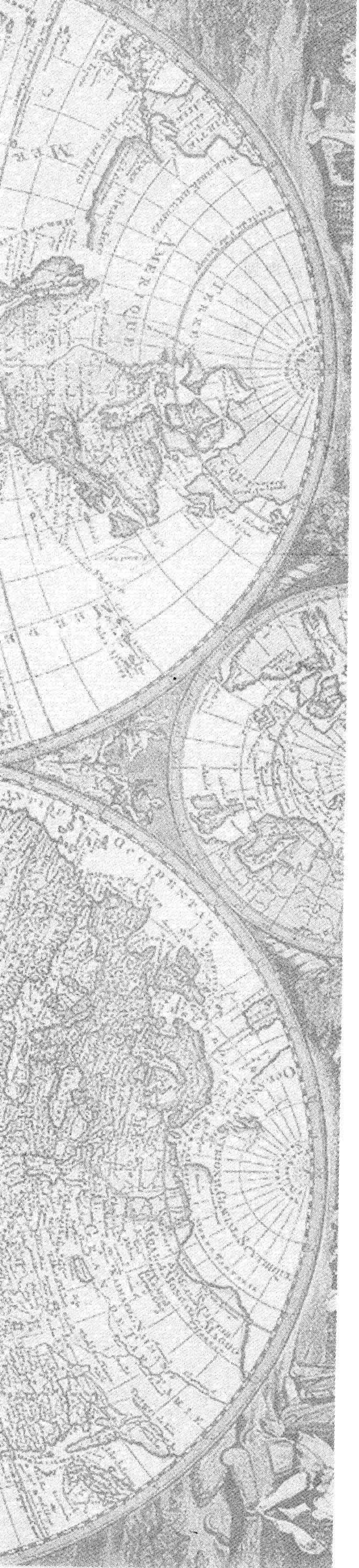
科学版精品课程立体化教材·管理学系列

国家级 精品课程教材

# 管理运筹学

李引珍 主编

科学出版社



科学版精品课程立体化教材·管理学系列

# 管理运筹学

李引珍　主编

科学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书介绍了线性规划、对偶理论、运输问题、整数规划、动态规划、图与网络优化、统筹方法、排队论、存储论、博弈论、决策论、层次分析法等运筹学主要分支的基本理论和方法，以交通、物流、经管、工业工程等专业为背景，配以大量的例题与习题。另外还介绍了利用 LINGO 软件求解运筹学主要模型的方法。

本书为国家精品课程“管理运筹学”教材，可供相关专业的本科生、硕士研究生学习使用，也可供相关科研人员和管理人员阅读参考。

**图书在版编目（CIP）数据**

管理运筹学/李引珍主编. —北京：科学出版社，2012
科学版精品课程立体化教材·管理学系列
ISBN 978-7-03-035456-3
Ⅰ.①管… Ⅱ.①李… Ⅲ.①管理学－运筹学－高等学校－教材 Ⅳ.①C931.1
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 205329 号

责任编辑：王京苏 / 责任校对：李丽花
责任印制：阎　磊 / 封面设计：蓝正设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2012 年 9 月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2012 年 9 月第一次印刷　印张：21 3/4
字数：500 000

**定价：39.00 元**

（如有印装质量问题，我社负责调换）

# 前 言

运筹学是第二次世界大战后发展起来的一门新兴应用学科，是系统工程和管理学科最重要的理论基础之一，应用极其广泛，是许多工科专业和经济管理类专业的重要技术基础课程。

1948 年美国麻省理工学院首次开设了非军事运筹学课程。20 世纪 50 年代起，伯明翰大学、兰开斯特大学、伦敦经济学院等世界著名大学均为研究生和本科生开设了此课程。1956 年，钱学森、许国志等将运筹学介绍到中国，随之，许多行业都对其有了较好的应用，尤其是在运输与物流方面，从物资调运、装卸到列车与车辆调度问题等均取得了较好的应用成果。1980 年，中国运筹学会成立，并于 1982 年加入了国际运筹学会联合会（The International Federation of Operational Research Societies，IFORS）。今天，运筹学已成为国内外高等院校许多专业的必修课程。

