

1981-1985

全国硕士学位研究生入学考试
数学试题精选详解

(上)

极 限

连续性、可微性

积 分

中值定理

不 等 式

极 值

应用问题

吉林科学技术出版社

1 9 8 1—1 9 8 5

全国硕士学位研究生入学考试

数 学 试 题 精 选 详 解

(上)

吉林大学高等数学教研室 编

吉 林 科 学 技 术 出 版 社

1981—1985

全国硕士学位研究生入学考试

数学试题精选详解

(上)

吉林大学高等数学教研室 编

★

吉林科学技术出版社出版 吉林省新华书店发行

长春市第八印刷厂印刷

★

787×1092毫米16开本 23印张 564,000字

1986年8月第1版 1986年8月第1次印刷

印数: 1—3,540册

统一书号: 13376·48 定价: 4.70元

出版说明

1981年以来,我社相继编辑出版了全国硕士学位研究生入学试题选解(数学、物理、化学化工、力学、电学共五册)。此书问世后,颇受广大读者的欢迎和青睐,溢美之言,希冀之情,不乏篇篇。

为适应我国研究生教育发展的需要,我们在总结以前组编工作的基础上,又广泛听取了部分高等院校、研究生院教师、研究生和考生的意见。特邀请吉林大学研究生院、天津大学研究生院、大连工学院研究生院的历届考生复习指导教师和试卷命题教师,编纂了《1981—1985年全国硕士学位研究生入学试题精选详解》。本书共六分册,即数学、物理、化学(含化工)、力学、电学、英语(1980—1986年)等。

由于诸多高等院校和科研院(所)鼎力相助和各位编作者历时一年时间的精心遴选、悉心编纂,使这套书具有如下特点:

1. 时间跨度大。这套书主要选集1981—1985年的试题,有的分册还增选了1981年前历年中较好的试题,其中英语汇集了1980—1986年全国统考试题。

2. 覆盖面积大。其一,它囊括了理工科(含师范)各类院校的基础课、主要专业基础课和部分专业课的内容;其二,每门课程的内容,试题均有涉足;其三,各种形式、各种类型题目齐全;其四,既有考察考生基础知识和基础理论方面的试题,又有考察考生分析问题、解决问题能力方面的试题等等,可以说是汇一帙而无遗。

3. 针对性强。由于考生和招生单位条件各异,情况不尽相同。因此,本书既选集了重点高等院校的试题,又选集了一般院校的试题,还选集了中国科学院属部分院(所)的试题;难易程度不同的试题比例得当,较准确地反映出各类学校、各类专业的不同要求,考生可以量体裁衣,各得其所。

4. 试题精炼,解题准确。每册书中各类试题都是从百余所院校、科研院(所)数以千计的试题中筛选的,可堪称是精华荟萃。解题准确、详略得当,对某些要点还给出恰到好处的解析或提示。

“贵于意在言外,使人思而得之。”纵览全书后,读者可以把握重点,掌握解题思路和方法,达到事半功倍的复习效果。

数学分册包括高等数学、线性代数两门课程,1200多道试题。参加本书编写的人员有:欧维义(第一部分—第七部分)、陈维钧(第八部分—第十部分)。

尽管我们和作者都有良好的愿望,试图编好、出好这套书,以飨读者。但是由于编选工作量大,还会有纸漏和谬误之处,敬希读者指正。

藉此机会,我们谨向热情关心、支持编写出版这套书的高等院校、科研院(所)、作者以及广大读者表示谢忱。

目 录

第一部分 极 限	1
1 数列极限的计算	1
2 不定型的数列极限	10
3 利用定积分计算极限	15
4 函数极限的计算	19
5 含参变量积分的极限计算	38
6 单调有界型的极限	45
7 夹挤型的极限	54
8 极限的综合证明题	59
第二部分 连续性、可微性	81
1 连续性、可微性的讨论和证明	81
2 微分计算和恒等式的证明	94
3 函数的图形和它的性质	113
第三部分 积 分	138
1 不定积分、定积分和重积分	138
2 曲面积分	174
3 曲线积分	187
4 面积、体积及其它	204
第四部分 中值定理	222
1 中值定理	222
2 方程的根和函数的零点	232
第五部分 极 值	240
1 函数型极值	240
2 普通极值应用问题	246
3 条件极值应用问题	263
第六部分 不等式	279
1 单调性、极值和不等式	279
2 中值定理、泰勒公式和不等式	291
3 施瓦兹不等式和其它	301

第七部分 应用问题	316
1 质量、转动惯量和重心	316
2 引力和压力	328
3 功的计算和其它物理问题	339
4 几何部分	354

第一部分 极 限

1 数列极限的计算

1 设 $|x| < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})$.

