



普通高等教育“十二五”机电类规划教材



机电系统计算机控制 及辅助设计

赵俊生 主 编
赵鹏飞 方群玲 副主编
潘宏侠 主 审

- 21世纪新编教材
- 体现工学结合、学用一致
- 配套PPT等教学资源
- 请登录www.hxedu.com.cn免费获取



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

普通高等教育“十二五”机电类规划教材

机电系统计算机控制 及辅助设计

赵俊生 主 编
赵鹏飞 方群玲 副主编
潘宏侠 主 审

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书对机电系统计算机控制的基本理论和应用技术进行了比较全面的介绍,内容主要包括:机电系统计算机控制的一般概念、分类和组成,机电系统的建模方法,信号采样与保持,采样控制理论,计算机离散控制系统的性能指标描述,数字PID控制算法,数字控制器的模拟化设计及离散化设计方法,基于现代控制理论的离散状态空间设计方法,基于MATLAB的机电控制系统计算机辅助分析与设计,以及控制系统特性的仿真分析。

本书可作为普通高等院校机械电子工程专业、机械设计制造及其自动化专业、数控机床专业、汽车专业等相关专业的教材,亦可供工程技术人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

机电系统计算机控制及辅助设计 / 赵俊生主编. —北京:电子工业出版社,2012.2

普通高等教育“十二五”机电类规划教材

ISBN 978-7-121-15859-9

I. ①机… II. ①赵… III. ①机电系统—计算机控制—高等学校—教材 IV. ①TH—39

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第020604号

策划编辑:陈韦凯 特约编辑:刘海霞 吕晓林

责任编辑:陈韦凯

印 刷: 北京京师印务有限公司

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编100036

开 本:787×1092 1/16 印张:15 字数:380千字

印 次:2012年3月第1次印刷

印 数:3000册 定价:35.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前 言

计算机控制系统分析与设计是机电一体化专业的技术基础课,该课程是使“控制工程基础”与“微机原理及接口技术”两门课程相互衔接的一门基础理论课程。由于计算机控制系统已广泛应用于工业、农业、商业、金融、国防等国民经济部门,因此有关计算机控制系统分析和设计的知识,也成为机电一体化复合型人材的必备知识。

作为教材,本书在论述中力求简明扼要,前后连贯;在内容安排上,以系统分析和设计为主线。考虑到读者已有一定的数学基础,本书在讲述控制系统的数学描述方法时,从分析、设计一个系统所需要的数学基础出发,将理论分析的系统性与目的性密切结合起来,以便读者利用数学工具进行计算机控制系统的分析与设计。同时,本书注意理论分析与设计方法的紧密结合,对基础理论的描述由浅入深、由简到繁,力求给读者以清晰的物理概念,使读者既能掌握理论分析的方法,又能从事系统的分析与设计。

书中对每一种设计方法,以提出问题和解决问题的思路及具体步骤为主线,较系统地讨论了计算机控制系统的不同分析和设计方法,并结合 MATLAB 工具进行辅助分析与设计。各章都有一定数量的例题和习题,大部分例题都给出了 MATLAB 程序,以使读者便于理解基本概念,较快地掌握各种分析和设计方法的特点,从而能够针对不同控制对象和要求采用不同的方法进行分析和设计控制系统。

全书共分 8 章。第 1 章为概述。第 2 章介绍机电系统数学模型的建立,包括时域微分方程、复数域传递函数及现代控制理论的状态空间模型。第 3 章介绍连续时间信号与离散时间信号的相互转换,研究离散系统的有力工具 Z 变换(Z 反变换)、离散系统的数学模型和脉冲传递函数,以及差分方程的求解和脉冲传递函数的分析方法。第 4 章阐述离散控制系统的性能指标,并采用 Z 变换分析法对线性离散系统的性能进行分析和讨论,注重与连续控制系统的比较,为计算机控制系统的分析与设计奠定了基础。第 5、第 6 章分别讨论基于经典控制系统设计方法的计算机控制系统的等价离散化设计方法,以及直接在 Z 域内进行离散化设计方法。第 7 章结合现代控制理论中状态空间设计方法,采用离散状态空间分析法来研究和分析多变量问题、时变问题等。第 8、第 9 章主要结合 MATLAB 软件,分别介绍机电控制系统的计算机辅助分析与设计,以及控制系统特性仿真分析方法。