早在 20 世纪 70 年代中期，我国铁道运输专业的奠基者与创始人之一、著名留美学者、教育家、兰州交通大学（原兰州铁道学院）运输系系主任林达美教授就敏锐地发现，运用传统的数学方法难以解决许多铁路运输问题，在他的积极倡导下，由运筹学专家滕传琳教授等组织翻译了美国 R. V. Hartley 教授所著的《*Operations Research: Managerial Emphasis*》一书，依此编写《运筹学》讲义，并在我国铁路院校率先开设运筹学课程。考虑到交通运输专业以及经济管理专业的需要，对讲义经过反复的修改和完善，在增加了大量的运筹学建模和实际应用内容后，滕传琳教授等于 1986 年编写并出版了《管理运筹学》。随后，历时二十余年，“管理运筹学”课程建设经历了一个变革、调整和发展的良好时期。首先，将“管理运筹学”的开设从交通运输专业，陆续延伸到了兰州交通大学的交通工程、工程管理、工商管理、物流管理、工业工程、信息管理等专业，进一步扩大了课程的辐射面；其次，充实了课程内容，将单一的“管理运筹学”课程逐渐扩充为运筹学课程群，主要包括“管理运筹学”、“运筹学模型与算法”、“现代决策理论”、“博弈论”、“最优化理论”、“智能算法”、“不确定规划”、“计算机模拟”等课程，并为交通类、管理类、经济类等专业的本科生、硕士和博士研究生开设了这些课程。

经过几代人的辛勤耕耘，由李引珍教授主持的“管理运筹学”课程于 2006 年获国家精品课程称号。国家精品课程是教育部“高等学校教学质量与教学改革工程”的重要组成部分，是具有一流教师队伍、一流教学内容、一流教学方法、一流教材、一流教学管理等特点的示范性课程。对于教材建设，我们组织了长期从事运筹学教学与研究的教师，在总结精品课程建设以及教学经验的基础上，参考国内外知名教材，编撰了此书。本书主要是针对非数学专业的学生编写的，适用于交通运输类专业、管理类

专业、经济类专业、物流专业、工业工程专业的本科生，也适用于相应专业的硕士研究生。以培养学生运用运筹学方法分析问题和解决问题的实际能力为目的，在编写本书的过程中，我们力图做到以下几点：

第一，学以致用，兼顾理论。运筹学来源于实践，应用于实际，之所以有人酷爱运筹学，视学习运筹学为极大的乐趣，是因为其解决问题的思想与方法非常美妙和奇特。曾几何时，因运筹学理论的高深而使其只是数学者的殿堂，其他领域的众多学者和管理者只能望而兴叹，被拒之门外。本书立足于实用性，以培养学生的应用能力为主，通过大量的例题说明运筹学建模的方法与技巧、解决问题的原理与方法，尽量淡化理论的推导与证明，只对一些重要的原理和方法做了简单而必要的推导与证明。

第二，由浅入深，循序渐进。本书中大部分内容都以例题为引子，以引起读者的兴趣，进而引出相关概念，提出建立问题模型的方法，并提出求解小规模问题的直观手段，再给出求解问题的一般方法。例题也由易到难，循序渐进，易于掌握。

第三，联系实际，例子丰富。本书以交通、经济管理、物流等专业为背景，结合实际，删繁就简，编撰了大量的实例和习题，有助于读者更深入地了解和掌握运用运筹学解决实际问题的过程和方法，提高其分析问题、解决问题的能力和水平。

第四，对 LINGO 软件做了相关介绍。计算机的应用对运筹学的发展起到了巨大的推动作用，运筹学软件的兴起，使得我们无须为每个问题去编写计算机程序。本书在力图使读者掌握必要的算法的基础上，特别强调培养其运用计算机软件解决问题的能力，为此，专门介绍了 LINGO 软件的使用方法，并在大部分章节中编写了使用 LINGO 软件的程序脚本。