(国防科学技术大学 1979年)

解 因为 $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})$

$$= (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})$$

$$= (1-x^4)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n}) = (1-x^{2^{n+1}})$$

所以当 $|x| < 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x} (1-x^{2^{n+1}}) = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

2 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$.

(南开大学 1979年)

解 根据两个已知的结果:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$(2) \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a.$$

$$\text{则有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

3 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

(上海机械学院 1980年)

解 因为 $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\text{所以有 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

4 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$, ($x \neq 0$).

(西安光机所 1980年)

解 应用公式 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, 有

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\sin \frac{x}{2^n}} \\
 &= \frac{\sin x}{x}
 \end{aligned}$$

5 设 $0 < x < \pi$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sec \frac{x}{2} \sec \frac{x}{2^2} \cdots \sec \frac{x}{2^n} = x \csc x$. (四川大学 1980年)

证 应用公式, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, 有

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}} = \frac{x}{\sin x} = x \csc x$$

6 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$. (山东工学院 1980年)

解 根据 $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$, 有

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \right]^{(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \right\} \\
 &= e.
 \end{aligned}$$

7 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2nx + x^2}{2n^2}\right)^{-n}$. (上海海运学院 1980年)

$$\begin{aligned}
 \text{解 所求极限} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2nx + x^2}{2n^2}\right)^{\frac{2n^2}{2nx + x^2}} \right]^{\frac{2nx + x^2}{2n^2}(-n)} \\
 = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[-\frac{2n^2 x + nx^2}{2n^2} \ln \left(1 + \frac{2nx + x^2}{2n^2} \right)^{\frac{2n^2}{2nx + x^2}} \right] \\
 = e^{-x}.
 \end{aligned}$$

8 求 $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)^m$. (山东大学 1981年)

$$\text{解 所求极限} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{n^2}} \right]^{-\frac{n^2}{m^2}m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \exp \left[-\frac{n^2}{m} \ln \left(1 - \frac{n^2}{m^2} \right)^{-\frac{m^2}{n^2}} \right] = e^0 = 1.$$

9 设 λ, k 为定数, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$. (沈阳机电学院 1981年)

解 所求极限
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \frac{\left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\frac{\lambda}{n}}}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \exp\left\{-\lambda \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right\}$$
$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

10 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{1}{4^n}$. (北京工业大学 1981年)

解 根据二项式定理, 有

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

11 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{narctg} nx}{\sqrt{n^2 + n}}$. (西安冶金建筑学院 1982年)

解 根据极限运算性质, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{narctg} nx}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{arctg} nx = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{当 } x < 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{当 } x > 0 \end{cases}$$

12 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$. (北京师范学院 1982年)

解 根据 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, 有

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

13 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}$. (鞍山钢铁学院 1982年)

解 因为 $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (2n)^2 - \sum_{k=1}^n (2k)^2$

$$= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

所以

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6n^3} - 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \right]$$
$$= \frac{16}{6} - \frac{8}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

14 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

(昆明工学院 1982年)

解 我们来研究以 $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$ 为一般项的正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$. 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

根据比值判别法, 知级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$ 收敛. 因此, 它的一般项以零为极限. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n!}{n^n} = 0$.

15 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\alpha + \frac{k\beta}{n} \right) \right]$.