在内容安排上,考虑到机电一体化专业的课程设置还在不断地改进,以及课程的系统性,本书中编入了 Z 变换和线性定常连续系统状态变量的分析等内容,因此在讲授时,可依据学生的实际情况适当删减。又考虑到学时和篇幅的限制,书中没有介绍典型的计算机控制系统实例,以及过程控制的输入/输出技术和人机接口技术(因这部分作为课程设计的内容为宜)。

本书的编写既是编者多年来教学和实践经验的概括和总结,又博采了目前各教材和著作的精华。参加该书编写工作的有中北大学赵俊生(第 1、6、7 章)、赵鹏飞(第 8、9 章)、方群玲(第 3~5 章)、山西省电力公司电力科学研究院刘建华(第 2 章),全书由赵俊生主持编写和负责统稿。本书成稿后由中北大学教授潘宏侠担任主审,他从全书的结构到文字表述都给予了较全面、具体的指导,并提出了宝贵的修改意见,在此表示衷心的感谢!本书的编

写得到电子工业出版社热情的帮助和指导，以及中北大学教务处的大力支持，在此也表示最真诚的谢意！

一本新书的出版一般都是在认真总结与引用前人知识和智慧的基础上创新发展起来的，本书的编写也参考和引用了许多前人优秀教材与研究成果的结晶和精华。在此向本书所参考和引用的资料、文献、教材的编著者表示最诚挚的敬意和感谢！

本书是 21 世纪新编教材，既要凸现工学结合、学用一致、理论密切联系生产实际、“教、学、做”一体化等教学特色，又要注重对大学生素质和技能的培养和提高，所以难度较大。鉴于编者的水平和经验有限，书中错误、疏漏在所难免，恳请读者和专家批评指正。

编著者

2012.1

目 录

第 1 章 概论	1
1.1 机电系统的概念及研究价值	1
1.2 机电系统计算机控制的概念及组成	1
1.3 计算机控制技术的发展	2
第 2 章 机电系统的数学模型	4
2.1 微分方程式的建立	4
2.1.1 建立系统微分方程式的一般步骤	4
2.1.2 典型系统微分方程的建立	5
2.2 线性微分方程的拉普拉斯变换求解方法	7
2.2.1 拉普拉斯变换的定义	7
2.2.2 常用函数的拉普拉斯变换	8
2.2.3 拉普拉斯变换的基本定理	8
2.2.4 拉普拉斯反变换	9
2.2.5 用拉普拉斯变换求解线性微分方程	10
2.3 传递函数与方框图	11
2.3.1 传递函数的定义	11
2.3.2 传递函数的性质	13
2.3.3 简单方框图的传递函数	13
2.4 状态空间模型	20
2.4.1 状态空间表达式的建立	20
2.4.2 状态空间分析的 MATLAB 实现	23
小结	25
习题	25
第 3 章 线性离散控制系统的数学描述	28
3.1 连续时间信号与数字信号的相互转换	28
3.1.1 信号的采样	28
3.1.2 采样定理及采样周期的选择	29
3.1.3 采样信号的复现与采样保持器	31
3.2 Z 变换与 Z 反变换	33
3.2.1 Z 变换的定义	33
3.2.2 Z 变换的基本定理	36
3.2.3 Z 反变换	38
3.3 差分方程及求解	43
3.3.1 差分方程	43
3.3.2 用 Z 变换求解差分方程	43

3.4	脉冲传递函数	44
3.4.1	脉冲传递函数的概念	44
3.4.2	开环脉冲传递函数	46
3.4.3	闭环脉冲传递函数	48
	小结	51
	习题	51
第4章	控制系统性能指标描述	53
4.1	计算机控制系统的性能及其指标	53
4.1.1	离散控制系统的稳定性	53
4.1.2	计算机控制系统的能控性和能观测性	54
4.1.3	动态指标	54
4.1.4	稳态指标	55
4.1.5	综合指标	55
4.2	线性离散系统的稳定性分析	56
4.2.1	Z平面的稳定性条件	56
4.2.2	朱利(Jury)稳定判据	57
4.2.3	双线性变换的劳斯(Routh)稳定判据	58
4.3	线性离散系统的稳态误差分析	60
4.4	线性离散系统的动态响应分析	62
4.5	线性离散系统的根轨迹分析法	65
4.5.1	根轨迹图	65
4.5.2	Z平面上的等阻尼线	68
4.6	线性离散系统的频率特性分析法	69
4.6.1	对数频率特性	69
4.6.2	极坐标频率特性	70
	小结	71
	习题	72
第5章	计算机控制系统的模拟化设计	73
5.1	概述	73
5.2	数字控制器的等价离散化设计	73
5.2.1	各种离散化方法	74
5.2.2	各种离散方法的比较	78
5.3	对数频率特性法校正	82
5.4	数字PID控制	85
5.4.1	模拟PID控制规律的离散化	85
5.4.2	PID控制器的脉冲传递函数	87
5.4.3	PID控制器参数对控制系统性能的影响	88
5.4.4	PID控制规律的选择	90
5.4.5	PID控制算法的改进	91
5.4.6	PID控制参数的确定	93

