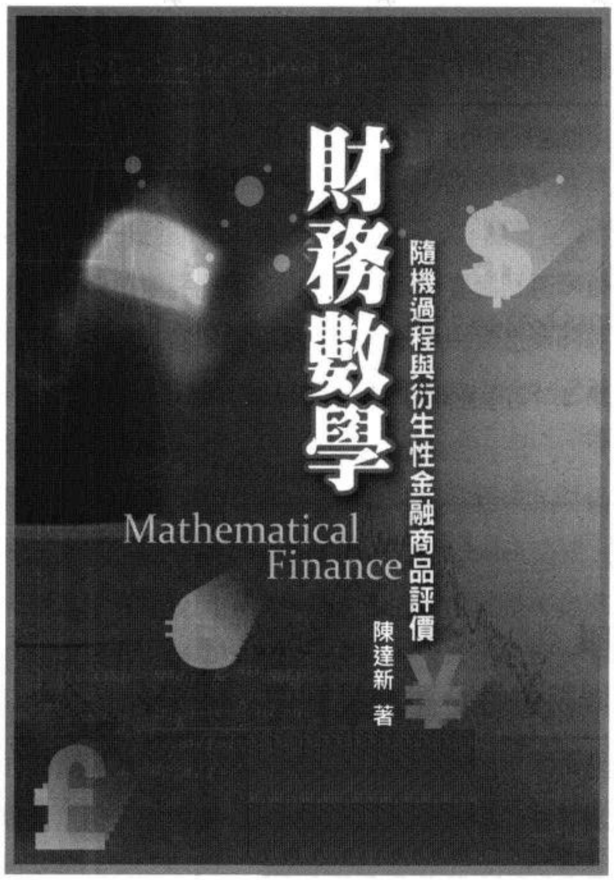
財務數學

隨機過程與衍生性金融商品評價

Mathematical Finance

陳達新 著



財務數學

隨機過程與衍生性金融商品評價

Mathematical Finance

陳達新 著

雙葉書廊 YEH YEH BOOK GALLERY

延・伸・知・識・邊・界　http://www.yehyeh.com.tw

國家圖書館出版品預行編目資料

財務數學：隨機過程與衍生性金融商品評價 /
陳達新作. -- 初版. -- 臺北市：雙葉書廊,
2010. 01
面； 公分
含參考書目
ISBN 978-986-6672-50-7（平裝）

1.商業數學 2. 衍生性商品 3. 選擇權
4.金融理論
493.1 98022457

財務數學

隨機過程與衍生性金融商品評價

作　　者 陳達新
發 行 人 張福隆
執行編輯 劉秋圓
出 版 社 雙葉書廊有限公司
地　　址 台北市羅斯福路三段 269 巷 12 號 1 樓
電　　話 (02)2368-4198
傳　　真 (02)2365-7990
網　　頁 http://www.yehyeh.com.tw
讀者服務 reader@yehyeh.d2g.com
登 記 證 局版北市業字第 239 號
出版日期 西元 2010 年 1 月 初版一刷

ISBN：978-986-6672-50-7

自序

自研究生時代開始，我就對選擇權評價理論的發展十分著迷，當時就決定要徹底的了解這個嚴謹、優雅的 Black & Scholes 公式。隨著在學校進修與教學、研究，我愈來愈覺得選擇權評價理論的概念幾乎影響到財務學術理論與金融實務交易的每一個層面。實質選擇權的觀念更可以應用到企業的經營應用上，其所衍生出來的財務工程學（或稱計量財務學），也成為當今結合社會科學與自然科學的顯學，重要性與日俱增。

另外，雖然有關「期貨與選擇權」的相關課程已經成為財金相關科系的重要課程，但對於選擇權評價理論中最要的 Black & Scholes 公式，其背後推導與發展的過程卻大多無法詳加說明。其中最主要的理由就是，推導衍生性金融商品的評價時，必須運用許多數學與電腦工具，而這些工具對大多數商學院學生而言都太艱澀了。然而，在多年的教學經驗中，我發現眾多學子對挑戰進階衍生性商品評價的渴望，若以「你們以後就知道了」或是「數學程度不夠」來搪塞學生，因此省略這麼一個重要公式的推導與背後隱含的數學意涵，根本不能滿足學生強烈的求知慾。