(上海机械学院 1982年)

解 应用等差级数求和公式, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\alpha + \frac{k\beta}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n-1}{n} \alpha + \frac{n-1}{2n} \beta \right] = \alpha + \frac{\beta}{2}$$

16 设 $x_0 = a, x_1 = b, x_n = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2} \quad (n \geq 2)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(湖南大学 1982年)

解 根据假设, 有

$$x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2} - x_{n-1} = -\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{2}$$

由此推出

$$x_1 - x_0 = b - a;$$

$$x_2 - x_1 = -\frac{x_1 - x_0}{2} = -\frac{b-a}{2};$$

$$x_3 - x_2 = -\frac{x_2 - x_1}{2} = (-1)^2 \frac{b-a}{2^2};$$

...

$$x_n - x_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

把它们相加, 得

$$\begin{aligned} x_n - x_0 &= (b-a) \left[1 + \frac{(-1)}{2} + \frac{(-1)^2}{2^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \right] \\ &= (b-a) \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x_0 + (b-a) \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} \right] = a + \frac{2}{3}(b-a)$$

17 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\cdots+k}$.

(西北电讯工程学院 1982年)

解 由等差级数求和公式, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\cdots+k} &= 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n} \\
&= 1 + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} \\
&= 1 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 2 - \frac{2}{n+1}
\end{aligned}$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\cdots+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{2}{n+1}\right) = 2$

18 设 n 为正整数, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. (南京工学院 1982年)

解法一 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 并将积分拆成下面的形式:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} (\sin x)^n dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$$

注意到, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \delta\right]$ 时有

$$0 \leq (\sin x)^n \leq \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\right)^n$$

于是有

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} (\sin x)^n dx \leq \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$$

$$0 < \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx < \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} dx = \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

从而

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$$

由此便知

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

注意到 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = 0$$

解法二 若记: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$

则显然有 $I_n \geq I_{n+1} \geq 0$, 因此极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ 存在. 自然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n-1}$

应用分部积分公式, 有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x d(\cos x) \\
&= - \sin^{2n} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2n \sin^{2n-1} x \cos^2 x dx
\end{aligned}$$

$$= 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x (1 - \sin^2 x) dx$$

移项即知

$$I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} I_1 = \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

但应用数学归纳法不难证明

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}$$

于是有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$.

19 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n$

(山东海洋学院 1984年)

解*)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x+1}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{x+1}} \right]^{\frac{n}{n-1}(x+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{n}{n-1} (x+1) \ln \left(1 + \frac{x+1}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{x+1}} \right\} \\ &= e^{x+1} \end{aligned}$$

20 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \{n[\ln(n-1) - \ln n]\}$

(华东师范大学 1984年)

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \{n[\ln n - \ln(n-1)]\} \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n-1} \ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} \right\} \\ &= -1 \end{aligned}$$

21 试用等价无穷小代替和式中的每项, 以求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \arctg \frac{1^2}{n^3} + \frac{2}{n} \arctg \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{n}{n} \arctg \frac{n^2}{n^3} \right)$$

(长沙铁道学院 1984年)

解 因为当 $k=1, 2, \dots, n$ 时, 有

$$\frac{k}{n} \arctg \frac{k^2}{n^3} = \frac{\arctg \frac{k^2}{n^3}}{\frac{k^2}{n^3}} \cdot \frac{k^3}{n^4} = \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \frac{k^3}{n^4}$$

又

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

所以, 有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \frac{1}{n^4} \left(\sum_{k=1}^n k^3 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

*) 这里自然只考虑 $x \neq -1$ 的情形

22 设 $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$; k_n 表示满足 $S_k \geq n$ 的最小整数 (例如 $k_1 = 1, k_2 = 4$),

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_{n+1}}{k_n}$.

(华中工学院 1984年)

解 根据 $S_k = \ln k + c + \varepsilon_k$

若 $S_k \geq n$, 则

$$\ln k + c + \varepsilon_k \geq n, \quad \ln k_n + c + \varepsilon_{k_n} \geq n$$

$$k_n \geq e^{n-c-\varepsilon_n}$$

按 k_n 的定义还应有 $k_n \leq e^{n-c-\varepsilon_n} + 1$

$$\text{于是 } \frac{e^{n+1-c-\varepsilon_{k_{n+1}}}}{e^{n-c-\varepsilon_{k_n}}+1} \leq \frac{k_{n+1}}{k_n} \leq \frac{e^{n+1-c-\varepsilon_{k_{n+1}}}+1}{e^{n-c-\varepsilon_{k_n}}}$$

注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{k_n} = 0$, 在上式两端令 $n \rightarrow \infty$, 则知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e$$

23 设 $f_n(x) = \frac{n+x}{1+nx^2} + n^2 \cos \frac{x-1}{n}$, $n=1, 2, \dots$. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.