全书共 14 章，由李引珍主编并统稿，由焦永兰主审。

邓小瑜博士（北京师范大学珠海分校）编写第 1、2 章；

段刚博士（兰州交通大学）编写第 3、4 章，以及全书所有的 LINGO 软件程序；

李引珍博士（兰州交通大学）编写第 5、6、12 章；

牟海波博士（兰州交通大学）编写第 7、8、9 章；

孙秉珍博士（兰州交通大学）编写第 10 章；

李洪涛博士（兰州交通大学）编写第 11 章；

何瑞春博士（兰州交通大学）编写第 13、14 章。

本书涵盖了运筹学的主要分支，内容比较齐全，对不同专业的学生，可根据教学课时数和专业要求选择相应的内容进行讲解。

我们在本书的编写过程中参考了国内外的一些教材和论文，在此向其著者表示衷心的感谢！同时也向资助“管理运筹学”国家精品课程建设的教育部高等教育司、甘肃省教育厅表示深深的谢意！

囿于作者诠才末学，本书难免会有不尽完善之处，期盼读者赐教。

作　者

2012 年 6 日于金城兰州

# 目 录

# 绪 论

运筹学是自20世纪40年代发展起来的一门新兴应用学科，它利用数学理论与方法，定量研究资源优化问题，进行系统分析与决策，在军事、工业、交通、管理、经济、商业等领域有着广泛的应用，是解决许多系统优化问题的强有力的工具。

## 一、运筹学的发展历程

运筹思想源远流长。我国战国时期齐王与大臣田忌赛马的故事，就是运用朴素运筹思想的典型例子。《史记》六十五卷《孙子·吴起列传》中记载：

齐使者如梁，孙膑以刑徒阴见，说齐使。齐使以为奇，窃载与之齐。齐将田忌善而客待之。忌数与齐诸公子驰逐重射。孙子见其马足不甚相远，马有上、中、下辈。于是孙子谓田忌曰："君弟重射，臣能令君胜。"田忌信然之，与王及诸公子逐射千金。及临质，孙子曰："今以君之下驷与彼上驷，取君上驷与彼中驷，取君中驷与彼下驷。"既驰三辈毕，而田忌一不胜而再胜，卒得王千金。于是忌进孙子于威王。威王问兵法，遂以为师。

在孙膑的策划下，虽田忌的马匹劣于齐王的马匹，但最终取得了比赛的胜利。

我国历史上有许多著名的军事家将朴素运筹思想运用于战争中，留下了许多脍炙人口的传奇故事。

在国外，古希腊科学家阿基米德被认为是运筹学的先驱人物，他利用运筹思想，在抵抗罗马帝国的侵略中做出了重要贡献，特别是他的《十四巧板》表明古希腊人已掌握了组合数学的原理。1736年，29岁的瑞士数学家列昂哈德·欧拉发表了《哥尼斯堡的七座桥》一文，对哥尼斯堡七桥问题进行了研究。欧拉的研究奠定了图论的基础，开创了数学的一个新的分支——图论与几何拓扑，目前一般公认欧拉为图论之父。

人们普遍认为，运筹学真正作为一门学科，经历了以下几个阶段。

1. 第一次世界大战时期的萌芽期

第一次世界大战期间，现代运筹学的思想和部分理论初步形成。早在1910年，丹麦工程师A. K. 爱尔朗就开始运用概率论理论来研究电话服务，当时称为话务理论，并导出了著名的爱尔朗电话损失率公式，将其应用于哥本哈根电话交换机的效率研究。1914年，英国工程师F. W. 兰彻斯特首先提出用常微分方程组来描述敌对双方兵力

消灭的过程，定量地说明了集中兵力的原理。以英国科学家希尔为首的英国国防部防空试验小组在第一次世界大战期间开展了高射炮利用研究。1915 年，F. 哈里斯对银行货币的储备问题进行了详细的研究，建立了一个确定性的存储费用模型，这是存储论(inventory theory)的早期工作。1939 年，苏联数学家康托洛维奇出版了《生产组织与计划中的数学方法》。这些先驱者的研究，为后来运筹学的发展奠定了初步思想基础。

