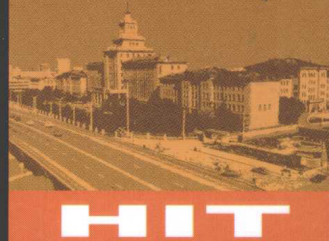


Elementary Number
Theory (III)



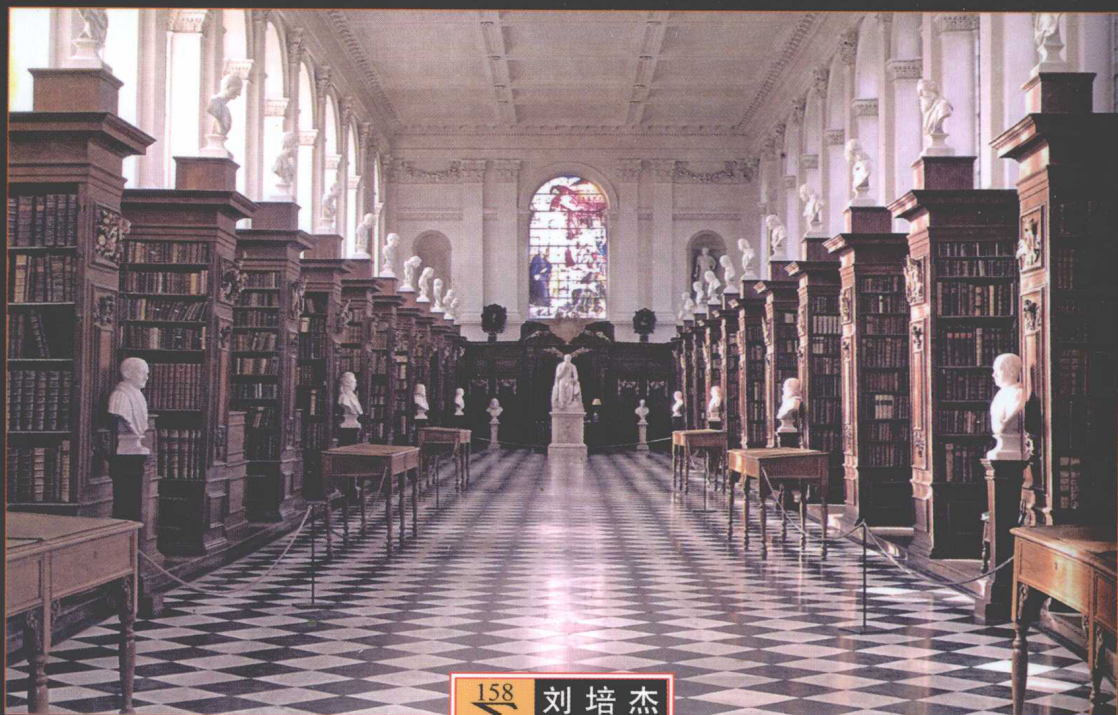
数论经典著作系列

初等数论(III)

陈景润 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



158
 $\sum_{i=0}$

刘培杰
数学工作室



陈景润 (1933年5月22日—1996年3月19日) 福建福州人，中国著名数学家，厦门大学数学系毕业。

历任中国科学院数学研究所研究员、河南大学、青岛大学、华中工学院、福建师范大学等校教授、国家科学技术委员会数学学科组成员、《数学季刊》主编等职。

1966年发表《表达偶数为一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和》(简称“ $1+2$ ”), 成为哥德巴赫猜想研究上的里程碑, 而他所发表的成果也被称之为陈氏定理。这项工作还使他与王元、潘承洞在1978年共同获得中国自然科学奖一等奖。1999年, 中国发表纪念陈景润的邮票。紫金山天文台将一颗行星命名为“陈景润星”, 以此纪念。另外, 发表研究论文25篇, 并有《数学趣味谈》、《组合数学》等著作。

世界级的数学大师、美国学者安德烈·韦伊 (André Weil) 曾这样称赞他: “陈景润的每一项工作, 都好像是在喜马拉雅山山巅上行走。”

