全国硕士研究生入学统一考试

最新版

数学真题名师解析

（数学二）

◎编著 潘 鑫
季振东

国家行政学院出版社

全国硕士研究生入学统一考试

最新版

数学真题名师解析

（数学二）

◎编著 潘鑫
季振东

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学真题名师解析.数学.2/潘鑫,季振东编.—北京:
国家行政学院出版社,2012.5
ISBN 978-7-5150-0347-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①潘… ②季… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 099137 号

敬告读者

本书封面贴有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,请读者注意识别。

书　　名	数学真题名师解析(数学二)
主　　编	潘鑫　季振东
责任编辑	姚敏华
出版发行	国家行政学院出版社
	(北京市海淀区长春桥路 6 号　100089)
电　　话	(010)68920640　68929037
编 辑 部	(010)68928761　68929009
网　　址	http://cbs.nsa.gov.cn
经　　销	新华书店
印　　刷	保定市中画美凯印刷有限公司
版　　次	2012 年 5 月第 1 版
印　　次	2012 年 5 月第 1 次印刷
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	15
字　　数	250 千字
书　　号	ISBN 978-7-5150-0347-4/O・012
定　　价	38.00 元

前 言

自87年全国硕士研究生数学入学实行统一考试以来，至今已命制了数千道试题。这些试题是命题专家智慧和劳动的结晶，它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》要求下的命题思想，是广大考生了解、分析、研究全国硕士研究生数学入学考试最直接、最宝贵的第一手资料，是考生最好的模拟题，考生如能把这些历年考题全部消化巩固将为考研成功打下坚实的基础。

本书不仅汇集了2000年-2012年数学二的历届研究生入学考试试题，同时真正做到了逐题分析、详解、评注。

【分析】 分析考点、思路、重点、方法，使考生不仅能学到这类题的具体求解方法，而且能学到如何分析求解这类题的能力，使考生不仅“知其然”而且能“知其所以然”；

【详解】 解题步骤清晰、解答详细规范、思路开阔、有些题还提供了多种解法，以便读者扩展分析思路、举一反三；

【评注】 点评所涉及到的知识点、可能延伸的考查情形，容易出现的错误或在考试中应注意问题等等。

可以说“分析透彻、解答详细、点评到位、指出错误”是本书特点，这种编著形式更有助于考生把握解题规律、扩展分析思路、提炼答题技巧，提高应试水平。我们深信考生深入学习、演练后，对在考研中取得数学高分必有极大帮助。

尽管抱着对广大考生认真负责的精神，高质量严要求，但难免有不尽人意之处，恳请广大读者朋友批评指正，以使本书不断完善。

作者

目 录

2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题及解析

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分．把答案填在题中横线上.）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$ ________ .

【分析】本题为未定式求极限，结合等价无穷小代换和洛必达法则进行计算即可.

【详解】

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{6x^2(1+x^2)}=-\frac{1}{6}$$

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $dy\big|_{x=0}=$ ________ .

【分析】本题考查隐函数微分法，可用微分形式不变性完成.

【详解】已知等式两端微分得

$$2^{xy}\ln 2(ydx+xdy)=dx+dy$$

由原方程知：$x=0$ 时，$y=1$，代入上式得

$$\ln 2dx=dx+dy\big|_{x=0}$$

从而 $dy\big|_{x=0}=(\ln 2-1)dx$.

评注：一般来说求隐函数在一点的导数或微分，应先将 $x=x_0$ 代入方程，确定出对应的 $y=y_0$ 后，再将点 (x_0,y_0) 的坐标代入所求导数或微分的表达式.

（3）$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}=$ ________ .

【分析】本题既是无界函数的反常积分又是无穷区间上的反常积分.

【详解】$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}\overset{\sqrt{x-2}=t}{=}\int_0^{+\infty}\frac{2dt}{9+t^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{2dt}{9+t^2}$

$$=\frac{2}{3}\lim_{b\to+\infty}\arctan\frac{t}{3}\Big|_0^b=\frac{\pi}{3}$$

评注：反常积分与定积分有一些相似的地方也有区别，它们都可以作变量代换和分部积分，但对反常积分作加减运算时，要十分小心，有时不成立.

（4）曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程____________.

【分析】考查渐近线的概念与求法．直接 代入公式计算系数.

