大　學　用　書

微積分

—在經濟學上的應用—

（上册）

楊懷年
薛維忠　編著

正　中　書　局　印　行

大學用書

微積分

——在經濟學上的應用——

（上册）

楊懷年
薛維忠 編著

正中書局印行

中華民國六十四年十月臺初版
中華民國七十三年十一月臺初版第四次印刷

大學用書 微積分——在經濟學上的應用

上册　基本定價　精裝三元六角　平裝二元五角

(外埠酌加運費滙費)

編著者　楊懷年　薛維忠
發行人　蔣廉儒
發行印刷　正中書局

新聞局出版事業登記證　局版臺業字第〇一九九號(7085)維

(500)

正中書局
CHENG CHUNG BOOK COMPANY

地址：中華民國臺灣臺北市衡陽路二十號
Address：20 Heng Yang Road Taipei., Taiwan, Republic of China
經理室電話：3821145　編審部電話：3821147
業務部電話：3821153　門市部電話：3822214
郵政劃撥：九九一四號

海外總經銷
OVERSEAS AGENCIES

香港總經銷：集成圖書公司
總辦事處：香港九龍油蔴地北海街七號
電話：3—886172—4
日本總經銷：海風書店
地址：東京都千代田區神田神保町一丁目五六番地
電話：291—4345
東海書店
地址：京都市左京區田中門前町九八番地
電話：791—6592
泰國總經銷：集成圖書公司
地址：泰國曼谷耀華力路233號
美國總經銷：華強圖書公司
Address：41 Division St., New York, N.Y. 10002 U.S.A.
歐洲總經銷：英華圖書公司
Address：14 Gerrard Street London W.L. England
加拿大總經銷：嘉華圖書公司
Address：China Court, Suite 212, 208 Spadina Avenue Toronto Ontorio, CANADA M5T 2C2

序

微積分中文本教科書，已出版多種，甚少能有合適教本，用於法商學院各有關科系學生修讀微積分課程。但多數是適用於理，工科各系學生，而所解釋及應用例題等，多為工程，化學，物理等方面問題，對法商學院學生少有興趣，更能影響其學習成績。因針對此種情形，故編寫本書，以理論與應用並重，同時有關例題及習題，並詳予說明及討論，希能提高學生的學習興趣以收事半功倍之效。本書編印因時匆促，錯誤之處甚多，尙祈方家，隨時惠予指教，以便改正。甚幸！

編者謹識

中華民國六十四年九月

微積分——在經濟學上的應用

楊懷年　薛維忠同撰　民國64年　臺北市

正中書局印行

2冊　有圖　21公分

大學用書

1. 楊懷年撰　2.薛維忠撰

314.1

8667

目　次

第四章　導函數

第五章　超越函數

第六章　導函數的應用

第一章

基本數學

1-1 集合（Sets）

定義 一般說，集合是由一羣人、事、或物等所組成，在數學上這些人、事、物名爲元素（elements 或 members）。

例 1. 百家姓。

例 2. 方程式 $x^3-6x^2+11x-6=0$ 的解答。

例 3. 在 2 與 10 間的奇數（odd numbers）。

例 4. 全部偶數（even numbers）。

通常以大寫字母 $A, B, C, \cdots\cdots$ 表示集合，而小寫字母 $a, b, c, \cdots$ 表示集合的元素，其寫法是將元素放在括號 { } 內，以逗點分開。

例 5. 一集合 S 由五個元素 a, b, c, d, e 所組成，爲

$$S=\{a, b, c, d, e\}。$$

例 6. 如例 3，以 A 表示集合，如

$$A=\{3, 5, 7, 9\}。$$

當集合由不很多元素所組成，通常用以上方式表示，如由很多元素所組成，而不便列舉全部元素，則將集合內取一任意元素爲代表，並說明其特性。

例 7. 設集合 B 由全部奇數所組成，通常以 x 代表任一元素，爲

$$B=\{x\,|\,x\text{爲奇數}\}=\{x\,|\,x=1,3,5,7,9,\cdots\cdots\}。$$

有限集合與無限集合 (Finite and Infinite Sets)

集合內由有限個數的不同元素所組成，名爲有限集合。反之，爲無限集合，如例 1, 2, 3, 爲有限集合，而例 4 爲無限集合。

設 x 是集合 A 的元素，以符號 $\in$ 表示，爲

$$x\in A。$$

反之，y 不是集合 A 的元素，以符號 $\notin$ 表示，爲

$$y\notin A。$$

例 8. 如例 6, $3\in A$，但 $4\notin A$.