小结	95
习题	95
第 6 章 计算机控制系统的离散化设计	96
6.1 数字控制器的离散化设计法	96
6.1.1 数字控制器的解析设计法	96
6.1.2 时间最优控制系统	99
6.1.3 有限拍无纹波系统的设计	104
6.1.4 有限拍无纹波设计的改进	107
6.1.5 扰动系统的有限拍设计	110
6.1.6 时间最优控制系统设计小结	111
6.2 纯滞后对象的控制	112
6.2.1 大林算法	112
6.2.2 纯滞后补偿(Smith 预估)控制	115
小结	116
习题	117
第 7 章 计算机控制系统的现代控制理论设计	118
7.1 线性离散系统的离散状态空间表达式	118
7.1.1 离散状态空间表达式的建立	119
7.1.2 线性离散系统的 Z 特征方程及 Z 传递矩阵	122
7.1.3 线性离散系统离散状态方程的求解	124
7.2 线性离散系统的可控性及可观测性	124
7.2.1 离散系统的可控性	125
7.2.2 离散系统的可观测性	126
7.3 离散状态空间设计法	128
7.4 极点配置设计法	133
7.5 状态观测器设计	135
7.6 降阶观测器	137
7.7 线性定常离散系统二次型最优控制	138
7.7.1 最优控制的基本概念	139
7.7.2 线性二次型最优控制	140
小结	144
习题	144
第 8 章 机电控制系统的计算机辅助分析与设计	146
8.1 机电系统的数学模型及其转换方法	146
8.1.1 连续系统的数学描述	146
8.1.2 系统模型的相互转换	149
8.1.3 系统状态方程的变换与实现	154
8.1.4 控制系统模型的建立与典型连接	159
8.2 连续线性系统的计算机辅助分析与设计	167
8.2.1 根轨迹方程	168

8.2.2	用 MATLAB 绘制极轨迹	169
8.2.3	根轨迹设计工具	170
8.3	线性系统频率特性与奈奎斯特图	174
8.3.1	奈奎斯特稳定判据	174
8.3.2	利用奈奎斯特图来分析系统的稳定裕量	175
8.3.3	利用 MATLAB 绘制奈奎斯特(Nyquist)曲线	176
8.3.4	幅值裕量与相位裕量	177
8.4	线性系统的伯德图分析	179
8.4.1	伯德图	179
8.4.2	伯德图的渐近线	179
8.4.3	由伯德图判定系统稳定性	182
8.4.4	应用 MATLAB 函数绘制伯德图	182
8.5	基于复域与频域的线性系统设计与校正	185
8.5.1	串联超前/滞后补偿器设计	185
8.5.2	比例积分微分(PID)控制	196
8.6	离散系统计算机辅助分析与仿真	200
8.6.1	离散系统的分析	200
8.6.2	离散系统的仿真	205
第 9 章	机电系统动态性能的计算机仿真	208
9.1	概述	208
9.2	面向微分方程的连续系统仿真与 MATLAB 实现	208
9.2.1	基于 ode 函数的面向微分方程的系统仿真	209
9.2.2	基于 M 函数的面向微分方程的系统仿真	211
9.3	面向传递函数的连续系统仿真	212
9.3.1	面向传递函数的系统仿真	212
9.3.2	面向传递函数的系统仿真的 MATLAB 实现	213
9.4	面向结构图的连续系统仿真	215
9.4.1	基于典型环节的系统仿真	215
9.4.2	基于 Connect 连接函数的系统仿真	219
9.5	MATLAB 中的系统仿真工具 Simulink 应用	221
9.5.1	Simulink 应用简介	221
9.5.2	S-Function(S 函数)应用	223
	参考文献	229