刘培杰数学工作室网站

<http://lpj.hit.edu.cn>

哈尔滨工业大学出版社 刘培杰数学工作室

联系地址: 哈尔滨市南岗区复华四道街10号

邮编: 150006

联系电话: 0451-86281378 13904613167

E-mail: lpj1378@yahoo.com.cn

ISBN 978-7-5603-3492-9



9 787560 334929 >

上架建议: 初等数论

定价 28.00 元

策划编辑 刘培杰
张永芹
责任编辑 尹凡
封面设计 孙茵艾



数论经典著作系列

Elementary Number Theory (III)
初等数论 (III)

● 陈景润 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

数论是研究数的性质的一门学科。本书从科学实验的实际经验出发,分析了数论的发生、发展和应用,介绍了数论的初等方法。本书为《初等数论(II)》的后续,介绍了自然数的一些有趣的性质、数论中常见的数、平方剩余及其计算方法等数学方法。每章后有习题,并在书末附有全部习题解答。本书写得深入浅出,通俗易懂,可供广大青年及科技人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

初等数论.3/陈景润著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2012.2

ISBN 978 - 7 - 5603 - 3492 - 9

I. ①初… II. ①陈… III. ①初等数论
IV. ①O156.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 014348 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 尹 凡

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 17 字数 305 千字

版 次 2012 年 2 月第 1 版 2012 年 2 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 3492 - 9

定 价 28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010-06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010-07	38.00	75
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010-01	18.00	61

数学眼光透视	2008-01	38.00	24
数学思想领悟	2008-01	38.00	25
数学应用展观	2008-01	38.00	26
数学建模导引	2008-01	28.00	23
数学方法溯源	2008-01	38.00	27
数学史话览胜	2008-01	28.00	28

从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011-08	138.00	136
从比勃巴赫到德·布朗斯	即将出版		

数学解题中的物理方法	2011-06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011-06	48.00	115
中学数学计算技巧	2012-01	48.00	116
中学数学证明方法	2012-01	58.00	117
数学趣题巧解	2012-03	28.00	128

数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006-05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008-01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008-07	58.00	36
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010-01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011-08	58.00	87



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2012-01	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅰ)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅱ)	2011-01	28.00	78
世界著名初等数论经典著作钩沉(理论和实用算术卷)	2011-07	38.00	126
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011-07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的五心	2009-06	28.00	51
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00	55
俄罗斯平面几何5000题	2011-03	58.00	89
计算方法与几何证题	2011-06	28.00	129
463个俄罗斯几何老问题	2012-01	28.00	152
近代欧氏几何学	2012-2	38.00	162



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
超越吉米多维奇——数列的极限	2009-11	48.00	58
初等数论难题集(第一卷)	2009-05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011-02	128.00	82,83
谈谈素数	2011-03	18.00	91
平方和	2011-03	18.00	92
数论概貌	2011-03	18.00	93
代数数论	2011-03	48.00	94
初等数论的知识与问题	2011-02	28.00	95
超越数论基础	2011-03	28.00	96
数论初等教程	2011-03	28.00	97
数论基础	2011-03	18.00	98
数论入门	2011-03	38.00	99
解析数论引论	2011-03	48.00	100
基础数论	2011-03	28.00	101
超越数	2011-03	18.00	109
三角和方法	2011-03	18.00	112
谈谈不定方程	2011-05	28.00	119
整数论	2011-05	38.00	120
初等数论 100 例	2011-05	18.00	122
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题(上、下)	2012-01	138.00	144,145
算术探索	2011-12	158.00	148
初等数论(Ⅰ)	2012-01	18.00	156
初等数论(Ⅱ)	2012-01	18.00	157
初等数论(Ⅲ)	2012-01	28.00	158
组合数学浅谈	2012-02	18.00	159
同余理论	2012-02	38.00	163