綜觀目前關於「期貨與選擇權」的中、英文眾多經典著作，對於衍生性金融商品評價所需要的財務數學部分著墨較少，主要強調商品介紹、交易策略與制度方面；而專門的財務數學專書多為數學學者所著，寫法較為艱深，充滿數學數字、原則、定律、證明，尤以英文寫作為多。因而對於產業界人士或青衿學子在學習上有諸多窒礙，學習效果與興趣大打折扣，無法一窺衍生性商品評價的堂奧；甚至很多人以為衍生性金融商品評價只有「火箭科學家」或是數理專業科系的學生才有機會與能力了解。

因此，在「學術在地化與普級化」的風潮之下，遂讓我有了撰寫本書的動機，希望儘量以最淺顯簡明的文字，能讓僅有簡單統計與數學訓練背景的學生與社會人士，都能了解與衍生性評價有關的統計與數學知識，例如：動差母函數、特徵方程式、隨機過程、對數常態分配、布朗運動、幾何布朗運動、伊藤

定理、隨機偏微分方程、風險中立評價等；在評價方法上，也會推導出多種選擇權的評價公式與列出電腦程式。

本書撰寫時設定的主要讀者群為大專院校相關科系的大學部高年級與研究所學生，亦適用於欲研究、進修、考證照（證券投資分析、期貨分析、風險管理、精算人員）之人士。本書最適合當作單獨開課的財務數學教科書，為一學期授課之用；也可以搭配其他財務課程一起使用。藉由本書，讀者對於衍生性商品評價的財務數學將有深入的了解，並能掌握進入財務工程領域所需要的數學知識，為探索更進階的「財務程式設計」與「財務數值方法」奠定堅強的基礎。

本書能順利完成與出版，首先感謝家人的全力支持。兩年多寫作過程中，伴隨我的幾乎都是孩童的嘻笑聲與沉睡的呼吸聲。家人的包容與鼓勵，使得本書的撰寫過程中充滿幸福的滋味，也是支持我繼續完成此書的最大原動力。雙葉書廊出版部協助排版與校對事宜，過去淡江財金所學生張力文提供程式諮詢，淡江大學統計系吳碩傑教授對於統計部分的指正，在此都一併申謝。

另外，對於台灣大學財金系第一屆（民國 74 年入學）我的大學同學們而言，在畢業 20 多年之後，眾人一定想不到我會寫一本有關數學的書。當時大一微積分全班只有一人及格的慘烈經驗，如今也成為大家最鮮明的椰林大道學習回憶與話題。大一微積分被當的教訓，也讓我體認到老師的教材與教法在鼓動學生學習興趣時的重要性，這也是撰寫本書時我無時無刻銘記在心的圭臬。

國內有關於此領域的專家學者很多，在此班門弄斧，內心實在很惶恐。尤其是目前的學術環境只鼓勵學術論文的撰寫，寫作學術專書的辛勞與努力跟之後的回報簡直不成正比，不過還是希望能以此書引磚拋玉，讓更多人加入寫作行列以造福台灣學子。本書內容若有不足或謬誤之處，尚祈學者專家不吝指正，以便讓本人有學習成長的機會，並能在再版時加以改進。

陳達新　謹識

2010 年 1 月

目錄

Box 目錄

1 Chapter

基礎數學與泰勒展開式

學習目標

- 對數函數與指數函數
- 微分與積分的基本觀念與公式
- 對數的微分與積分
- 指數的微分與積分
- 馬克勞林展開式與泰勒展開式
- 債券的存續期間與凸性

美國哥倫比亞大學財務工程學程主任德爾曼（Emanuel Derman）在 2004 年出版的著作中提到：「在股票產業裡，個人所擁有的聰明才智不算是個競爭優勢。」乍看之下，這小段話雖令人困惑，但是細讀之下卻頗有道理。主要的理由是，在股票操作世界，對股票的長期投資或是基本、內線分析的重視，一直都是成功獲利顛撲不破的要件；當然，有時得再加上一點直覺與運氣。不過可惜的是，股票真正的內在價值（Intrinsic Value）無法精確算出。雖然很多股票評價理論先後提出，但是實際應用都有很大的限制，短期內財務套利法則也無法適用在股市投資中，因此高深的數學技巧不太能幫得上忙。

