Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学标准模拟试卷与精解（数学三）

清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武
主编

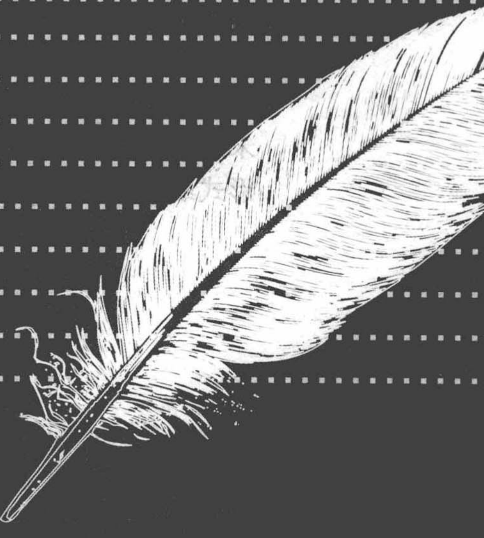
由多次参加**命题及阅卷的专家**亲自编写，内容系统、权威
严格按照最新考试大纲，突出重点

赠送MP3盘
考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

2013 考研专家指导丛书

考研数学标准模拟试卷与精解（数学三）



清华大学 王 欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童 武
主编

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学标准模拟试卷与精解. 数学三/王欢,王德军,童武主编. —北京:中国石化出版社,2012.2
ISBN 978-7-5114-1327-7

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… ②王… ③童… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第279197号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街58号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www sinopec-press. com
E-mail:press@ sinopec. com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米16开本10 25印张248千字
2012年3月第1版、2012年3月第1次印刷
定价:20.00元(赠送MP3盘)

前　　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制订的最新考试大纲，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选1000题(理工类)》、《考研数学最新精选1000题(经济类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(理工

类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(经济类)》、《考研数学必做主观题600题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题600题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下：

1. 配合最新考试大纲，反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上，力求反映最新考试要求，紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评 指正。

编 者

目　　录

模拟试卷(一)

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 设函数$f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$，则$f(x)$是(　　).

(A)偶函数　　(B)无界函数　　(C)周期函数　　(D)单调函数

2. 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　).

(A)存在且等于零　　(B)存在但不一定为零

(C)一定不存在　　(D)不一定存在

3. 下列各式中正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-e$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$

4. 曲线 $y=x(x-1)(2-x)$与 x 轴所围成的图形的面积可表示为(　　).

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\,dx$

(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,dx-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\,dx$

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\,dx$

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\,dx$

5. 齐次方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，若存在三阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则(　　).

(A) $\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$　　(B) $\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$

(C) $\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$　　(D) $\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq0$

6. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶矩阵，则下列结论正确的是(　　).

(A) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(B) $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$

(C) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 且 $r(\boldsymbol{A})=n$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(D)若 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$，则 $|\boldsymbol{A}|\neq\boldsymbol{O}$ 或 $|\boldsymbol{B}|\neq\boldsymbol{O}$

7. 设 A、B 为两随机事件，且 $B\subset A$，则下列结论中肯定正确的是(　　).

(A) $P(A+B)=P(A)$　　(B) $P(AB)=P(A)$

(C) $P(B|A)=P(B)$　　(D) $P(B-A)=P(B)-P(A)$

8. 设随机变量 X, Y 相互独立，它们的分布函数为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$，则 $Z=\min(X, Y)$ 的分布函数为(　　).

(A) $F_Z(z)=\max\{F_X(z), F_Y(z)\}$　　(B) $F_Z(z)=\min\{F_X(z), F_Y(z)\}$

(C) $F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$　　(D) $F_Z(z)=F_Y(z)$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$________.

10. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ 条件收敛，则 p 的范围是________.

11. 设 $\dfrac{dy}{dx}=x\ln(1+x^2)$，且 $y(0)=\dfrac{1}{2}$，则 $y(x)=$________.

12. 星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}(a>0)$ 绕 Ox 轴旋转所得旋转曲面的面积为________.

13. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量，$r(\boldsymbol{A})=3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\4\\2\\-8\end{pmatrix}$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为________.

14. 若随机变量 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 相互独立同分布于 $N(\mu, 2^2)$，则根据切比雪夫不等式得 $P\{|\bar{X}-\mu|\geqslant 2\}\leqslant$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 n 是给定的自然数.

16. (本题满分 10 分)

计算 $I=\displaystyle\int\frac{\operatorname{arccot} e^x}{e^x}dx$.

17. (本题满分 10 分)

计算 $\displaystyle\iint_D\ln(x^2+y^2)dxdy$，$D$：$\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant1$，并求此积分当 $\varepsilon\to0^+$ 时的极限.

18. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，且 $f'_+(a)>0$，证明：存在 $\xi\in(a, b)$，使得 $f''(a)<0$.