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006—05	58.00	5
历届 CMO 试题集	2008—09	28.00	40
历届国际大学生数学竞赛试题集(1994—2010)	2012—01	28.00	143
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007—03	28.00	15
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009—03	88.00	43
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(上)	2012—03	28.00	169
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(下)	2012—03	38.00	170
整函数	2012—1		161
俄罗斯函数问题集	2011—03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011—01	48.00	79
博弈论精粹	2008—03	58.00	30
多项式和无理数	2008—01	68.00	22
模糊数据统计学	2008—03	48.00	31
受控理论与解析不等式	2012—03		165
解析不等式新论	2009—06	68.00	48
反问题的计算方法及应用	2011—11	28.00	147
建立不等式的方法	2011—03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009—08	68.00	56
不等式研究(第二辑)	2012—02	68.00	153
初等数学研究(Ⅰ)	2008—09	68.00	37
初等数学研究(Ⅱ)(上、下)	2009—05	118.00	46,47
中国初等数学研究 2009 卷(第 1 辑)	2009—05	20.00	45
中国初等数学研究 2010 卷(第 2 辑)	2010—05	30.00	68
中国初等数学研究 2011 卷(第 3 辑)	2011—07	60.00	127
数阵及其应用	2012—02	28.00	164
不等式的秘密(第一卷)	2012—02	28.00	154
初等不等式的证明方法	2010—06	38.00	123
数学奥林匹克不等式散论	2010—06	38.00	124
数学奥林匹克不等式欣赏	2011—09	38.00	138
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010—01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上、下)	2011—08	158.00	134,135



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
500 个最新世界著名数学智力趣题	2008-06	48.00	3
400 个最新世界著名数学最值问题	2008-09	48.00	36
500 个世界著名数学征解问题	2009-06	48.00	52
400 个中国最佳初等数学征解老问题	2010-01	48.00	60
500 个俄罗斯数学经典老题	2011-01	28.00	81

数学 我爱你	2008-01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60 位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00	39
数学史概论	2009-06	78.00	50
斐波那契数列	2010-02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010-07	38.00	72
斐波那契数列欣赏	2011-01	28.00	160
数学的创造	2011-02	48.00	85
数学中的美	2011-02	38.00	84

最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009-02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009-08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007-04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009-08	28.00	54
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010-01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010-01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011-03	68.00	118
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010-01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011-07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011-07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011-07	38.00	133
2011 年全国及各省市高考数学试题审题要津与解法研究	2011-10	48.00	139
新课标高考数学——五年试题分章详解(2007~2011)(上、下)	2011-10	78.00	140,141
30 分钟拿下高考数学选择题、填空题	2012-01	48.00	146
高考数学压轴题解题诀窍(上)	2012-02	78.00	166
高考数学压轴题解题诀窍(下)	2012-03	28.00	167
300 个日本高考数学题	2012-03		142



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00	13
统计学专业英语	2007-03	28.00	16

方程式论	2011-03	38.00	105
初级方程式论	2011-03	28.00	106
Galois 理论	2011-03	18.00	107
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011-03	28.00	108
线性偏微分方程讲义	2011-03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011-03	28.00	111
代数方程式论	2011-05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011-07	48.00	137
基于短语评价的翻译知识获取	2012-02	48.00	168

闵嗣鹤文集	2011-03	98.00	102
吴从斡数学活动三十年(1951~1980)	2010-07	99.00	32

吴振奎高等数学解题真经(概率统计卷)	2012-01	38.00	149
吴振奎高等数学解题真经(微积分卷)	2012-01	68.00	150
吴振奎高等数学解题真经(线性代数卷)	2012-01	58.00	151
钱昌本教你快乐学数学(上)	2011-12	48.00	155

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

网 址:<http://lpj.hit.edu.cn/>

邮 编:150006

联系电话:0451-86281378 13904613167

E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn

第9章 自然数的一些有趣的性质 //1

9.1 奇妙的平方数 //1

9.2 有趣的减法 //6

9.3 用归纳法解题 //13

9.4 前 n 个自然数的方幂和 //16

习题 //19

第10章 数论中常见的数 //20

10.1 伯努利数 //20

10.2 斐波那契数列 //23

10.3 不足数,过剩数与完全数 //31

10.4 等幂和公式的研究 //32

习题 //52

第 11 章 平方剩余 //54

- 11.1 平方剩余的概念 //54
- 11.2 以素数为模的平方剩余 //57
- 11.3 勒让德符号 //61
- 11.4 互反定律 //62
- 11.5 雅可比符号 //68
- 习题 //73