(中国科学院 1984年)

解 因为 $f'_n(x) = \frac{1+nx^2-2nx(n+x)}{(1+nx^2)^2} - n \sin \frac{x-1}{n}$

$$= \frac{1-2n^2x-nx^3}{(1+nx^2)^2} - n \sin \frac{x-1}{n} = \frac{\frac{1}{n^2} - 2x - \frac{x^3}{n}}{\left(\frac{1}{n} + x^2\right)^2} - (x-1) \frac{\sin \frac{x-1}{n}}{\frac{x-1}{n}}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = -\frac{2}{x^3} - x + 1$.

24 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi e n!)$.

(华东纺织工学院 1984年)

解 设 $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{(n+1)!}$

则 $\theta_n = 1 + \frac{\theta_{n+1}}{n+1}$. 这里 $1 \leq \theta_n \leq e$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 1$.

从而 $n \sin(2\pi e n!) = n \sin \frac{2\pi \theta_n}{n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi e n!) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi \theta_n \cdot n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2\pi \theta_n}{n+1}}{\frac{2\pi \theta_n}{n+1}} = 2\pi$$

25 已知数列 $a_1 = 2$, $a_2 = 2 + \frac{1}{2}$, $a_3 = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$, $a_4 = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$, ...

的极限存在, 求此极限.

(华中工学院 1984年)

解 如设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 显然有 $A \geq 2$. 于等式 $a_n = 2 + \frac{1}{a_{n-1}}$

两端令 $n \rightarrow \infty$, 有 $A = 2 + \frac{1}{A}$ 解这个方程, 得 $A = 1 + \sqrt{2}$ 和 $A = 1 - \sqrt{2}$. 符合题意的解是

$A = 1 + \sqrt{2}$. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + \sqrt{2}$

26 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1 + \sin \pi x)^n + \sin \pi x}{(1 + \sin \pi x)^n + 1}$ (n 为正整数), 试作出 $y = f(x)$ 在 $(-1, 1)$

上的函数图形.

(上海交通大学 1984年)

解 对 x 分情形讨论

(1) $-1 < x < 0$. 这时因 $0 < 1 + \sin \pi x < 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sin \pi x)^n = 0$

于是 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1 + \sin \pi x)^n + \sin \pi x}{(1 + \sin \pi x)^n + 1} = \sin \pi x$

(2) $0 < x < 1$. 这时因 $1 + \sin \pi x > 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sin \pi x)^n = +\infty$

于是当 $0 < x < 1$ 时, 有

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{\sin \pi x}{(1 + \sin \pi x)^n}}{1 + \frac{1}{(1 + \sin \pi x)^n}} = x$$

(3) $f(0) = 0$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$. 总结上面的讨论, 我们得到

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x = -1 \\ \sin \pi x, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

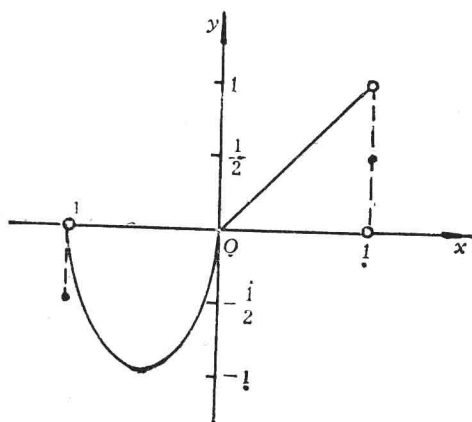
它的图形如26题图所示.

27 求 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} [\cos(m! \pi x)]^n \right\}$.