【详解】由于 $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}=2$，

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-ax)=\lim_{x\to+\infty}((2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x)=\lim_{x\to+\infty}[2x(e^{\frac{1}{x}}-1)-e^{\frac{1}{x}}]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2x(e^{\frac{1}{x}}-1)-1=\lim_{x\to+\infty}2x\cdot\frac{1}{x}-1=1$$

同理　$a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}=2$，

$$b=\lim_{x\to-\infty}(y-ax)=\lim_{x\to-\infty}((2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x)=\lim_{x\to-\infty}[2x(e^{\frac{1}{x}}-1)-e^{\frac{1}{x}}]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}2x(e^{\frac{1}{x}}-1)-1=\lim_{x\to-\infty}2x\cdot\frac{1}{x}-1=1$$

综上，斜渐近线为 $y=2x+1$.

（5）设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$，$E$ 为四阶单位矩阵，且 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，则

$(E+B)^{-1}=$______.

【分析】本题考查矩阵的运算．已知矩阵等式求逆，总是先从已知等式中分解出左端含有待求逆的矩阵作为因子，而右端为单位矩阵的情况，这样相应的逆阵即可写出.

【详解】由 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，有 $(E+A)B=(E-A)$，即

$$AB+A+B+E=2E，\quad (A+E)(B+E)=2E，亦即\frac{1}{2}(A+E)(B+E)=E$$

故$(E+B)^{-1}=\frac{1}{2}(A+E)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}$

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分．每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，将所选项前的字母填在题后的括号内）

（1）设函数$f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数$a,b$满足

（A）$a<0,b<0$　（B）$a>0,b>0$　（C）$a\le 0,b>0$　（D）$a\ge 0,b<0$

【分析】根据$f(x)$的连续性和$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$确定系数.

【详解】由题设函数$f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，因此对任意的$x\in(-\infty,+\infty)$，有$a+e^{bx}\ne 0$，这只需要$a\ge 0$即可；另外$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$知，$\lim\limits_{x\to-\infty}(a+e^{bx})=\infty$，所以$b<0$.

故应选（D）

（2）设函数$f(x)$满足关系式$f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且$f'(0)=0$，则

（A）$f(0)$是$f(x)$的极大值

（B）$f(0)$是$f(x)$的极小值

（C）点$(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

（D）$f(0)$不是$f(x)$的极值，点$(0,f(0))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点.

【分析】由$f'(0)=0$知$x=0$是函数$f(x)$的一个驻点；由关系式知$f''(0)=0$，即$(0,f(0))$可能是拐点．如何判断？或者分别考察$f'(x),f''(x)$在$x=0$的左右两侧附近是否变号，这本题难以做到，于是求$f(x)$在$f(x)$的更高阶导数来讨论.

【详解】因为$f'(0)=0$，由原关系式$f''(x)+[f'(x)]^2=x$可知$f''(0)=0$，因此

$(0,f(0))$ 可能是拐点.

由 $f''(x)=x-[f'(x)]^2$ 知 $f(x)$ 存在三阶导数，且 $f'''(x)=1-2f'(x)f''(x)$. 可见 $f'''(0)=1$, 从而 $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，而点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 故应选（C）.

评注：如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有三阶连续导数，而 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$ ，但 $f'''(x_0)\neq 0$ 则 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，而点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（3）设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 是恒大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当 $a<x<b$ 时,有

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

【分析】本题既可以用单调性来推出结论，也可以利用定积分保号性定理得到结论.

【详解】法一：由于 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$ ，所以

$$(\frac{f(x)}{g(x)})'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}<0$$

从而函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $[a,b]$ 上单减，因此当 $a<x<b$ 时,有 $\frac{f(b)}{g(b)}<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{f(a)}{g(a)}$

因此应选（A）;

法二：由于 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$ ，所以 $\frac{f'(x)}{f(x)}<\frac{g'(x)}{g(x)}$ ，由积分保号性定理的可得：$a<x<b$ 时，$\int_a^x\frac{f'(x)}{f(x)}dx<\int_a^x\frac{g'(x)}{g(x)}dx$ ，　$\int_x^b\frac{f'(x)}{f(x)}dx<\int_x^b\frac{g'(x)}{g(x)}dx$ 即

$\frac{f(x)}{f(a)}<\frac{g(x)}{g(a)}$ ，　$\frac{f(b)}{f(x)}<\frac{g(b)}{g(x)}$.

因此应选（A）.