第1章 概 论

1.1 机电系统的概念及研究价值

系统是为了形成某特殊功能而装配起来的一组物理元件。系统可以是电的、机械的、液压的、气动的、热的、生物医学的,或者这些系统的某种组合。一般来说,机电系统是机械和电的组合系统,它的动力部分是电气的,经过电气系统与工艺过程或被控现象相联系的是机械设备。机械设备与电气动力相结合的系统称为机电系统。机电系统是运动控制系统的基本环节。

机械设备(又称被控对象)包括机械和机械传动两部分内容。电气动力包括能量放大和执行器两部分内容。能量放大一般是电压放大、电流放大和功率放大,这些统称为驱动器。执行器一般是指伺服电机、步进电机、电磁阀和电磁铁等,根据输出信号的类型,它常分为线性执行器和数字式执行器两类,同时与之相匹配的是线性驱动器和脉冲驱动器。

机电系统的物理结构框图如图 1.1 所示。图中 $u(t)$ 为连续时间控制信号, $u(nT)$ 为离散时间控制信号, T 是采样周期(或控制周期), n 为整数。

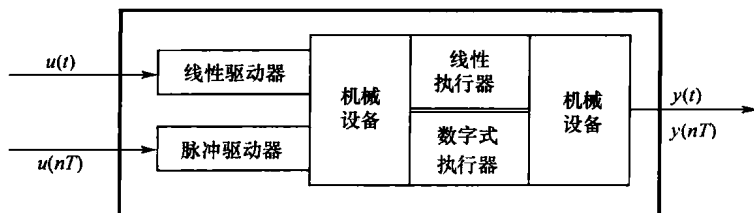


图 1.1 机电系统的物理结构

机电系统在国防军事装备、航空航天设备、民用设备、机电产品和生产过程自动化中大量存在。又因为力学系统中的位置、速度、转角,电力系统中的电流、电压、电感和电容,化学热力学中的分子数、温度、压力、流量等和机电系统的状态函数是相似的,所以,机电系统的研究分析具有一般性、代表性、先进性和实用性的价值。

1.2 机电系统计算机控制的概念及组成

随着计算机和微电子技术的迅速发展,数字计算机不仅用于单个控制回路的调节器或控制器中,代替常规的模拟调节器或控制器,而且还经常被用于高度现代化的工业生产控制系统中。可以这样说,目前所有的控制系统都是基于计算机控制来实现的,而所有开发的控制系统都是以计算机控制为基础的,其发展方向是“智能”和“柔性”。“智能”和“柔性”就是不改变系统的硬件,而能根据客观的情况灵活地完成要求的多种功能,这正是计算机的特长。

机电系统计算机控制是指机电系统、被控现象(或过程)、信息获取和处理(测量技术)、计算机接口等部分,在数字计算机的支持下,以系统的性能指标为准则,用计算机系统集成的观

点进行有效组合而形成的计算机控制系统。机电系统计算机控制系统的基本物理结构如图 1.2 所示,它又称为直接数字控制系统(DDC)。

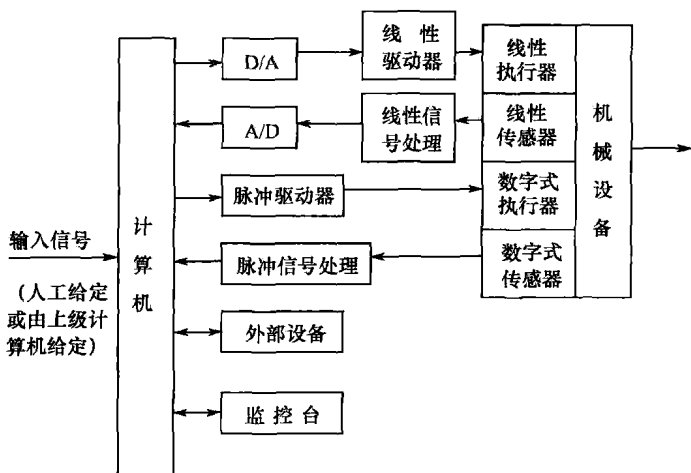


图 1.2 机电系统计算机控制组织的基本物理结构

图中传感器检测与机械状态有关的物理量相同,它的输出必须转换为电信号。机械状态的物理量是指位置、速度、加速度、力和力矩等,到底检测什么物理量视系统的要求而定。

执行器是对机械作用的工作部分,主要产生力学运动,由此改变机械状态。执行器按动力源可分为电气式、液压式、气动式及其他方式。在电气执行器中,一般有伺服电机、步进电机、电磁线圈等。