19. (本题满分 10 分)

设 $z=f(u, v, x)$, $u=\varphi(x, y)$, $v=\psi(y)$，求复合函数 $z=f(\varphi(x, y), \psi(y), x)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

20.（本题满分 11 分）

设齐次线性方程组$\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0, \\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0, \\ \qquad\vdots \\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0, \end{cases}$其中 $a\neq0$，$b\neq0$，$n\geqslant2$. 试讨论 a，b 为何值时，方程组仅有零解、无穷多组解？在有无穷多解时，求出全部解，并用基础解系表示全部解.

21.（本题满分 11 分）

设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2\beta x_2x_3+2x_1x_3$，经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成 $f=y_2^2+2y_3^2$，$\boldsymbol{P}$ 是 3 阶正交矩阵. 试求常数 α、β.

22.（本题满分 11 分）

一电子仪器由两个部件构成，以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命(单位：千小时)，已知 X 和 Y 的联合分布函数为 $F(x,\ y)=\begin{cases} 1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x\geqslant0,\ y\geqslant0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

(Ⅰ) X 和 Y 是否独立？

(Ⅱ)求两个部件的寿命都超过 100 小时的概率 α.

23.（本题满分 11 分）

一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的. 假设每箱平均重 50 千克，标准差为 5 千克. 若用最大载重为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于 0.977？（$\Phi(2)=0.977$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数).

模拟试卷(一)参考答案与解析

一、选择题

1.【考点提示】函数的奇偶性

【解题分析】令 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{4}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\infty$，

因此 $f(x)$ 是无界函数，故应选(B).

2.【考点提示】函数的极限

【解题分析】本题可采取举反例的方法——排除干扰项.

令 $\varphi(x)=x-\frac{1}{x^2+1}$，$f(x)=x$，$g(x)=x+\frac{1}{x^2+1}$，则 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，

$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2+1}=0$，

但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在，从而可排除(A)，(B)；

又令 $\varphi(x)=\arctan(|x|-1)$，$f(x)=\arctan|x|$，$g(x)=\arctan(|x|+1)$，

则 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}$，

因此(C)也可排除．综上，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$可能存在也可能不存在，所以选(D).

3.【考点提示】分别求四个极限即可，注意它们所属的未定式极限类型

【解题分析】因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^0=1$，故应选(A).

4.【考点提示】用定积分求平面曲线的面积

【解题分析】曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴的三个交点为 $x=0$，$x=1$，$x=2$，
当 $0<x<1$ 时，$y<0$；当 $1<x<2$ 时，$y>0$，所以围成的面积可表示为(C)的形式，故选(C).

5.【考点提示】齐次线性方程组

【解题分析】由已知 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，从而 $|\boldsymbol{A}|=0$，即

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2=0,\ \lambda=1,$$

由此可排除(A)，(B)．又由于 B 也是三阶矩阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，假设 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$，则 B^{-1}存在，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，矛盾，所以 $|\boldsymbol{B}|=0$，综上，选(C).

6.【考点提示】矩阵的性质及矩阵的秩

【解题分析】取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}$，显然 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，故(A)、(B)都不对，

取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}$，但 $|\boldsymbol{A}|=0$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$，故(D)不对，

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$，因为 $r(\boldsymbol{A})=n$，所以 $r(\boldsymbol{B})=0$，于是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，所以选(C).

7.【考点提示】利用事件的包含关系

【解题分析】由 $B\subset A$，得 $A+B=A$，所以有 $P(A+B)=P(A)$，故应选(A).

8.【考点提示】二维随机变量的分布函数

【解题分析】
$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)=P\{\min(X,Y)\leqslant z\}=1-P\{\min(X,Y)>z\}\\&=1-P(X>z,Y>z)=1-P(X>z)P(Y>z)\\&=1-[1-P(X\leqslant z)][1-P(Y\leqslant z)]=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]\end{aligned}$$

选(C).

二、填空题

9.【考点提示】求极限

【解题分析】因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{2^x\ln 2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{2^x(\ln 2)^3}=0$，且 $\sin x$ 和 $\cos x$ 均为有界函数，故

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=0.$

10.【考点提示】级数的收敛性

【解题分析】由于 $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}=\dfrac{1}{n^p(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\sim\dfrac{1}{2n^{p+\frac{1}{2}}}$,

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ 条件收敛，所以 $0<p+\dfrac{1}{2}\leqslant 1$，即 p 的范围是 $-\dfrac{1}{2}<p\leqslant\dfrac{1}{2}$.

11. **【考点提示】**可分离变量微分方程的解法

【解题分析】由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\ln(1+x^2)$，得 $y=\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x+C=\dfrac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]+C$，

再由 $y(0)=\dfrac{1}{2}$，得 $C=1$，所以 $y=\dfrac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]+1$.