（4）若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$为

（A）0　　　　（B）6　　　　（C）36　　　　（D）∞

【分析】本题是已知某函数的极限，求另一相关函数的极限，基本方法有：无穷小量的等价代换、极限与无穷小的关系、洛必达法则和泰勒展开．其中用洛必达法则时，应注意分子分母求导以后的极限必须存在，本题$f(x)$未知是否可导，不能用洛必达法则．泰勒展开的阶数一般可由分母的幂次来确定，本题可将$\sin 6x$展开到三阶．

【详解】法一：由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，所以由极限和无穷小的关系可得

$$\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0+\alpha\text{，其中}\lim_{x\to 0}\alpha=0$$

从而 $$\frac{6+f(x)}{x^2}=\alpha+\frac{6}{x^2}-\frac{\sin 6x}{x^3}$$

因此$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}(\alpha+\frac{6}{x^2}-\frac{\sin 6x}{x^3})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}=36$$

法二：因为$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}[\frac{\sin 6x-6x}{x^3}+\frac{6+f(x)}{x^2}]$$

所以$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}=36$$

法三：因为$\sin 6x=6x-\dfrac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-36x^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{6+f(x)}{x^2}-36)$$

可见：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=36$

评注：**典型错误：**不考虑$f(x)$是否满足条件而使用洛比达法则，结果花费了不少时间还不能得出正确的结论．其次按如下方法做

因为$x\to 0$时，$\sin 6x\sim 6x$，从而

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=0$.

在这里用$6x$代换$\sin 6x$是错误的，因为利用等价无穷小代换求极限，所代换的部分要求是分子或分母中的乘积因式

（5）具有特解$y_1=e^{-x},y_2=2xe^{-x},y_3=3e^x$的3阶常系数齐次线性线性微分方程是

（A）$y'''-y''-y'+y=0$ （B）$y'''+y''-y'-y=0$

（C）$y'''-6y''+11y'-6y=0$ （D）$y'''-2y''-y'+2y=0$

【分析】本题考查特征根与通解的对应关系．利用已知特解导出微分方程通解，从而得到特征根，推出特征方程，进而写出微分方程.

【详解】因为特解$y_1=e^{-x},y_2=2xe^{-x},y_3=3e^x$，从而方程通解为

$$Y=(C_1+C_2x)e^{-x}+C_3e^x$$

从而对应特征方程的根为$\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=1$

于是特征方程为：$(\lambda-1)(\lambda+1)^2=0$，即$\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=0$

故所求微分方程为：$y'''+y''-y'-y=0$．所以应选（B）

评注：利用特解求微分方程，关键要掌握特征根与对应特解之间的关系，包括实单根、重根和复数根的情况下的对应特解的形式.

三、（本题满分5分）

设$f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，计算$\int f(x)dx$

【分析】本题关键是求出$f(x)$的表达式，然后根据被积函数的形式利用分部积分法得到答案.

【详解】由于$f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，令$\ln x=t$，则$f(t)=\frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$．从而

$$\int f(x)dx=\int\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx=-\int\ln(1+e^x)de^{-x}$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^{x})+\int\frac{dx}{1+e^{x}}=-e^{-x}\ln(1+e^{x})+\int\frac{1+e^{x}-e^{x}}{1+e^{x}}dx$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^{x})+x-\ln(1+e^{x})+C$$

四、（本题满分 5 分）

设 xoy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$ 及直线 $l:x+y=t(t\ge 0)$

若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，试求 $\int_0^x S(t)dt(x\ge 0)$.

【分析】考查建立函数关系式及分段函数定积分的计算．首先写出 $S(t)$ 的表达式，然后利用分段函数定积分的解法计算定积分．

【详解】根据题设有

$$S(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^{2},0\le t\le 1\\ -\frac{1}{2}t^{2}+2t-1,1<t\le 2\\ 1,t>2\end{cases}$$

可见，当 $0\le x\le 1$ 时，$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x \frac{1}{2}t^{2}dt=\frac{1}{6}x^{3}$；

当 $1<x\le 2$ 时，$\int_0^x S(t)dt=\int_0^1 \frac{1}{2}t^{2}dt+\int_1^x(-\frac{1}{2}t^{2}+2t-1)dt=-\frac{1}{6}x^{3}+x^{2}-x+\frac{1}{3}$；

当 $x>2$ 时，$\int_0^x S(t)dt=\int_0^2 S(t)dt+\int_2^x S(t)dt=x-1$.

因此 $\int_0^x S(t)dt=\begin{cases}\frac{1}{6}x^{3},0\le x\le 1\\ -\frac{1}{6}x^{3}+x^{2}-x+\frac{1}{3},1<x\le 2\\ x-1,x>2\end{cases}$.

评注：分段函数的定积分，应根据不同区间上函数的表达式，利用积分的可加性分段进行积分.