若說明兩個集合 A, B 相等，其充分必要的條件，是集合 A 內每一元素是集合 B 的元素，而集合 B 的每一元素，也是集合 A 的元素，並以下式表示:

$$A=B\Longleftrightarrow\begin{cases}\text{(i)}\ \ x\in A\Rightarrow x\in B,\ \text{且}\\ \text{(ii)}\ \ y\in B\Rightarrow y\in A。\end{cases}$$

例 9. 設 $A=\{1, 1. 2. 3, 3\}$ 和 $B=\{x\,|\,x^3-6x^2+11x-6=0\}$. 而 A 和 B 是相等集合。

若說集合 W 是集合 T 的子集合 (subset)，以符號 $\subset$ 表示，其充分必要條件，是集合 W 內每一元素是集合 T 的元素，而集合 T 內的每一元素不一定是集合 W 的元素。

例 10. 設 $T=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 和 $W=\{3, 5, 7, 9\}$ 而集合 W 是集合 T 的子集。卽 $W\subset T$.

以上說明集合與集合的關係 (relation)。現在說明集合的運算 (operation) 如下:

1. 聯集合 (Union of the sets) 以符號 $\cup$ 表示，兩集合 A, B

相聯，其結果爲一新集合，而所組成的元素必爲集合 A 或集合 B 的元素，如 $A \subset B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$。

2. **交集合** (Intersection of the sets)，以符號 $\cap$ 表示，兩集合 A, B 相交，其結果爲一新集合，而所組成的元素必爲集合 A, B 所共有，如 $A \cap B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$。

3. **迪卡爾積** (Cartesian Product) 兩集合 A, B 的迪卡爾積其結果爲一新集合，由全部有序對 (Ordered pairs) (或有序偶) 所組成，其序對的第一元素是集合 A 的元素，而第二元素是集合 B 的元素. 如

$$A \times B=\{(a, b) \mid a \in A \text{ 且 } b \in B\}。$$

4. **集合差** (Set diffcrence) 兩集合 A, B 的差以 $A-B$ 表示，其結果爲一新集合，而所組成的元素爲 A 集合之元素，但不爲 B 集合之元素，如 $A-B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$

空集合 (Empty set 或 Null set) 以 ϕ 表示，其集合內沒有元素，如集合 $B=\{x \mid x^2=4, x$ 爲奇數$\}$ 爲空集合。兩集合無共有元素，其相交後也是空集合。

例 11. 如例 5 及例 6，$S \cap A=\phi$.

例 12. 設 $A=\{1,2,3\}, B=\{a, b\}, C=\{2,3,4\}, D=\{1,2,3,4,5\}$。

$$A \cup C=\{1,2,3,4\}。$$

$$A \cap C=\{2,3\}。$$

$$A \cap B=\phi。$$

$$A \times B=\{(1, a),(1, b),(2, a),(2, b),(3, a),(3, b)\}。$$

$$D-A=\{4,5\}。$$

1-2 實數 (Real Numbers)

定義 1. 集合N是自然數（Natural Numbers）或正整數（Positive Integers）所組成的無限集合，爲

$$N=\{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\}。$$

2. 集合Z是由集合N的元素，連同零，及負整數所組成的無限集合，爲

$$Z=\{\cdots\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}。$$

3. 集合Q爲有理數的集合，是由比值或分數的元素所組成，分母或除數不等於零的無限集合，爲

$$Q=\left\{\frac{p}{g}\middle|\, p\in Z, g\in N\right\}。$$

4. 實數集合R是由集合Q的元素，連同不是集合Q的元素，即無理數，如 $\pi, \sqrt{2}, \cdots\cdots$等所組成的無限集合。

以上四者的關係爲 $N\subset Z\subset Q\subset R$。

至於實數的幾何意義，通常以直線上定一0爲原點（Origin），然後以等量爲單位（Unit），分成很多點，在原點之右邊爲正數，左邊爲負數，如圖 1-1 即實數線（real numler line）。