2. 第二次世界大战时期的兴起

1938 年，英国波得塞雷达站负责人 A. P. 洛维为了研究整个防空作战系统的合理运行，以便有效地防备德国飞机入侵，成立了由各方面科学家组成的研究小组，将之命名为 Operational Research(简称 OR)。因此，波得塞被称为是运筹学的诞生地。该研究机构的建立标志着现代运筹学的开端。1940 年，物理学家 P. M. S. 布莱克特加入防空指挥部，组建了运筹工作组——著名的“布莱克特马戏团”。随后，布莱克特的备忘录《运作水平上的科学家》在美军各部广泛流传。1942 年，美军成立了反潜艇战运筹组，组织成立了二十多个作战分析小组。同年，加拿大皇家空军也组建了三个运筹学小组，主要解决地雷战问题。第二次世界大战中，世界各国的运筹学工作者达七百余人，运筹学不断兴起，其产生的运筹学理论成果主要有线性规划、整数规划、图论、网络流、搜索论、最优控制理论等。

3. 第二次世界大战后的蓬勃发展

第二次世界大战后，世界经济需要复苏。管理和生产部门内部与日俱增的复杂性和专门化产生了很多问题，人们认识到这些问题基本上与战争中曾面临的问题类似，只是其所具有的现实环境不同而已，同时，在战争实践中得到锻炼的一大批运筹工作者，为运筹学的进一步研究与应用提供了人力资源保障。自此，运筹学进入工商企业和其他部门，并得到了广泛的应用。计算机的出现更是让人们意识到运筹学解决实际问题的强大力量。运筹学理论及应用的研究如火如荼，蓬勃发展。

1948 年 4 月，英国运筹学俱乐部的成立标志着运筹学学术团体的建立。该组织于 1953 年 11 月 10 日更名为运筹学会。1952 年 5 月 26 日，美国运筹学会(Operations Research Society of America，ORSA)成立。之后，许多国家的运筹学学术团体纷纷出现。1959 年，英国、美国、法国三国的运筹学学会倡导成立了国际运筹学会联合会(IFORS)。

1956 年，钱学森、许国志等率先将运筹学介绍到中国，并加以推广。1980 年，中国运筹学会成立，1982 年加入了 IFORS，并创办了《运筹学杂志》，1997 年该杂志改名为《运筹学学报》。

在此期间，出现了不少有关运筹学的著名理论和方法。1947 年，美国数学家乔治·丹齐格提出了求解线性规划问题的单纯形法，并于 20 世纪 50 年代初应用电子计算机求解线性规划且获得了成功。1944 年冯·诺伊曼和摩根斯坦合著的《博弈论与经济行为》以及 1951 年约翰·纳什提出的纳什均衡理论等为博弈论奠定了基础。1951 年，美国学者贝尔曼提出了动态规划原理。20 世纪 50 年代初，美国数学家关于生灭过程的研究、英国数学家 D. G. 肯德尔提出的嵌入马尔可夫链理论，以及对排队队形的分类

方法，为排队论奠定了理论基础。1951 年，H. W. 库恩和 A. W. 塔克发表的关于最优性条件(后来称为库恩-塔克条件)的论文是非线性规划正式诞生的一个重要标志。1958 年 T. M. 威汀编写的《存贮管理的理论》一书，以及随后 K. J. 阿罗等编写的《存贮和生产的数学理论研究》和 P. A. 毛恩于 1959 年编写的《存贮理论》，标志着存储论成为运筹学中的一个独立分支。

4. 20 世纪 70 年代进入衰落期

20 世纪 70 年代，世界经济的衰退，大量公共部门的私营化、市场化，以及社会对运筹学研究投入的锐减，严重影响了运筹学学科的发展。运筹学研究自身也存在严重问题，过度依赖政府的宏观组织和资源调配，故步自封，不能汲取其他理论的有益成分，将过多精力放在模型构造以及算法的精巧性和数学工具的完备性上，追求解决纯技术性的问题，“重数学技巧、轻解决实际问题的能力”的现象十分突出。运筹学的研究陷入了极为严峻的生存危机。