(华东工程学院 1984年)

解 (1) x 为无理数时, 因为对任何 m , 恒有 $\cos(m! \pi x) < 1$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} [\cos(m! \pi x)]^n = 0$. 从而

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} [\cos(m! \pi x)]^n \right\} = 0$$



26题图

(2) x 为有理数时 (即 $x = \frac{q}{p}$). 因为对于充分大的 m , 有 $\cos(m!\pi x) = \cos 2\pi x = 1$. 所以

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} [\cos(m!\pi x)]^n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} [\cos 2\pi x]^n = 1$$

这样我们就得到

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} [\cos(m!\pi x)]^n \right\} = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数时} \\ 1, & x \text{ 为有理数时} \end{cases}$$

28 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} \quad (x > 0)$. (华东师范大学 1984年)

解 原式 =
$$\begin{cases} -1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

29 证明 $\frac{1}{\frac{1}{1 \times 1986} + \frac{1}{1986 \times 3971} + \frac{1}{3971 \times 5956} + \dots} = 1985$ (北方交通大学 1985年)

证 若令 $x_1 = 1986$, $x_2 = 1986 \times 3971$, $a_3 = 3971 \times 5956, \dots$ 则可以验证

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1(2x_1 - 1), & x_3 &= (2x_1 - 1)(3x_1 - 2), \dots, \\ x_n &= [(n-1)x_1 - (n-2)][nx_1 - (n-1)] \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x_1} + \left(\frac{2}{2x_1 - 1} - \frac{1}{x_1} \right) + \left(\frac{3}{3x_1 - 2} - \frac{2}{2x_1 - 1} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{n}{nx_1 - (n-1)} - \frac{n-1}{(n-1)x_1 - (n-2)} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{nx_1 - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(x_1 - 1)n + 1} = \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{1985} \end{aligned}$$

所以 原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = 1985$

30 设 a 为一常数, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+a} x \sin \frac{1}{x} dx$. (西北轻工业学院 1985年)

解 应用积分中值定理, 有

$$\int_n^{n+a} x \sin \frac{1}{x} dx = a \xi \sin \frac{1}{\xi} \quad (\xi \text{ 在 } n \text{ 与 } n+a \text{ 之间})$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+a} x \sin \frac{1}{x} dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} a \frac{\sin \frac{1}{\xi}}{\frac{1}{\xi}} = a$$

31 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!}$.

(合肥工业大学 1985年)

解 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+2)!} \right]$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \right] = \frac{3}{2}$$

32 已知数列 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$

试证 $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n / F_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (长春光学精密机械学院 1985年)

证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} \right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+2} \right]}$$

$$= \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

33 若曲线 $y = x^n$ 上点 $(1, 1)$ 处的切线交 x 轴于 $(\xi, 0)$, 试计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} y(\xi)$.

(北京邮电学院 1985年)

解 曲线 $y = x^n$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程是

$$y = n(x-1) + 1$$

它与 x 轴 ($y=0$) 交于点 $\xi = 1 - \frac{1}{n}$, 于是

$$y(\xi) = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} y(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = e^{-1}$

2 不定型的数列极限

1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right)$.

(山东海洋学院 1980年)

解 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) \frac{\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x})}{\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x})} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x})}$$

$$= 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg}^x \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left\{ x \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x} \right) \right\} = e^2$$

所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) = e^2$$

2 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\theta}{n} \right)^n$.

(东北重型机械学院 1981年)

解 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \cos \frac{\theta}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \cos \frac{\theta}{x}}{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{x}} \left(-\sin \frac{\theta}{x} \right) \left(-\frac{\theta}{x^2} \right)$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{\theta}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left\{ x \ln \cos \frac{\theta}{x} \right\} = e^0 = 1$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\theta}{n} \right)^n = 1$$

3 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$.

(武汉工学院 1981年)

解 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3} \right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\left(-\frac{1}{x^2} \right) \frac{3}{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{1}{3} \left(a^{\frac{1}{x}} \ln a + b^{\frac{1}{x}} \ln b + c^{\frac{1}{x}} \ln c \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\quad}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{3} \ln(abc)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left\{ x \ln \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3} \right) \right\}$$