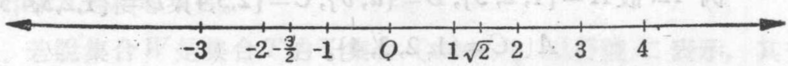

圖 1-1

設點在原點右邊三單位，即對應一實數 3，若左邊 $1\frac{1}{2}$單位，即對應一實數 $-1\frac{1}{2}$，若無理數也可依其單位指明其點在實數線上的位置，如$\sqrt{2}$。所以有理數與無理數爲實數無限集合，其實數線上的點與實數一一對應。

設 a, b, c, d 爲實數，將實數有關公理分述如下:

1. 相等公理 (Axioms of Equality)

E_1 $a=a$, (自反 Reflexive)

E_2 設 $a=b$ 必 $b=a$, (對稱 Symmetric)

E_3 設 $a=b$, $b=c$ 必 $a=c$ (傳遞 Transitive 或遞移)

E_4 設 $a=b$, 必 $a+c=b+c$. 和 $ac=bc$。

E_5 設 $a=b$, $c=d$, 必 $a+c=b+d$, 和 $ac=bd$。

2. 相加公理 (Axioms of Addition)

A_1 存在唯一的實數 c, 即 $a+b=c$ 。(封閉 Closure)

例 $2+3=5$ 仍是實數。

A_2 $a+b=b+a$。 (交換 Commutative)

例 $2+3=3+2$。

A_3 $(a+b)+c=a+(b+c)$。(結合 Associative)

例 $(2+3)+4=2+(3+4)$。

A_4 實數有一個元素爲零 0, 與每一實數相加等於此實數。

(加法恒等元素 Additive Identity)

如 $a+0=a$。

例 $2+0=2$。

A_5 對每一實數 a, 必有一唯一元素 $-a$, 使 $a+(-a)=0$

(加法反元素 Additive Inverse)

例 $2+(-2)=0$。

3. 乘法公理 (Axioms of Multiplication)

M_1 存在唯一的實數, 即 $ab=c$ 。(封閉)

例 $2\cdot 3=6$ 仍是實數。

M_2 $a\cdot b=b\cdot a$。 (交換)

例 $2\cdot 3=3\cdot 2$。

M_3 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$。 （結合）

例 $(2\cdot3)\cdot4=2\cdot(3\cdot4)$。

M_4 實數有一個元素爲1, 與每一實數 a 相乘仍等於此實數。

（乘法恒等元素 Multiplicative Identity）

如 $1\cdot a=a$。

例 $1\cdot2=2$。

M_5 對每一不爲零的實數 a，必有唯一的實數 a^{-1} （又名倒數 Reciprocal），使 $a\cdot a^{-1}=a\cdot\dfrac{1}{a}=1$。

（乘法反元素 Multiplicative Inverse）

例 $3\cdot\dfrac{1}{3}=3\cdot3^{-1}=1$。

. **加法和乘法公理** (Axiom of Addition and Multiplication)

D $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ 或 $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$。

（分配 Distributive）

例 1. 證明 $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$, $c\neq0$。

【證】 $\dfrac{a+b}{c}=(a+b)\cdot c^{-1}$ (M_5)

$=a\cdot c^{-1}+b\cdot c^{-1}$ (D)

$=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$。

例 2. 設 $a+c=b+c$， 證明 $b=c$。

【證】 $-c=-c$， $(E_1$ 和 $A_5)$

$(a+c)+(-c)=(b+c)+(-c)$, (E_4)

$a+(c+(-c))=b+(c+(-c))$, (A_3)

$a+0=b+0,$ (A_5)

$a=b$。 (A_4)

例 3. 設 $a\cdot c=b\cdot c$, $c\neq 0$, 證明 $a=b$。

【證】 證法與例2同。

例 4. 證明 $a\cdot 0=0$, $a\neq 0$

【證】 $a+0=a,$ (A_4)

$=a\cdot 1,$ (M_4)