5. 运筹学的发展趋势

有学者认为，运筹学的发展受到两个因素的影响：其一为第二次世界大战后运筹学自身技术的发展；其二为计算机的普及和其他交叉学科的发展。进入 20 世纪 80 年代以来，运筹学正逐渐走出低谷，计算机的普及应用，尤其是运筹学软件的出现，吸引了大量的学者从事运筹学应用的研究，信息科学、生命科学，特别是计算技术等学科的发展对运筹学产生了极大的影响，全局最优化、图论、神经网络、复杂网络、随机规划、模糊规划等运筹学理论及方法得到了很好的发展和应用。

20 世纪末出现了“软运筹学”一词。现实世界中，确定性是相对的，不确定性是绝对的，软运筹学将更多地采用模糊数学方法。大规模的科学计算是软运筹学的主要内容之一，软计算就是借助自然界(生物界)规律的启迪，根据其原理，模仿设计求解问题的算法，如人工智能、禁忌搜索、神经网络、遗传算法、进化规划、模拟退火技术和群集智能技术等。

复杂巨系统的计算机模拟、经济博弈论、供应链管理等都将是运筹学未来的主要研究内容。

总之，运筹学还在不断发展中，新的思想、观点和方法将会不断出现。

## 二、运筹学的定义、特点及主要内容

运筹学，在英国称为 operational research，在美国叫做 operations research，简称 OR，其广泛应用数学方法和现代科学技术知识，解决社会、生产和经济活动过程中的实际问题，为决策者提供定量的决策依据。

1964 年，我国大陆学者借鉴《史记・汉高祖本记》中“夫运筹帷幄之中，决胜千里之外”一语，将 OR 译为“运筹学”。我国台湾学者则将其译为“作业研究”。

1. 运筹学的定义

顾名思义，运筹学就是对如何“运作”进行研究的一门学科。目前对运筹学的定义比较多，至今并无一个统一的定义。

我国出版的《中国大百科全书》中的定义是："运筹学是应用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中人力、物力、财力等资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理。"

其大部分定义的共同特点是量化、决策、最优，即用量化的方法为决策者提供具有定量依据的最优方案。

2. 运筹学的特点

运筹学最主要的特点是优化，是一门以数学为主要研究工具，探索在有限资源条件下的最优方案的学科。它往往以整体最优为目标，从系统的观点出发，考虑各种资源与环境约束，协调各部门之间的利害冲突，对所研究的问题求出最优解，寻求最佳的行动方案，所以它也可被看成是一门优化技术，提供的是解决各类问题的优化方法。运筹学研究问题的特点表现在以下几个方面：

（1）系统性。其从系统的观点出发，力求全局优化。运筹学是系统工程理论的主要组成部分。

（2）量化性。其强调以定量分析为基础，通过数值计算等手段，求得问题的最优解。在实际中往往对"最优"过于理想化，难以达到，这时也可用"次优解"或"满意解"取代。

（3）多学科性。用运筹学方法解决实际问题时，由于问题的复杂性，往往要运用适宜的数学方法和计算机技术，以及与经济学、社会学、行为科学、其他技术科学相交叉的科学知识。

（4）理论性和应用性。运筹学之所以是一门完整的学科，主要是因为其有系统且成熟的理论作支撑。运筹学来源于实践，应用于实际，有效的应用是其主要目的。

3. 运筹学的主要内容

运筹学涉及面广，应用范围大，是一门内容相当丰富的学科。它的主要内容一般包括线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、多目标规划、存储论、图与网络优化、博弈论、决策论、排队论和启发式方法等，其中每一个分支都有丰富的内容。运筹学的学科体系如图 0-1 所示。