第 12 章 平方剩余的计算方法 //75

- 12.1 素数模的情形 //75
- 12.2 以 2^α 为模的情形 ($\alpha \geq 1$) //88
- 12.3 以任意正整数为模的情形 //92
- 习题 //94

第 13 章 原根与指数 //95

- 13.1 原根(素数模的情形) //95
- 13.2 原根(奇素数幂的情形) //101
- 13.3 原根(模为 $2^k p^l, p \geq 3$ 的情形) //106
- 13.4 原根(其他情形的讨论) //107
- 13.5 指数 //109
- 13.6 原根及指数的其他应用 //113
- 习题 //119

第 14 章 表正整数为平方和及华林问题介绍 //122

- 14.1 素数表为平方和 //122
- 14.2 正整数表为两个平方和 //124
- 14.3 拉格朗日的四平方定理 //126
- 14.4 华林问题简介 //128
- 14.5 带正负号的华林问题 //132
- 习题 //140

第 15 章 容斥原理及应用 //144

15.1 集合的基本知识 //144

15.2 容斥原理 //146

15.3 容斥原理的应用 //147

习题 //156

习题解答 //159

编辑手记 //247

自然数的一些有趣的性质

第 9 章

9.1 奇妙的平方数

在这一节里,我们要讨论自然数的一个有趣的性质,简单的计算给出下面两个结果

$$12^2 = 144, 21^2 = 441$$

我们发现这两组数 12, 21 及 144, 441 有一个有趣的性质: 将 12 改为从右向左记数恰好得到 21, 将 144 改为从右向左记数恰好得到 441, 即当将 12 这个数从右向左记成 21 时, $12^2 = 144$ 也恰好被从右向左记数改变成 $21^2 = 441$. 再试下去, 我们发现下面几组数也有同样的性质

$$13^2 = 169, 31^2 = 961$$

$$11^2 = 121, 11^2 = 121$$

$$22^2 = 484, 22^2 = 484$$

于是有人会猜想数 33, 44 等等也有同样的性质. 但是计算表明这种猜想是错误的, 因为 $33^2 = 1\ 089$, 而 $1\ 089 \neq 9\ 081$; 又 $44^2 = 1\ 936$, 而 $1\ 936 \neq 6\ 391$. 那么, 在二位数中还有没有其他的数具有上述性质呢? 我们的回答是没有, 后面我们要对这个结论给出详细的证明.

通过计算, 我们发现下面各组三位数也具有上面所说的性质:

$$102^2 = 10\ 404, 201^2 = 40\ 401$$

$$103^2 = 10\ 609, 301^2 = 90\ 601$$

$$112^2 = 12\ 544, 211^2 = 44\ 521$$

$$113^2 = 12\ 769, 311^2 = 96\ 721$$

$$122^2 = 14\ 884, 221^2 = 48\ 841$$

$$101^2 = 10\ 201, 101^2 = 10\ 201$$

$$111^2 = 12\ 321, 111^2 = 12\ 321$$

$$202^2 = 40\ 804, 202^2 = 40\ 804$$

$$121^2 = 14\ 641, 121^2 = 14\ 641$$

$$212^2 = 44\ 944, 212^2 = 44\ 944$$

那么,在三位数中还有没有其他的数具有这一性质呢? 我们的回答是没有. 后面我们也要对这个结论给出详细的证明.

现在先讨论二位数的情形. 我们用 $(xy)_{10}$ 表示一个二位数, 其个位数字为 y , 十位数字为 x . 为了使将 $(xy)_{10}$ 通过从右向左记数得到的数 $(yx)_{10}$ 仍是一个二位数, 必须使 $x \neq 0, y \neq 0$. 于是 $1 \leq x \leq 9, 1 \leq y \leq 9$.