$=a\cdot(1+0),$ (A_4)

$=a\cdot 1+a\cdot 0,$ (D)

$=a+a\cdot 0$。

$\therefore a\cdot 0=0$。 (例2)

習　題　1—1

1. 下列各集合，說明是有限集合或無限集合:

(a) $A=\{$生存在世界上的人$\}$。

(b) $B=\{$所有大於 2，小於 10 間的實數$\}$。

(c) $C=\{$所有大於 1，小於 100 間的整數$\}$。

(d) $D=\{2x-1\mid x\in N\}$。

(e) $E=\{1,2,3,1,2,3,\cdots\cdots\}$。

(f) $F=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\cdots\}$。

2. 是非題並說明理由:

(a) $\{2\}\in\{6,3,2\}$。　(b) $\frac{1}{6}\in\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\cdots\right\}$。

(c) $\{1,2,3,4\}\subset\{1,2,3,4\}$。　(d) $3=\{3\}$。

(e) $\frac{8}{0.5}$是有理數。　(f) $4\subset\{4\}$。

(g) $Q=\left\{\frac{p}{g} | p, g \in Z\right\}$。 (h) $0 \in \{x | x \in N\}$。

(i) $\{-1, 1\} \subset N$。 (j) $\{x | x \in N\} = \{y | y \in N\}$。

3. 設 $A=(1,3)=\{x | 1<x<3\}$, $B=[4,5]=\{x | 4 \leq x \leq 5\}$ 和 $C=[4,6]$ $=\{x | 4 \leq x \leq 6\}$。

求 (a) $A \cup B$。(b) $B \cup C$。(c) $A \cap B$。(d) $B \subset C$。(e) $A \cup B \cup C$。

4. 將下列敍述寫出集合形式:

(a) 所有負整數小於 0。

(b) 一個星期有七天。

(c) 數 2, 4, 6, 8。

(d) 擲一骰子所出現的點數。

(e) 擲兩個硬幣所出現的正反面（正面 Head，反面 Tail）。

5. 證明下列各題:

(a) 設 $a \cdot b = 0$ 證 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $a=0, b=0$。

(b) $(-a) \cdot b = -a \cdot b$。

(c) $-(b+c)=(-b)+(-c)$。

(d) $1/(1/a)=a$。

(e) $a \cdot (b-c)=a \cdot b - a \cdot c$。

(f) $\left(\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{c \cdot a}$

6. 設 x 爲偶數，證 x^2 爲偶數。

1-3 不等量 (Inequalities)

若實數 a 小於實數 b，以符號 $<$ 表示，$a<b$，同時 $a-b<0$ 必爲負數。反之，若實數 c 大於實數 d，以符號 $>$ 表示，$c>d$，同時 $c-d>0$ 必爲正數。若實數 a 小於或等於實數 d，以符號 $\leq$ 表示，$a \leq b$。

在實數線上，a 的位置在 b 的左邊，如圖 1-2，則說明實數 a 小於實數 b。

圖 1-2

集合內所有元素均爲實數而在 a 與 b 之中間，但 a，b 除外，故又名開區間 (open interval) 以集合 $\{x \mid a < x < b\}$ 或 (a, b) 表示。若包含 a, b 則名爲閉區間 (closed interval) 以集合 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 或 $[a, b]$ 表示。另有無限大符號∞和$-\infty$，現舉數種區間如下:

1. $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$。
2. $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$。
3. $(a, \infty) = \{x \mid a < x\}$。
4. $[a, \infty) = \{x \mid a \leq x\}$。
5. $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$。
6. $(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$。
7. $(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in R\}$。

設 a, b, c, b 爲實數，現說明有關不等量運算的基本性質如下:

I_1 若 $a, b \in R$，必有其一，$a > b$，$a = b$ 或 $a < b$ 成立。

(三分律 trichotomy law)

I_2 若 $a < b$, $a = c$ 必 $c < b$。

I_3 若 $a < b$, $b < c$ 必 $a < c$。

I_4 若 $b < b$, 必 $a + c < b + c$, $c > 0$ 或 $c < 0$。

I_5 若 $a < b$, $c > 0$ 必 $ac < ac$ 和 $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$。