- 运筹学
  - 启发式方法
  - 数学规划
    - 线性规划
    - 非线性规划
    - 无约束优化方法
    - 约束优化方法
    - 动态规划
    - 整数规划
    - 多目标规划
    - 参数规划
    - 组合最优化
    - 投入产出分析
  - 图与网络优化
  - 排队论
  - 统筹论
  - 存储论
  - 决策论
  - 博弈论
  - 计算机模拟
  - 可靠性理论
  - 预测学
  - 软系统方法
  - 认知映射
  - 军事运筹学

图 0-1　运筹学的学科体系

## 三、运筹学的应用

运筹学被广泛运用于众多领域，这些领域主要有：

（1）经济领域。这是运筹学的主要应用领域之一，如企业生产计划的制订、生产资源优化、投入产出分析、定价策略等。

(2)管理领域。运筹学方法和思想在管理领域无处不在，应用十分广泛，如物流管理、人力资源管理、库存管理、供应链管理、财务管理、市场营销与管理、决策分析等。

(3)工程技术领域。工程技术领域中的优化与决策问题颇多，且十分复杂，运筹学是解决此类问题的主要有效工具，如项目评价、工程进度控制、系统优化与设计等。在交通运输领域，运筹学已成为不可或缺的研究工具，如交通网络分析与设计、城市交通控制、车辆调度、列车调度指挥等。

(4)军事领域。军事领域是运筹学的发源地，军事运筹学是运筹学的一个重要分支。

(5)其他领域。除了以上领域外，运筹学不仅在电力、煤炭等能源领域和水资源、环保领域有重要应用，而且在信息科学、分子化学、生命科学、社会学等领域也均有不同程度的应用。

总之，运筹学是一门应用非常广泛和非常实用的学科。

利用运筹学解决实际问题，一般需要以下几个步骤：

(1)系统分析。对研究对象进行系统分析，理清问题，明确目标，这是解决问题的首要步骤。一般情况下，要通过调查研究，分析问题的系统结构、实质、影响因素、约束条件，搜集相关数据，明确优化目标，预计优化结果。

(2)建立模型。数学模型是对研究对象系统行为的一种定量描述和本质抽象，它既要反映实际，又要进行高度抽象。由于社会活动的复杂性，很难总结出一套规范的方法来建立模型，因此，建模是一种创造性活动，既有科学方法，又有艺术灵感。运筹学模型有形象模型、数学模型、模拟模型等，其大部分是数学模型。数学模型若不含随机因素，则称为确定性模型(如线性规划、非线性规划、整数规划、图与网络和动态规划等)；反之，则称为不确定性模型(如排队论、存储论、决策论和博弈论等)。当变量只取离散值时，为离散模型，否则称为连续模型。

(3)求解模型。模型求解是至关重要的一步，不同的模型有不同的求解方法，在解决实际问题时，由于问题规模较大，运算量一般都很大，通常需要用计算机计算。有些模型，或许没有合适的现成解法，这时可用随机模拟或构造启发式方法等手段寻求问题的“近似解”。

(4)结果分析。结果分析也就是对解的有效性检验，由于实际问题的复杂性及建模的抽象，通过对解的检验与结果分析，可判断所建模型的正确性和算法的正确性。若计算结果不理想，需重复上述过程。

(5)解的实施。通过对解的实施，进一步检验上述解决问题的过程是否还存在问题，若需要修正，则可进一步对上述过程进行修改和完善，同时也可向决策者提供决策所需的数据、信息和方案。

# 第一章

# 线性规划基础

线性规划是运筹学中研究较早、发展较快的一个重要的基础分支。它的起源可追溯到1832年，法国数学家让·巴普蒂斯·约瑟夫·傅里叶最先提出线性规划的思路，但当时并未引起重视。之后又有多位数学家研究线性规划问题。1939年，苏联经济学家康托洛维奇在《生产组织与计划中的数学方法》一书中，首次用线性规划方法解决了生产组织与运输问题，成为线性规划理论开始形成的重要标志。1947年，美国数学家乔治·伯纳德·丹齐格提出线性规划的数学模型，并给出求解该类模型的单纯形法。1947年，美国数学家冯·诺依曼提出对偶理论，开创了线性规划更多的研究领域，扩展了其应用范围和解决问题的能力，进而完善了线性规划理论。之后，计算机技术的发展，快速推动了线性规划理论在军事、生产、生活中的应用。

