别举反例如下:  $f(x) = x^2$  是偶函数, 但其原函数  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ , 不是奇函数, 可排除(B);  $f(x) = \cos^2 x$  是周期函数, 但其原函数  $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$ , 不是周期函数, 可排除(C);  $f(x) = x$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内是单调增函数, 但其原函数  $F(x) = \frac{1}{2}x^2$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内非单调增函数, 可排除(D).

**【评注1】** 有些考生将原函数写成形如  $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$ , 结果推导  $F(-x) = F(x)$  时遇到困难, 因此特殊形式的原函数  $\int_0^x f(t)dt$  是值得注意的.

**【评注2】** 函数的基本性质有: 奇偶性、周期性、单调性和有界性, 当  $f(x)$  具有相应的性质时,  $F(x)$  是否也具有相应的性质? 或反过来考虑, 当  $F(x)$  具有相应的性质时,  $f(x)$  是否也具有同样的性质? 本题也可变形为考虑  $f(x)$  与  $f'(x)$  (或  $f'(x)$  与  $f(x)$ ) 的性质之间的关系, 对于常见的结论与反例应做到心中有数.

**2. (05, 4分)** 设  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ $M$ 的充分必要条件是  $N$ ”, 则必有

- (A)  $F(x)$  是偶函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是奇函数.  
 (B)  $F(x)$  是奇函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是偶函数.  
 (C)  $F(x)$  是周期函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是周期函数.  
 (D)  $F(x)$  是单调函数  $\Leftrightarrow f(x)$  是单调函数.

【 】

**【答案】** 应选(A).

**【分析】** 本题可直接推证,但最简便的方法还是通过反例用排除法找到答案.

**【详解 1】** 任一原函数可表示为  $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$ , 且  $F'(x) = f(x)$ .

当  $F(x)$  为偶函数时, 有  $F(-x) = F(x)$ , 于是  $F'(-x) \cdot (-1) = F'(x)$ , 即  $-f(-x) = f(x)$ , 也即  $f(-x) = -f(x)$ , 可见  $f(x)$  为奇函数;

反过来, 若  $f(x)$  为奇函数, 则  $\int_0^x f(t)dt$  为偶函数, 从而  $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$  为偶函数, 可见(A) 为正确选项.

**【详解 2】** 令  $f(x) = 1$ , 则取  $F(x) = x + 1$ , 可排除(B), (C);

令  $f(x) = x$ , 则取  $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ , 可排除(D).

故应选(A).

**【评注】** 请读者思考  $f(x)$  与其原函数  $F(x)$  的有界性之间有何关系?

### 小结

函数的概念及函数的复合, 包括分段函数的复合, 本质上是函数关系的建立问题, 而建立函数关系是进一步研究函数性质的基础. 对于函数的四个主要特性的研究: 奇偶性和周期性一般用定义检验; 单调性则大多用导数符号分析; 有界性往往需要结合极限与连续的性质来确定.

## 题型 1.2 极限的概念与性质

(03, 4分) 设  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  均为非负数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ , 则必有

(A)  $a_n < b_n$  对任意  $n$  成立.

(B)  $b_n < c_n$  对任意  $n$  成立.

(C) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$  不存在.

(D) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$  不存在. 【 】

**【答案】** 应选(D).

**【详解 1】** 本题考查极限的概念, 极限值与数列前面有限项的大小无关, 可立即排除(A), (B); 而极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$  是“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式, 可能存在也可能不存在, 举反例说明即可; 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$  属“ $1 \cdot \infty$ ”型, 必为无穷大量, 即不存在. 故应选(D).

**【详解 2】** 用举反例法, 取  $a_n = \frac{2}{n}, b_n = 1, c_n = \frac{1}{2}n (n = 1, 2, \dots)$ , 则可立即排除(A), (B), (C), 因此正确选项为(D).

### 小结

关于极限的存在性, 以下几点是值得注意的:

1. 若  $\lim f$  存在,  $\lim g$  不存在, 则  $\lim(f \pm g)$  一定不存在, 但  $\lim fg, \lim \frac{f}{g}$  可能存在,