12. **【考点提示】**用定积分来求旋转面的面积

【解题分析】因旋转曲面的面积为 $S=\int_a^b 2\pi y\mathrm{d}S$，化成参数方程为

$$S=\int_\alpha^\beta 2\pi y(t)\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\mathrm{d}t$$

故 $S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi a\sin^3 t\sqrt{[3a\cos^2 t(-\sin t)]^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\mathrm{d}t$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\pi a^2\sin^3 t\cos t\sin t\mathrm{d}t=12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\mathrm{d}t=\dfrac{12}{5}\pi a^2$

13. **【考点提示】**非齐次线性方程组的解

【解题分析】因为 $r(\boldsymbol{A})=3$，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$，其中

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1=(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\\-10\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\-4\end{pmatrix},$$

于是方程组的通解为 $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\\-10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\-4\end{pmatrix}$.

14. **【考点提示】**切比雪夫不等式

【解题分析】因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布于 $N(\mu, 2^2)$，所以 $\bar{X}\sim N\left(\mu, \dfrac{2^2}{n}\right)$，

从而 $P\{|\bar{X}-\mu|\geqslant 2\}\leqslant\dfrac{\frac{2^2}{n}}{2^2}=\dfrac{1}{n}$.

三、解答题

15. **【考点提示】**先化为指数函数，再用洛必达法则

【解题分析】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx})-\ln n}{}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx})-\ln n}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}+\cdots+n\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}=\dfrac{1+2+\cdots+n}{n}=\dfrac{n+1}{2}$,

于是原式 $=\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}$

16. **【考点提示】**被积分函数为反三角函数与幂级数的乘积，因此采用分部积分法，将反三角函数看作 u. 也可先变量代换 $\mathrm{e}^x=t$，再用分部积分法 .

【解题分析】$I=\int\frac{\operatorname{arccot}e^x}{e^x}dx=-\int\operatorname{arccot}e^x d(e^{-x})$

$=-e^{-x}\cdot\operatorname{arccot}e^x-\int\frac{1}{1+(e^x)^2}(e^x)'\cdot e^{-x}dx=-e^{-x}\cdot\operatorname{arccot}e^x-\int\frac{1}{1+e^{2x}}dx$

$=-e^{-x}\cdot\operatorname{arccot}e^x-\int\left(1-\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)dx=-e^{-x}\cdot\operatorname{arccot}e^x-x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+e^{2x}}d(1+e^{2x})$

$=-e^{-x}\cdot\operatorname{arccot}e^x-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$

17.【考点提示】二重积分

【解题分析】$\iint\limits_D\ln(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\varepsilon^1\ln\rho^2\rho d\rho=\pi\int_\varepsilon^1\ln\rho^2 d\rho^2$

$=\pi\left(\rho^2\ln\rho^2-\rho^2\right)\Big|_\varepsilon^1=\pi(-\varepsilon^2\ln\varepsilon^2+\varepsilon^2-1)$

所以$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\iint\limits_D\ln(x^2+y^2)dxdy=-\pi$.

18.【考点提示】中值定理的应用

【解题分析】因为$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f_+'(a)>0$，所以存在$\delta>0$，当$0<x-a<\delta$时，有$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，从而$f(x)>f(a)$，于是存在$c\in(a,b)$，使得$f(c)>f(a)=0$.

由微分中值定理，存在$\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得

$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$，$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0$.

再由微分中值定理及$f(x)$的二阶可导性，存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得

$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0$.

19.【考点提示】多元复合函数的偏导数

【解题分析】由复合函数求导法，得

$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\partial\varphi}{\partial x}+f_2'\frac{\partial\psi}{\partial x}+f_3'=f_1'\frac{\partial\varphi}{\partial x}+f_3'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\frac{\partial\varphi}{\partial y}+f_2'\psi'(y)$.

20.【考点提示】线性齐次方程组

【解题分析】由题设，方程组的系数矩阵为$A=\begin{bmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{bmatrix}$,

则$|A|=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$.

当$a\neq b$且$a+(n-1)b\neq0$，即$a\neq(1-n)b$时，方程组仅有零解.

当 $a=b$ 时，对 $\boldsymbol{A}$ 可作初等行变换化为阶梯形$\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$，

则不难求得原方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_{n-1}=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$，

因此方程组的全部解是 $x=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\xi}_{n-1}$，其中 k_1，k_2，$\cdots$，k_{n-1} 为任意常数.

当 $a=(1-n)b$ 时，同样对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化为阶梯形$\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&-1\\0&1&0&\cdots&0&-1\\0&0&1&\cdots&0&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}$，

则可得此时基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$，从而原方程组的全部解是 $k\boldsymbol{\xi}$，其中 k 为任意常数.