若 $x = 1$, 就有

$$(1y)_{10}^2 = (10 + y)^2 = 100 + 20y + y^2$$

$$(y1)_{10}^2 = (10y + 1)^2 = 100y^2 + 20y + 1$$

如果 $y \geq 4$, 我们就有 $(y1)_{10}^2 > 100y^2 \geq 1\ 600$, 即 $(y1)_{10}^2$ 至少是一个四位数, 但是 $(1y)_{10}^2 \leq (19)^2 < 400$, 因而为使二位数 $(1y)_{10}$ 具有所要求的性质, 必须 $1 \leq y \leq 3$, 即当 $x = 1$ 时, 具有所述性质的二位数只能从 11, 12, 13 中寻找, 由计算知道, 这三个二位数都具有所要求的性质.

若 $x = 2$, 就有

$$(2y)_{10}^2 = (20 + y)^2 = 400 + 40y + y^2$$

$$(y2)_{10}^2 = (10y + 2)^2 = 100y^2 + 40y + 4$$

于是 $(y2)_{10}^2$ 的个位数为 4, 而当 $y \geq 3$ 时则有

$$520 = 400 + 120 < (2y)_{10}^2 < 30^2 = 900$$

于是当 $y \geq 3$ 时, $(2y)_{10}^2$ 是一个百位数字至少为 5 的三位数, 因而必须 $1 \leq y \leq 2$. 即当 $x = 2$ 时, 只有 21 与 22 这两个二位数可能具有要求的性质, 计算表明这两个数确有所述之性质.

若 $x = 3$, 则有

$$(3y)_{10}^2 = (30 + y)^2 = 900 + 60y + y^2$$

$$(y3)_{10}^2 = (10y + 3)^2 = 100y^2 + 60y + 9$$

如果 $y \geq 2$, 则有

$$1\ 000 < 900 + 120 < (3y)_{10}^2 < 40^2 = 1\ 600$$

即 $(3y)_{10}^2$ 是一个千位数为1的四位数,而 $(y3)_{10}^2$ 的个位数为9,因此只可能 $y = 1$,即当 $x = 3$ 时,只有31这个二位数才可能有所述性质,验算知31确有所要求之性质.

若 $x = 4$,则有

$$(4y)_{10}^2 = (40 + y)^2 = 1\,600 + 80y + y^2$$

$$(y4)_{10}^2 = (10y + 4)^2 = 100y^2 + 80y + 16$$

于是 $(y4)_{10}^2$ 的个位数为6,由于

$$1\,600 < 41^2 \leq (4y)_{10}^2 < 50^2 = 2\,500$$

因此 $(4y)_{10}^2$ 是一个四位数,其最高数字只可能为1或2,因而无论 y 是个什么样的一位数, $(4y)_{10}^2$ 的最高位数字都不可能与 $(y4)_{10}^2$ 的个位数字相同,即这种二位数不可能具有所述之性质.

若 $x = 5$,则有

$$(5y)_{10}^2 = (50 + y)^2 = 2\,500 + 100y + y^2$$

$$(y5)_{10}^2 = (10y + 5)^2 = 100y^2 + 100y + 25$$

于是 $(y5)_{10}^2$ 的个位数为5,但是

$$2\,500 = 50^2 < (5y)_{10}^2 < 60^2 = 3\,600$$

于是 $(5y)_{10}^2$ 是一个最高位数字为2或3的四位数,因此不论 y 取怎么样的一位数,二位数 $(5y)_{10}$ 都不可能有所要求的性质.

若 $x = 6$,则有

$$(6y)_{10}^2 = (60 + y)^2 = 3\,600 + 120y + y^2$$

$$(y6)_{10}^2 = (10y + 6)^2 = 100y^2 + 120y + 36$$

于是 $(y6)_{10}^2$ 的个位数为6,但是

$$3\,600 = 60^2 < (6y)_{10}^2 < 70^2 = 4\,900$$

因而 $(6y)_{10}^2$ 是一个最高位数为3或4的四位数,而不可能以6为最高位数,因而这种二位数也一定不具有所要求的性质.