线性信号处理包括线性连续时间信号放大及滤波等。A/D 称为模拟/数字转换器,它包括采样保持和量化,其输出为数字形式,何时采样由计算机控制。D/A 称为数字/模拟转换器,它是将数字信号转换成模拟信号形成控制量。外部设备包括显示器和打印机等,监控台主要包括监视、控制按钮和指示灯等,被控对象是机械机构或过程。

有计算机参加的控制系统称为计算机控制系统,有时又称为数字控制系统,这是计算机在控制系统中的在线应用。计算机还可以帮助工程设计人员对控制系统进行分析、设计、仿真和建模等工作,这方面的内容称为计算机辅助设计或控制系统 CAD,这是计算机在控制系统方面的离线应用。

1.3 计算机控制技术的发展

控制理论与计算机技术相结合,产生了计算机控制理论与技术。控制理论发展的初期,是以反馈控制理论为基础的自动调节原理。随着科学技术和生产的发展,已成为一门独立的学科,称为控制论。控制论包括工程控制论、生物控制论和经济控制论。本书所涉及的只是工程控制论中的问题,主要研究控制系统分析和设计的一般理论与实现。

20 世纪 40 年代,自动化技术、通信技术和计算机技术在工业上得到了应用和发展,1948 年,维纳的著作《控制论》,研究了不同控制系统控制过程的共同规律。这篇著作的发表,标志着一个新的学科——控制论的诞生。

在第二次世界大战前后,由于军事和生产发展的需要,自动控制理论和技术迅速发展,在雷达跟踪、船舶自动驾驶、工业生产等方面都得到了广泛的应用。20 世纪 50 年代末期,自动

控制理论已经形成了比较完整的体系,并在实践中得到了广泛的应用。这个时期的自动控制理论称为经典控制理论。它的主要数学方法是傅里叶变换和拉普拉斯变换,将系统从时域变换到频域,便于进行系统的稳定性等性能的分析。频域法把描述系统动态行为的微分方程,变换为简单的代数方程,即描述系统输入与输出关系的传递函数。

20世纪50年代末,航天技术、微电子技术和计算机等学科技术得到了高速发展,从而对控制技术提出了更高的要求,经典控制理论已经不能满足要求。计算机的发展,在客观上又提供了技术手段,使自动控制理论出现了新的飞跃。20世纪60年代初期,出现了现代控制理论,简称现代控制论。

现代控制理论主要研究多输入、多输出系统的状态控制。其数学工具是矢量微分方程、矩阵理论和近代的一些代数理论。主要研究方法是状态空间法。主要研究时域内最优控制、随机控制、系统辨识及自适应控制等。

现代控制理论的发展,解决了经典控制理论所不能解决的许多理论问题和工程问题,但是这并不意味着经典控制理论已经过时。相反,由于经典控制理论便于工程应用,今后还将继续发挥理论指导作用,而现代控制理论可以弥补其不足,两者相辅相成,从而推动控制理论及应用向前发展。

近年来,由于科学技术进一步发展,现代控制理论又在大系统理论和智能控制理论方面继续向前深入,显示出自动控制理论和自动控制技术无可估量的发展前景和巨大的潜力。

计算机控制系统的发展,是与控制理论与计算机技术相伴发展的,它也是包含在控制理论与技术的大框架下,往前发展的。

数字计算机作为控制系统的部件开始于20世纪50年代,具有代表性的是一个采用RW-300计算机的聚合装置的计算机控制系统,该系统控制26个流量、72个温度、3个压力和3个成分。主要的目的是使反应器压力最小,5个反应器供料的最佳分配,根据催化剂活性测量的数据来控制热水的流量,确定最佳循环,按照监督操作方式进行。

在20世纪60年代,计算机直接控制生产过程,这种控制模式又称直接数字控制(DDC)模式。例如,1962年,英国帝国化学公司利用计算机完全代替原来的模拟控制设备,通过A/D转换器直接测量224个变量和控制129个阀门。DDC控制系统中,传统的模拟控制技术直接被数字控制技术代替,系统的整个功能保持不变。