21.【考点提示】经正交变换(注意不是非退化线性变换)化二次型为标准形，前后二次型所对应的矩阵必相似，从而有相同的特征多项式，由此可确定参数 α、β.

【解题分析】变换前后二次型的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&\alpha&1\\\alpha&1&\beta\\1&\beta&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，

二次型可以写成 $f=x^T\boldsymbol{A}x$ 和 $f=y^T\boldsymbol{B}y$，由于 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，故 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，

因此 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，即 $\begin{vmatrix}\lambda-1&-\alpha&-1\\-\alpha&\lambda-1&-\beta\\-1&-\beta&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}$，

$\lambda^3-3\lambda^2+(2-\alpha^2-\beta^2)\lambda+(\alpha-\beta)^2=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda$，比较系数得 $\alpha=\beta=0$.

22.【考点提示】X 和 Y 是否独立可用概率密度函数或分布函数判定

【解题分析】由题设条件知 X 和 Y 的分布函数分别为

$$F_X(x)=F(x,\ +\infty)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.5x}, & x\geqslant 0\\0, & x<0\end{cases},\quad F_Y(y)=F(+\infty,\ y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.5y}, & y\geqslant 0\\0, & y<0\end{cases}$$

(Ⅰ)由上式知 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，故 X 和 Y 相互独立.

(Ⅱ)$\alpha=P\{X>0.1,\ Y>0.1\}=P\{X>0.1\}P\{Y>0.1\}$

$=(1-P\{X\leqslant 0.1\})(1-P\{Y\leqslant 0.1\})=[1-F_X(0.1)][1-F_Y(0.1)]=\mathrm{e}^{-0.1}$.

23.【考点提示】中心极限定理

【解题分析】由题设，设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是装运的第 i 箱的重量(单位：千克)，n 是所求箱数，由已知条件 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立同分布的随机变量，设 n 箱的总重量为 T_n，则 $T_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$. 又由题设，$E(X_i)=50$，$D(X_i)=25$，$i=1,2,\cdots,n$，

从而 $E(T_n)=n\cdot 50=50n$，$D(T_n)=25n$(单位皆为千克)，

由中心极限定理，知 T_n 近似服从参数为 $50n$，$25n$ 的正态分布，即 $N(50n,25n)$，由条件

$$P\{T_n\leqslant 5000\}=P\left\{\frac{T_n-50n}{5\sqrt{n}}\leqslant\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}\right)>0.977=\Phi(2),$$

可得出 $\dfrac{1000-10n}{\sqrt{n}}>2$，即 $n<98.0199$，所以最多可以装 98 箱.

模拟试卷(二)

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$，在下列哪个区间内有界？(　　)

(A) $(-1,\ 0)$　　(B) $(0,\ 1)$　　(C) $(1,\ 2)$　　(D) $(2,\ 3)$

2. 当 $x\to 0$ 时，下列四个无穷小量中，哪一个是比其他三个更低阶的无穷小量？(　　)

(A) $x-\tan x$　　(B) $1-\cos x$　　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$　　(D) $\tan x$

3. 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$，且 $f'(0)=b$，其中 a，b 为非零常数，则(　　).

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导　　(B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$　　(D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$

4. 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则(　　).

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必为周期函数

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必为单调增函数

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 等于(　　).

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　(B) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$　　(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$

6. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分条件是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 均不为零向量

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量的分量不成比例

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一部分向量线性无关

7. 设 A 和 B 是任意两个概率不为 0 的不相容事件，则下列结论中肯定正确的是(　　).

(A) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 不相容　　(B) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相容

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(A-B)=P(A)$

8. 设(X_1, X_2, …, X_n)($n\geqslant 2$)为标准正态总体, X 的简单随机样本, 则(　　).

(A) $n\bar{X}\sim N(0,1)$　　　　(B) $nS^2\sim\chi^2(n)$

(C) $\dfrac{(n-1)\bar{X}}{S}\sim t(n-1)$　　　　(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$______.

10. 设 $y(x)$ 为微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 满足初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=2$ 的特解, 则 $\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=$______.

11. 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点(0, 1)处的切线方程为______.

12. 设 $a>0$, $f(x)=g(x)=\begin{cases}a, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 而 D 表示整个平面, 则 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

13. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, 而 $n\geqslant 2$ 为正整数, 则 $A^n-2A^{n-1}=$______.

14. 设随机变量 X 在区间[−1, 2]上服从均匀分布, 随机变量 $Y=\begin{cases}1, & \text{若 } X>0,\\ 0, & \text{若 } X=0,\\ -1, & \text{若 } X<0,\end{cases}$ 则方差 $D(Y)=$______.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 9 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

16. (本题满分 10 分)

设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$, 求 $\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

17. (本题满分 10 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数, 且 $g(0)=1$, $g'(0)=-1$;

(Ⅰ)求 $f'(x)$;

(Ⅱ)讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.