五、（本题满分 5 分）

求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n\ge 3)$.

【分析】 求函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的 n 阶导数，通常可考虑将函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 展开成泰勒公式，再通过比较系数得到所求．本题 $f(x)$ 是两个函数的乘积，且其中一个因式是 x^2，其三阶及三阶以上的导数都为零，因此也可通过莱布尼兹公式计算．

【详解】 法一：将 $f(x)$ 展开成麦克劳林公式（$x=0$ 处的泰勒展开式）

$$f(x)=x^2\ln(1+x)=x^2(x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n))$$

$$=(x^3-\frac{x^4}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n+2}}{n}+o(x^{n+2}))$$

从而 $f^{(n)}(0)=n![(-1)^{n-3}\frac{1}{n-2}]$.

法二：$f^{(n)}(x)=[x^2\ln(1+x)]^{(n)}$

$$=C_n^0[\ln(1+x)]^{(n)}\cdot x^2+C_n^1[\ln(1+x)]^{(n-1)}\cdot 2x+C_n^2[\ln(1+x)]^{(n-2)}\cdot 2$$

从而 $f^{(n)}(0)=2C_n^2[\ln(1+x)]^{(n-2)}\big|_{x=0}=2C_n^2\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}\big|_{x=0}=(-1)^{n-3}\frac{n!}{(n-2)}$

六、（本题满分 6 分）

设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|dt$,

（1）当 n 为正整数，且 $n\pi\le x<(n+1)\pi$ 时，证明 $2n\le S(x)<2(n+1)$;

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$

【分析】 本题的（1）是（2）的台阶.（1）的证明，主要利用被积函数 $|\cos x|$ 的周期性——每个周期上积分值相等；利用（1）的不等式和夹逼准则可求得（2）

【详解】（1）由于被积函数 $|\cos x|$ 总是大于等于零，从而当 n 为正整数，且

$n\pi \le x < (n+1)\pi$ 时，恒有 $\int_0^{n\pi} |\cos t| dt \le S(x) = \int_0^x |\cos t| dt < \int_0^{(n+1)\pi} |\cos t| dt$

而 $\int_0^{n\pi} |\cos t| dt = n\int_0^{\pi} |\cos t| dt = n[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos t dt] = 2n$

$\int_0^{(n+1)\pi} |\cos t| dt = (n+1)\int_0^{\pi} |\cos t| dt = (n+1)[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos t dt] = 2(n+1)$

所以 $2n \le S(x) < 2(n+1)$

（2）法一：由（1）可得 $n\pi \le x < (n+1)\pi$ 时

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{2n}{x} \le \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{x} \le \frac{2(n+1)}{n\pi}$$

从而由夹逼准则可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}$

法二：对充分大的 x，总存在自然数 n，使得 $x = n\pi + \alpha(x)$，其中 $0 \le \alpha(x) < \pi$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\int_0^{n\pi} |\cos t| dt + \int_{n\pi}^{n\pi+\alpha(x)} |\cos t| dt}{n\pi + \alpha(x)}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\int_0^{\pi} |\cos t| dt + \int_0^{\alpha(x)} |\cos t| dt}{n\pi + \alpha(x)} = \frac{2}{\pi}$$

七、（本题满分 7 分）

某湖泊的水量为 V，每年排入湖泊内的含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$，流入湖泊内不含 A 的水量为 $\frac{V}{6}$，流出湖泊的水量为 $\frac{V}{3}$．已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定指标，为了治理污染，从 2000 年初起，限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$．问至多需经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量才可降至 m_0 以内？（注：设湖水中 A 的浓度是均匀的）

【分析】 设 $m(t)$ 是 2000 年后第 t 年湖泊中污染物 A 的含量，此时浓度 $\frac{m}{V}$．在

$[t,t+dt]$ 内排入湖泊中的污染物 A 的量的近似值为 $\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}dt$，排出污染物 A 的量的近似值为 $\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}dt$，因此 $m(t)$ 增量的近似值为 $dm=(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})dt$，从而可转化为微分方程进行求解.