可是，在固定收益證券與衍生性商品投資世界中，卻正是計量金融（Quantitative Finance）專家大展身手的領域。因為固定收益證券與衍生性商品的評價理論都很嚴謹，所算出來的數字如果跟市場的實際觀察價格差異太大，馬上就會產生套利機會。如今，這些計量金融的技巧也逐漸延伸到資產配置、統計套利、程式交易等財務新興領域中。❶

因此，堅強的統計與數理基礎是計量金融的基礎，也才能符合未來財務金融界的潮流。近年來，財務學界及實務界大量借用數學的技巧和物理學的基本模型與演算法，並因為複雜的模型與大量的資料處理需求，對電腦運算處理愈趨依賴，也因此向數學、物理學或其他理工電腦科系取才的現象日益明顯。在華爾街與全球其他金融重鎮，由前物理學家與數學家所加入的投資銀行與避險基金公司，將物理與數學等專業知識運用到證券市場上，而這些技巧在傳統的投資分析中是前所未聞的。這些從事金融工程研究的人員多是由統計學家、數學家、物理學家、電腦專家等來擔任，他們被稱為「火箭科學家」，因為大家都認為火箭科學是最先進的科技。的確，在衍生性金融商品的評價中，持續追蹤標的物價格的變化與衍生性金融商品本身價格的相對關係，以創造無風險投

---

❶ 計量財務學，有人習慣稱為財務工程（Financial Engineering），這兩個術語在本書不做嚴格的區分，兩者互相交互使用。

資組合，感覺上與防空飛彈追擊目標物，必須隨時根據目標的運動變化，修正自身噴射軌道以順利擊中目標，是一樣的思考概念。這其中最基本的知識，就是稍後幾章所要探索的隨機過程、連續時間財務學與伊藤定理（Ito's Lemma）的觀念。

財務數學的理論核心可說直到 1973 年才出現。1973 年，學者布雷克(Fisher Black）與舒茲（Myron Scholes）發表了著名的 Black & Scholes 選擇權評價公式，連同交易避險策略、或有求償權（Contingent Claim）的價值所遵循的偏微分方程式（Partial Differential Equation ），可謂財務數學的濫觴。之後，在短短的幾年間，財金計量發展出一支影響廣泛的應用數學，也已成熟得可以成為一個專業的獨立領域。

金融投資是現代社會最活躍的經濟活動，自 Black & Scholes 公式出現以來，金融界以前所未有的速度接受數學模型和數學工具，於是出現了數學、金融、電腦和全球經濟的融合。在金融數學自身的吸引力和眾多使用者需求的雙重影響下，頂尖的美國大學紛紛開設了相應的課程，我國大學也紛紛設立財金計量專業系所，本書正是順應這種趨勢而撰寫。

不過，在討論到這些嚴格而完整的數理模型，並開始推導衍生性商品的定價理論之前，我們必須先學習一些基本的數學與統計，還有財務學的一些重要觀念，這也就是本書第一章的目的。第一節首先討論對數（Logarithms）與指數（Exponentials）函數的定義，這兩個觀念對衍生性金融商品的評價是非常重要的；第二節幫助讀者回憶一些微積分的基本定理；第三節討論馬克勞林展開式與泰勒展開式，兩者常常使用於財務資產的價格變動估計上；本章最後一節則說明泰勒展開式在非線性財務資產評價的應用，例如運用在債券評價上。

1.1 對數函數與指數函數

對數函數（方程式）與指數函數具有一些特殊的性質，在生活周遭與自然界中有許多呈指數成長或衰退的現象都具有這些特性，如人口成長、細胞分裂、放射性元素衰變、藥物代謝等。在財務領域方面，則是應用到連續複利、資產報酬率計算。

1.1.1 對數函數

對數的發展可追溯到 16 世紀末至 17 世紀初。當時，自然科學領域（特別是天文物理學與航海學）經常遇到大量精密而又龐大的數值計算，於是在當時無計算機的年代，數學家為了尋求化簡的計算方法而發明了對數。❷