在20世纪70年代,由于前期计算机控制的研究和应用,获得了更多的计算机控制过程的知识,又由于小型计算机的出现,对于一些小型工程项目和课题都可使用计算机控制。因此,计算机在20世纪80年代数字控制技术得到了普遍应用。

在20世纪60年代至90年代,由于微型计算机、微处理器的发展、计算机容量的增大和运算速度提高、计算机接口标准化和通信能力增强、人机界面好,这些对计算机控制技术的应用产生了深远的影响,计算机控制系统的结构形式发生了根本的变化,用数字技术实现新的控制系统,并成为一般技术,几乎应用到所有控制领域。

从20世纪90年代开始,随着微处理技术和其他高新技术的发展,使集散型控制、全厂监督和控制、智能控制得到进一步的研究和应用,计算机控制系统朝着网络化、智能化的方向飞速发展。

展望21世纪,随着超大规模集成技术的发展,计算机技术还会有惊人的发展,计算机具有更强的计算功能,在显示技术和通信方面还会有更大改进,性能价格比会显著提高,将为计算机控制技术向高阶、智能化发展奠定更坚实的基础。

第2章 机电系统的数学模型

2.1 微分方程式的建立

在研究一个机电系统的时候,首先要建立该系统的数学模型。一旦得到了描述系统运动的数学模型,就可以采用数学分析的方法来研究该系统。一般情况下,一个动力学系统的运动受到物理学基本定律的支配,可以表现为描述其因果关系的微分方程。如果对这些微分方程求解的话,就可获得系统在外部控制作用下的动态响应。如机械系统,可以由牛顿定律、能量守恒定律写出运动的微分方程,而电学系统的微分方程,则可以由欧姆定律和基尔霍夫定律得到。通常所说的系统的运动,就是对系统施加控制,也就是输入控制信号,来得到系统输出变量随时间的变化规律,也就是系统的输出响应信号。系统运动的数学描述,就是在给定输入信号和初始条件下,求解微分方程而得到微分方程的解。本节主要讨论机电系统动力学方程的建立。

2.1.1 建立系统微分方程式的一般步骤

由于机电系统由各种功能不同的元件组成,因此,首先必须研究系统中各个元件的运动方程式,以及这些元件在整个系统中相互联系时的彼此影响。根据系统的机理分析,建立系统微分方程式的一般步骤如下所述。

(1) 分析系统的工作原理和系统中各变量间的关系,将系统划分为若干个环节(或元件),确定每一环节的输入信号和输出信号。确定输入信号和输出信号时,应使前一环节的输出信号是后一环节的输入信号。

(2) 根据支配系统动态特性的定律,从输入端开始,按照信号的传递顺序,列出各个元件描述输出信号和输入信号相互关系的动态方程式,一般为微分方程组。

(3) 消去中间变量,最后得到只包含系统输入量和输出量的微分方程式,得到系统的数学模型。

(4) 将方程式化为标准形式,即将与输入有关的各项放在等号右边,与输出有关的各项放在等号的左边,并且各导数项要按降幂排列,最后将系数归化为反映系统动态特性的参数,如时间常数等。

控制系统的运动规律,一般是以时间为自变量,采用线性常系数方程来描述的,可以表示为

$$\begin{aligned} & \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) \\ & = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_m x(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

式中, m, n 是正整数; $y(t)$ 表示系统的输出变量(或响应); $x(t)$ 表示系统的输入变量(或激励); t 为自变量,表示时间。若 $x(t)$ 为零,微分方程称为齐次的,否则称为非齐次的。方程的阶用 n 表示,即 $y(t)$ 的最高导数的阶次。 a_1, a_2, \dots, a_n 和 b_0, b_1, \dots, b_m 表示微分方程的系数。系数为

常数称为常系数微分方程(或时不变微分方程);若系数是时间的函数称为变系数微分方程(或时变微分方程)。只有一个自变量的称为常微分方程;若自变量有两个以上的称为偏微分方程。

2.1.2 典型系统微分方程的建立

由于实际系统的结构一般比较复杂,甚至不清楚内部机理,所以,要列出实际机电系统的微分方程是比较困难的。下面以一些简单的系统为例,说明建立系统数学模型的基本方法。

1. 机械系统

机械系统主要分为机械平移系统和机械转动系统两类。它们之间的区别在于一个施加的是力,产生的是位移,另一个施加的是扭矩,产生的是转角。牛顿定律、胡克定律等是建立机械系统的数学模型的基础。