线性规划是一种辅助人们进行科学管理，研究线性约束条件下线性目标函数极值问题的数学理论和方法，英文名称为 linear programming，其缩写为 LP。其模型一般用于在一定的资源或条件限制的情况下，求解实现系统成本最小或利润最大或效率最高的问题，如应用于生产计划组织、工作调度、运输问题、合理下料、配料问题、生产布局、投入产出分析、物流节点规划等领域。问题的提出大致分为两种类型：一是在给定人力、物力、财力等资源的情况下，研究如何充分利用资源，得到最大的经济效益或最高的生产效率；二是给定计划任务，研究如何统筹安排，用最少的资源完成规定的任务。总而言之，运用线性规划理论能够针对实际的生产与管理问题建模，通过一定的方法求解模型，可以得到较好的解决方案。

## 第一节　线性规划问题的数学模型

线性规划问题的数学模型由决策变量假设、目标函数和约束条件构成，其中目标函数和约束条件都是关于决策变量的线性函数，因此称做线性规划。下面通过一个生产计划安排的例子，介绍线性规划问题的数学模型。

【例 1.1】某企业生产 A、B 两种产品，要用到煤和矿石两种资源，已知生产两种产品的单位资源消耗量、单位产品的销售利润及企业所拥有的资源数量(表 1-1)，假设产

品供不应求，即生产出来的产品都能售出。问如何安排生产，使企业获利最大?

**表 1-1 例 1.1 中的单位产品资源消耗、利润及资源限量**

| 资源＼产品 | A产品 | B产品 | 资源限量/吨 |
|---|---|---|---|
| 煤/吨 | 2 | 1 | 50 |
| 矿石/吨 | 1 | 3 | 60 |
| 单位产品利润/(万元/吨) | 2 | 3 | |

建模分析：首先要假设决策变量，问题的要求是合理安排生产，也就是要决策生产各类产品的数量，以达到企业获利最大的目标。因此，设生产 A 产品的数量为 $x_1$ 吨，生产 B 产品的数量为 $x_2$ 吨；其次根据题意，写出使企业利润最大化的目标函数——由各产品单位利润与产量的乘积之和构成，即 $\max z = 2x_1 + 3x_2$ ；最后写出关于该问题的约束条件，也就是煤和矿石两种资源的实际使用量不能超过其资源限量，即 $2x_1 + x_2 \leqslant 50$ ，$x_1 + 3x_2 \leqslant 60$ ，另外，对于 A、B 产品的产量应取非负实数，即 $x_1$，$x_2 \geqslant 0$ 。综上所述，列出完整的数学模型。

解：设 A 产品的产量为 $x_1$ 吨，B 产品的产量为 $x_2$ 吨。

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 \quad \text{—— 目标函数}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 50 \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 60 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{—— 系统约束} \\ \\ \text{—— 变量约束} \end{array}$$

上述模型包括决策变量 $x_1$ 、$x_2$ ，以及目标函数和约束条件。其中，按约束条件的性质分类，其可分为受所研究系统条件限制的系统约束和对于决策变量取值的变量约束，在通常情况下，决策变量都取非负数，因此变量约束常称为非负约束。

下面再列举一个物流运输问题的建模。

【例 1.2】设某种物资从 A、B、C 三个产地调出，运往甲、乙、丙三个需求地，已知各产地的产量、各需求地的需求量及产地至需求地各条线路的单位运价(表 1-2)。要求在尽量满足各地需求量的前提下，寻找使运费最低的调运方案。