對數函數可以被定義為：

$$b^L = x \tag{1.1}$$

則我們可以稱 L 為「以 b 為底數對 x 取對數（logarithm of x to the base b）」；以另外一種常見方式來表達則為：

$$L = \log_b(x) \tag{1.2}$$

只要 b 與 x 為正值，則 L 一定為一個特定的實數；此時，L 就是以 b 為底數的對數函數。以下整理對數函數幾個重要的性質。

假設 a,b,c 均為不為 1 的正實數，$M>0$，$N>0$，$r,s \in R$，則：

1. $\log_a 1 = 0$，$\log_a a = 1$，$\log_{a^r} a^s = \dfrac{s}{r}$
2. $\log_a MN = \log_a M \cdot \log_a N$

❷ 對數的發明者是蘇格蘭的業餘數學家 John Napier（1550-1617）。John Napier 認為，若每個數能寫成 a^m 的形式，則 a^m、a^n 兩數相乘就等於兩指數相加：$a^m \times a^n = a^{m+n}$，如此就把相乘的問題轉成相加的問題，計算便能簡化許多，他並完成了史上第一張對數表。

3. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

4. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

5. $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

6. $\log_{a^r} M^s = \frac{s}{r} \log_a M$

7. $a^{(\log_a M)} = M$ ，$\log_a(a^M) = M$

當（1.1）式的$b = e \approx 2.7182818...$時，則為財務界較常使用的對數函數。小寫 e 代表的是自然數，又稱為**尤拉數**（Euler's Number），是數學中除了圓周率 π 之外另一個非常著名的無理數。此時，（1.2）式的函數就產生**自然對數**（Natural Logarithm）函數，可以表達為 $\log_e(x)$，也就是以自然數為底的對數，就稱為自然對數；不過，自然對數的表達卻是以 $\ln(x)$ 的表達方式最為常見，例如 $\ln(2.125) = 0.7537718$。[3] 圖 1.1 描繪對 x 取自然對數的圖形；注意，自然對數 $\ln(x)$ 只有在 x 為正值時才有定義，而且 $\ln(1) = 0$ ，$\ln(e) = 1$ 。

以 e 為底的自然對數為運算帶來許多便利（可以透過稍後的微積分來解釋），對本書也相對比較重要。在財務數學中，自然對數有許多有趣的應用，其中之一就是簡單（間斷）報酬率與連續複利報酬率之間的轉換。假設 R 是簡單報酬率，而我們只要對 $(1+R)$ 取自然對數，就可以轉換成連續複利報酬率；也就是 $x = \ln(1+R)$ 為一個連續複利報酬率（見 Box 1.1 的說明）。連續複利報酬率對財務資產定價理論的應用十分重要，因為很多財務理論模型的推導都是假設股票的連續複利報酬率呈常態分配。不過當 R 很小時，$\ln(1+R)$ 會非常接近 R，也就是 R 跟 x 此時差異不大。

[3] e 的發現始於微分。計算 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 或是 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 之值，其結果會無窮逼近 2.71828...，這個無窮的數值就是 e。最早發現此值的人是瑞士著名數學家尤拉，他以自己姓名的字頭小寫 e 來命名此無理數。

Box 1.1 間斷複利與連續複利的轉換關係

假設銀行帳戶計息方式不同，其中一個帳戶如果採以間斷複利計息，每年計息一次，期末一年之後本利和的計算方式為：

$$FV = PV(1+R)$$

FV 為期末本利和，PV 為期初本金，R 為間斷複利的年利率。

另外一個帳戶則是採用連續複利計息，但是這兩個帳戶期初投入的本金相同，最後的本利和也都相同。連續複利帳戶的期末本利和之計算方式為：

$$FV = PV \times e^x$$

FV 為期末本利和，PV 為期初本金，x 為連續複利年利率。

兩邊同時取自然對數：

$$\ln(FV) = \ln(PV) + \ln(e^x)$$

$$\ln(FV) - \ln(PV) = x$$

因此，期末與期初金額取自然對數再相減，得到的 x 就是持有期間（此例剛好是一年）的連續複利報酬利率：

$$\ln(\frac{FV}{PV}) = x \text{，} \ln[\frac{PV(1+R)}{PV}] = x$$

所以 $\ln(1+R) = x$ 。

對數函數最重要的運算性質就是，兩個正數相乘取對數等於兩個對數相加：$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$ ，當 $x, y > 0$；稍後幾章會使用到這個性質。同理，稍加轉換一下也可得知：$\ln(x \div y) = \ln(x) - \ln(y)$ ，當 $x, y > 0$ 。