例 2.1 设弹簧—质量—阻尼组成的简单的机械平移系统如图 2.1 所示, k 为弹性系数; f 为阻尼系数; m 为物体质量。列出以 F_i 为输入,以质量的位移 y 为输出的运动方程式。

解 根据牛顿第二定律可得

$$ma = \sum F = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

则系统的方程为

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_i + F_f + F_k = F_i - f \frac{dy}{dt} - ky$$

上式经整理,可得系统的微分方程为

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = F_i \quad (2.2)$$

例 2.2 已知机械转动系统如图 2.2 所示,系统由惯性负载和黏性摩擦阻尼器组成。系统的输入为外力矩 M ,系统的输出为角速度 ω 。试列出系统运动方程式。

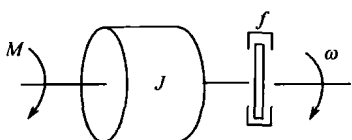


图 2.2 机械转动系统

解 对这样的系统,牛顿第二定律可以表示为

$$J \frac{d\omega}{dt} = \sum M$$

式中, J 为惯性负载的转动惯量; ω 为角速度; M 为外加到系统的转动力矩。

该系统可得

$$J \frac{d\omega}{dt} = -f\omega + M$$

式中, f 为黏性摩擦系数。上式也可写为

$$J \frac{d\omega}{dt} + f\omega = M$$

若系统的输出为转角 θ , 因为 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, 带入方程得

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = M \quad (2.3)$$

2. 电气系统

电气系统种类和元件繁多,但根据有关电、磁及电路的基本定律,无论其结构多么复杂,均

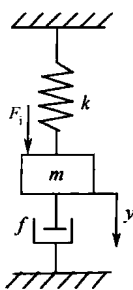


图 2.1 机械平移系统

可建立相应的数学模型。

例 2.3 设有一个以电阻 R 、电感 L 和电容 C 组成的 $R-L-C$ 电路如图 2.3 所示。试列写以 u_i 为输入, u_o 为输出的微分方程式。

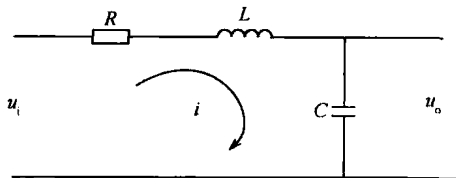


图 2.3 $R-L-C$ 电路

解 根据基尔霍夫定律写出电路方程,即

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + Ri = u_i$$

消去中间变量 i 得输入/输出的运动方程式

$$LC \frac{d^2 u_o}{dt^2} + RC \frac{du_o}{dt} + u_o = u_i \quad (2.4)$$

3. 复合系统

复合系统微分方程式的列写,应先写出各子系统中满足输入-输出关系的微分方程组,再消去中间变量求得。

例 2.4 天线方位角伺服系统如图 2.4 所示,试列出以电枢电压 u_a 为输入信号,跟踪卫星的天线的方位角 θ 为输出信号的运动方程式。

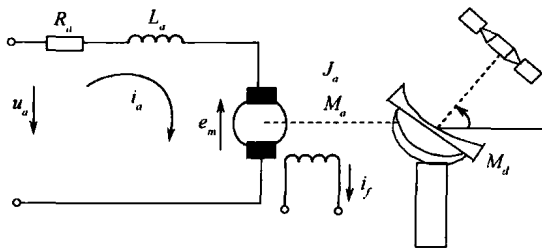


图 2.4 天线方位角伺服系统

解 天线方位角伺服系统的运动是一复合系统的运动。它由两个子系统构成,一个是电网络系统,由电网络得到电能,产生电磁转矩。另一个是机械运动系统,输出机械能带动天线转动。由工作原理可知,它实际上是将输入的电能转换成机械能。其能量的传递过程是输入的电压 u_a 在电枢回路中产生电枢电流 i_a ,而电流 i_a 与激磁磁通相互作用产生了电磁转矩 M_a ,于是带动天线转动。可写出各平衡方程如下。