【详解】设从 2000 年初（$t=0$）开始，第 t 年湖泊中污染物 A 的含量为 $m(t)$，此时湖水含 A 物质的浓度为 $\frac{m}{V}$，则在时间间隔 $[t,t+dt]$ 内，排入湖泊水的污染物 A 的量的近似值为 $\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}dt=\frac{m_0}{6}dt$，流出湖泊的水中 A 的量的近似值为 $\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}dt=\frac{m}{3}dt$，因此 $m(t)$ 增量的线性主部——微分

$$dm=(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})dt$$

这是变量可分离的一阶微分方程，解得通解为 $m=\frac{m_0}{2}-Ce^{-\frac{t}{3}}$

代入初始条件 $m(0)=5m_0$，得 $C=-\frac{9}{2}m_0$. 于是 $m=\frac{m_0}{2}(1+9e^{-\frac{t}{3}})$.

令 $m=m_0$ 得 $t=6\ln 3$.

即至多需经过 $6\ln 3$ 年，湖泊中污染物 A 的含量才可降至 m_0 以内.

评注：建微分方程主要由两种方法：其一，根据问题所服从的规律（定理、定律、关系式或几何关系）建立方程；其二，通过微元法，即分析自变量的一个典型小区间上，未知函数增量的线性主部——微分，建立微分方程.

八、（本题满分 6 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)dx=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$ 试证：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2 使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

【分析】至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2 使某等式成立，一般应考虑在 $[0,c]$ 与 $[c,\pi]$ 上分别使用拉格朗日中值定理. 为了使用拉格朗日中值定理得到结论（出现导数），可考虑对函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 使用定理；关键是 $(0,\pi)$ 内 c 点的确定，可通过已知

条件由分部积分法和积分中值定理得到.

【详解】 令$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，由于$\int_0^\pi f(x)dx=0$，则$F(0)=F(\pi)=0$.

又因为$\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$，所以

$$0=\int_0^\pi F'(x)\cos xdx=\int_0^\pi \cos xdF(x)$$

$$=-\int_0^\pi F(x)\sin xdx\overset{\text{中值定理}}{=}-F(c)\sin c,(0<c<0)$$

从而$F(c)=0,(0<c<\pi)$

对$F(x)$分别在$[0,c]$与$[c,\pi]$上使用罗尔定理可得：存在$\xi_1\in(0,c)$，$\xi_2\in(c,\pi)$

使得$F'(\xi_1)=0$，$F'(\xi_2)=0$，即$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

评注：(1) 积分中值定理可改为："若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$"（利用拉格朗日中值定理可推出）；

(2) 要证的结论与某函数在一点的函数值$f(\xi)$有关，但与其导数值无关，可考虑用连续函数的介值定理；

(3)要证的结论与某函数在一点的导数值$f'(\xi)$（或更高阶导数值）有关，则应考虑用微分中值定理（罗尔定理、拉格朗日中值定理、泰勒定理）.

九、（本题满分 7 分）

已知$f(x)$是周期为5的连续函数，它在$x=0$的某邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$$

其中$\alpha(x)$是当$x\to 0$时比x高阶的无穷小，且$f(x)$在$x=1$处可导，求曲线$y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程.

【分析】本题考查函数的周期性、连续性、极限、导数定义及求切线方程等内容. 求点$(6,f(6))$处的切线方程，关键是求出$f'(6)$，而根据$f(x)$是周期为5的连续函数，

问题转化为求 $f'(1)$，这恰好可通过已知关系式得到.

【详解】 已知关系式两边取极限 $x\to 0$ 得：

$$f(1)-3f(1)=0\text{，故 }f(1)=0$$

由于 $\qquad f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$

所以 $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)-8x}{x}=0$

即 $\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=8$

令 $\sin x=t$，可得：

$$8=\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{[f(1+t)-f(1)]-3[f(1-t)-f(1)]}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{[f(1+t)-f(1)]}{t}+3\lim_{t\to 0}\frac{[f(1-t)-f(1)]}{-t}=4f'(1)$$

所以 $f'(1)=2$.

由周期性知 $\qquad f(6)=f(1)=0,f'(6)=f'(1)=2$.

因此曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程为 $\quad y=2(x-6)$.

评注：由于题中函数 $f(x)$ 是抽象函数，仅知在 $x=1$ 处可导，所以只能用导数定义求 $f'(1)$，而不能用其它方法，大多错误就出现在此处.

十、（本题满分 8 分）

设曲线 $y=ax^2(a>0,x\ge 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 为成一平面图形．问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所的旋转体体积最大？最大体积是多少？

【分析】 本题是综合应用题．应先求出交点 A 的坐标，再导出旋转体的体积，它是参数 a 的函数，求此函数最值即可.

【详解】 当 $x\ge 0$ 时，由 $\begin{cases}y=ax^2\\ y=1-x^2\end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+a}},y=\dfrac{a}{1+a}$，故直线 OA 的方程为