**表 1-2 例 1.2 的供需量及单位运价**

| 产地＼需求地 | 甲 | 乙 | 丙 | 产量 |
|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 3 | 5 | 7 |
| B | 1 | 3 | 4 | 6 |
| C | 3 | 2 | 3 | 9 |
| 需求量 | 6 | 8 | 6 | |

建模分析：对于物资调运问题，目标函数是求解总运输费用最低的函数。系统约束考虑两方面：一是尽量满足客户需求，二是不能超过各产地的产能限制。在该问题中，由于物资总产量大于总需求，因此，物资调运一定能够满足所有客户的需求，即

实际运到各需求地的物资总量等于需求量；而产地则会有部分物资剩余，在供应约束中每个产地实际运出的物资量不超过其产量。决策物资调运方案就是寻求使总运费最低的满足各需求地物资调运的数量。为了方便理解和记忆决策变量的含义，将决策变量假设为含有两个下标的变量，两个下标分别表示物资调运的产地和需求地。当然，也可以使用单下标变量，只不过要弄清楚每个变量所对应的运输路线。

解：设 $x_{ij}$ 表示从产地 $i$ 运往需求地 $j$ 的物资数量，其中，$i=1,2,3;j=1,2,3$ 。

$$\min z = 2x_{11}+3x_{12}+5x_{13}+x_{21}+3x_{22}+4x_{23}+3x_{31}+2x_{32}+3x_{33}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}\leqslant 7 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}\leqslant 6 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}\leqslant 9 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=6 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=8 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=6 \\ x_{ij}\geqslant 0, \quad i,j=1,2,3 \end{cases}$$

从上面两个线性规划模型的例子可以看出，目标函数是关于决策变量的线性函数，约束条件是关于决策变量的线性不等式或线性方程，整个模型是一个求解满足约束条件，且使目标函数达到极值的问题的过程。而这类带附加限制条件的极值问题就是运筹学规划论部分研究的主要内容。

例 1.1 和例 1.2 的模型可以推广到一般的线性规划模型：

$$\max(\text{或}\min) z = c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_m \\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0 \end{cases}$$

上述模型可简写为

$$\max(\text{或}\min) z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant(\text{或}=,\geqslant)b_i, & i=1,2,\cdots,m \\ x_j\geqslant 0, & j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

用向量形式表示上述模型，其可写为

$$\max(\text{或}\min) z = \boldsymbol{CX}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_jx_j\leqslant(\text{或}=,\geqslant)\boldsymbol{b} \\ x_j\geqslant 0, \quad j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{C}=(c_1\quad c_2\quad \cdots\quad c_n)$；$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{P}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$。

用矩阵形式表示上述模型，其可写为

$$\max(\text{或}\min)z=\boldsymbol{CX}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX}\leqslant(\text{或}=,\geqslant)\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{C}=(c_1\quad c_2\quad \cdots\quad c_n)$；$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$。

通常称 $\boldsymbol{C}$ 为目标函数的系数行向量，$\boldsymbol{A}$ 为系统约束中变量的系数矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为约束条件右端的常数列向量。

## 第二节　线性规划模型的标准形式

上节给出的一般线性规划模型在内容和形式上可能是多种多样的。为了便于求解模型，需要将一般模型转化为标准形式，然后运用单纯形法求解。

### 一、标准形式

线性规划模型的目标函数可以是求最大值，也可以是求最小值。这里约定标准形式为目标函数求最大值。约束条件的标准化规定为：约束条件全为等式，约束条件右端的常数项均为非负数，决策变量都是非负约束。

根据上述规则，线性规划模型的标准形式可表示为

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, & i=1,2,\cdots,m\\x_j\geqslant 0, & j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

### 二、转化为标准形式的方法

对于非标准形式的线性规划问题，其可通过以下方法转化为标准形式。

1)对于求目标函数最小值的问题

对于求目标函数最小值的问题，可将目标函数两边同乘以“$-1$”，便可转化为求最大值的问题，因为当目标函数达到最大值时，其相反数必为最小值。值得注意的是，求解出该目标函数的最大化模型后，将目标函数值乘以“$-1$”，可得到原模型的目标函数值。