(1) 电网络平衡方程

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_m = u_a$$

式中, u_a 为电动机的电枢电压(V); e_m 为电动机的反电势(V); i_a 为电动机的电枢电流(A); R_a 为电枢绕组的电阻(Ω); L_a 为电枢绕组的电感(H)。

(2) 电动势平衡方程

$$e_m = k_a \omega$$

式中, ω 为电动机轴的转速(rad/s); k_e 为反电动势系数(V/rad/s)。

(3) 机械平衡方程

$$J_a \frac{d\omega}{dt} + f\omega = M_a - M_d$$

式中, J_a 为电动机转子的转动惯量($\text{kg} \cdot \text{m}^2$); f 为阻尼系数($\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}/\text{s}$); M_a 为电动机的电磁转矩($\text{N} \cdot \text{m}$); M_d 为风力产生的阻力矩($\text{N} \cdot \text{m}$)。

(4) 转矩平衡方程

$$M_a = k_c i_a$$

式中, k_c 为电机转矩系数($\text{N} \cdot \text{m}/\text{A}$)。

将上述方程联立, 因为空载下的阻力力矩很小, 可略去 M_d , 得如下方程组, 即

$$\begin{cases} L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_m = u_a \\ e_m = k_e \omega \\ J_a \frac{d\omega}{dt} + f\omega = M_a - M_d \\ M_a = k_c i_a \end{cases}$$

消去中间变量 i_a 、 e_m 、 M_a , 得到输入为电枢电压 u_a , 输出为转轴角速度 ω 的二阶微分方程, 即

$$\frac{J_a L_a}{k_c} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \left(\frac{L_a f + J_a R_a}{k_c} \right) \frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{R_a f}{k_c} + k_e \right) \omega + \frac{L_a + R_a}{k_c} M_d = u_a$$

根据具体情况, 工程应用时可进行简化。电动机电枢电感 L_a 通常比较小, 因而可以忽略 L_a 。同样在工程实践中, $M_c = f\omega$ 和 M_d 是作为干扰信号来处理的, 如果设 $M_c = f\omega = 0$, $M_d = 0$, 则可得一阶线性微分方程为

$$\frac{J_a R_a}{k_c} \frac{d\omega}{dt} + k_e \omega = u_a$$

若以电动机转角 θ (rad) 为输出, 即 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, 则上式可改写为

$$\frac{J_a R_a}{k_c} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + k_e \frac{d\theta}{dt} = u_a \quad (2.5)$$

如果电机轴上的转动惯量 J_a 和电枢电阻 R_a 都可以忽略不计, 则方程变为

$$k_e \frac{d\theta}{dt} = u_a$$

此时电枢电压 u_a 与电动机的转速成正比, 这就是测速发电机的原理。

2.2 线性微分方程的拉普拉斯变换求解方法

拉普拉斯变换是对系统进行分析、建模和设计的基本数学工具, 它是求解线性微分方程的简便工具, 同时也是建立系统传递函数的数学基础。

2.2.1 拉普拉斯变换的定义

如果一个以时间 t 为自变量的函数 $f(t)$, 它的定义域是 $t \geq 0$, 那么, 拉普拉斯变换为

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.6)$$

式中, s 为复数, $s = \sigma + j\omega$; σ 是实数; ω 是角频率(rad/s)。 L 为运算符号, 称为拉普拉斯变换算子; $F(s)$ 为函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换。

2.2.2 常用函数的拉普拉斯变换

常用函数的拉普拉斯变换见表 2.1。

表 2.1 常用函数的拉普拉斯变换表

序号	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mp a}$
6	$t^n e^{\pm at}$	$\frac{n!}{(s \mp a)^{n+1}}$
7	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
8	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
9	$e^{\pm at} \sin \omega t$	$\frac{s \mp a}{(s \mp a)^2 + \omega^2}$
10	$e^{\pm at} \cos \omega t$	$\frac{\omega}{(s \mp a)^2 + \omega^2}$
11	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
12	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
13	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
14	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
15	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

2.2.3 拉普拉斯变换的基本定理

常用的拉普拉斯变换基本定理参见表 2.2。

表 2.2 拉普拉斯变换的基本定理

序号	定理名称	数学描述
1	常数定理	$L[Af(t)] = AF(s)$
2	线性定理	$L[a \cdot f_1(t) \pm b \cdot f_2(t)] = a \cdot F_1(s) \pm b \cdot F_2(s)$
3	衰减定理	$L[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$