若 $x = 7$,则有

$$(7y)_{10}^2 = (70 + y)^2 = 4\,900 + 140y + y^2$$

$$(y7)_{10}^2 = (10y + 7)^2 = 100y^2 + 140y + 49$$

于是 $(y7)_{10}^2$ 的个位数为9,但是

$$4\,900 = 70^2 < (7y)_{10}^2 < 80^2 = 6\,400$$

即 $(7y)_{10}^2$ 是一个四位数且最高位数不超过6,因而无论 y 取怎么样的一位数,二位数 $(7y)_{10}$ 都不可能具有所要求的性质.

若 $x = 8$,则 $(y8)_{10}^2$ 的个位数为4,又由

$$6\,400 = 80^2 < (8y)_{10}^2 < 90^2 = 8\,100$$

知, $(8y)_{10}^2$ 是一个最高位数只能为 6, 7 或 8 的四位数, 因而此种二位数也必不能具有所要求的性质.

若 $x = 9$, 则 $(y9)_{10}^2$ 的个位数为 1, 但由

$$8\ 100 = 90^2 < (9y)_{10}^2 \leq 99^2 = 9\ 801$$

知, $(9y)_{10}^2$ 是一个四位数, 其最高位数不可能为 1, 因此这种二位数必不可能具有所要求的性质.

综上所述, 我们就证明了: 所有二位数中, 具有所述性质的二位数只有 11, 12, 13, 21, 22, 31 这六个数.

对于三位数, 可以用类似的方法加以讨论. 下面用 $(xyz)_{10}$ 表示一个三位数, x, y 及 z 各表示其百位、十位及个位数字, 为了使这三位数具有所要求之性质, 必须要求

$$1 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 9, 1 \leq z \leq 9$$

若 $x = 1$, 则有

$$(1yz)_{10}^2 = (100 + 10y + z)^2 =$$

$$10\ 000 + 100y^2 + z^2 + 2\ 000y + 200z + 20yz$$

$$(zy1)_{10}^2 = (100z + 10y + 1)^2 =$$

$$10\ 000z^2 + 100y^2 + 1 + 2\ 000yz + 200z + 20y$$

于是 $(zy1)_{10}^2$ 的个位数字为 1. 由于 $(1yz)_{10}^2 > 100^2 = 10\ 000$ 且 $(1yz)_{10}^2 \leq 199^2 = 39\ 601$, 故 $(1yz)_{10}^2$ 是一个五位数. 对 $0 \leq y \leq 3$ 有 $(1yz)_{10}^2 \leq 139^2 = 19\ 321$, 对 $y \geq 5$ 有 $(1yz)_{10}^2 > 150^2 = 22\ 500$, 而 $y = 4$ 时, 对 $z = 1$ 有 $(1yz)_{10}^2 = 141^2 = 19\ 881$, 对 $2 \leq z \leq 9$ 有 $(1yz)_{10}^2 \geq 142^2 = 20\ 164$ 以及 $(1yz)_{10}^2 \leq 149^2 = 22\ 201$, 因此必须

$$0 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 9 \text{ 或者 } y = 4, z = 1$$

又对 $z \geq 4$ 有 $(zy1)_{10}^2 \geq 401^2 = 160\ 801$, 这是一个六位数, 而 $(1yz)_{10}^2 < 200^2 = 40\ 000$, 这是一个五位数, 因此必须要求

$$0 \leq y \leq 3 \text{ 且 } 1 \leq z \leq 3$$

或者

$$y = 4 \text{ 且 } z = 1$$

又对 $y = 3$ 我们有

$$(1yz)_{10}^2 = (13z)_{10}^2 = 16\ 900 + z^2 + 260z$$

$$(zy1)_{10}^2 = (z31)_{10}^2 = 960 + 10\ 000z^2 + 6\ 200z$$

当 $z = 3$ 时, $(13z)_{10}^2$ 的个位数为 9, 而 $(zy1)_{10}^2$ 的最高位数为 1, 这不符合要求, 因而必须

$$0 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 3$$

或者 $y = 3, 1 \leq z \leq 2$, 或者 $y = 4, z = 1$.