XIANXING DAISHU

普通高等教育经济管理科学规划教材

线性代数

江海峰　吴小华　编著

中国科学技术大学出版社

普通高等教育经济管理科学系列教材

线 性 代 数

江海峰　吴小华　编著

中国科学技术大学出版社

·合　肥·

内 容 简 介

本书是普通高等教育经济学学科门类和管理学学科门类本科数学基础教材之一，是依据经济和管理类专业人才培养目标的要求，为提升本科教学水平而编写的教材. 为此编写了 6 章内容，其中第 1 章、第 2 章分别介绍了行列式与矩阵这两个工具；第 3 章主要介绍应用行列式与矩阵这两个工具来解齐次线性方程组；第 4 章是把前 3 章的知识应用到方阵特别是实对称矩阵的对角化问题中；第 5 章继续分析实对称矩阵及其对应的二次型的相关问题. 以上每章后面都配有适当数目和难度的习题，部分习题来自最近几年的考研真题，并配有答案，以满足不同层次读者的学习要求. 第 6 章则介绍如何使用 MATLAB 软件完成前 5 章中的计算问题.

本教材可供经济和管理类各专业本科教育教学使用，也可以作为其他相关人员的学习与参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/江海峰，吴小华编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2012. 4
ISBN 978-7-312-02981-3

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①江…　②吴…　Ⅲ. 线性代数　Ⅳ. O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 005921 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
网址：http://press. ustc. edu. cn
印刷　合肥市银联彩色印务有限责任公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　13. 75
字数　270 千
版次　2012 年 4 月第 1 版
印次　2012 年 4 月第 1 次印刷
定价　20. 00 元

前　　言

“线性代数”是一门非常实用的工具性学科，虽然对学习者的数学基础要求较低，但这门课在经济管理类专业的后续课程如“概率论与数理统计”、“运筹学”、“计量经济学”、“应用多元统计”的学习中发挥着重要作用. 为了适应新世纪的教学要求，特别是在我校经管类各专业实现一本招生以后，我们认识到应该将多年的教学经验加以总结，编写一本“线性代数”教材，于是有了本书的出版. 在编写这本教材的过程中，我们坚持了以下原则：

(1) 教材的编写紧密结合“新世纪高等教育教学改革工程”中的本科教育教学改革立项项目研究的成果，坚持把教材建设纳入本科教育教学改革的研究中. 实际上，本教材的很多内容是在经管试点班“线性代数”课程多年教学工作中总结而成的.

(2) 教材的编写尽可能满足多层次学习水平的需要，除了介绍基本教学内容以外，对于较难的定理我们在附录中尽可能给出严格的证明，对于一些常用的重要结论，我们也尽可能列出，为以后考研的学生打下坚实的基础.

(3) 教材的编写尽可能与现代先进的计算技术相结合. 线性代数中涉及大量的计算，我们认为教学的目的是让学习者掌握课程的思想和精髓，复杂的计算不是教学的最终要求，为此，我们单独编写了一章介绍如何使用 MATLAB 软件来解决“线性代数”各个章节中内容的计算，我们觉得这是一种有益的尝试.

根据以上指导思想，我们的教材力求体现如下特色：

(1) 新颖性——在介绍“线性代数”课程基本内容的基础上，我们力求选择一些代表性的例题和习题，特别是一些考研真题的引入，增强了教学和学习的实战性. 在某些定理的证明过程中另辟蹊径，采用简捷的证明方式替代传统烦琐的表达方式，如第 3 章中向量组之间线性关系的证明就体现了这点.

(2) 现代性——在介绍“线性代数”课程基本内容的基础上，我们专门单独拿出一章的内容介绍 MATLAB 软件在“线性代数”教学中的应用，这在目前的流行教材中鲜有先例.

(3) 实用性——本教材内容介绍上注重多层次学习水平的要求，且例题来源代表性强，习题部分中更是选取了近几年的部分考研真题，因此既满足实际教学需要，又可以作为了解考研动向的参考资料，能够满足经济管理类各个相关专业

教学的需要.

本书共分6章.第1章为行列式,核心内容是行列式的计算,为此着重介绍了行列式的定义、性质以及展开定理,最后介绍了行列式在求解一类特殊线性方程组中的应用,这部分由江海峰编写.第2章为矩阵,核心内容围绕矩阵的计算展开,主要介绍了矩阵的概念、分类、加减法运算、乘法运算、求逆运算、转置运算、幂运算和求秩运算,同时还介绍了初等变换定理等内容,这部分由崔立志编写.第3章为线性方程组,核心内容围绕线性方程组的求解和解的表示而展开,主要介绍了线性方程组解存在的条件、向量的定义、向量的线性相关与线性无关的定义与判定定理、向量组之间的关系、解的结构与通解的表示等,这部分由江海峰编写.第4章为相似矩阵与矩阵对角化,核心内容围绕矩阵对角化的条件与对角化方法而展开,包括矩阵特征值、特征向量、相似形以及对角化的条件,介绍了实对称矩阵的对角化问题,这部分由张莉编写.第5章为二次型,核心内容围绕二次型的标准型和规范型而展开,包括二次型的概念、如何化二次型为标准型和规范型以及二次型的有定性及其判定定理和二次型的应用,这部分由吴小华编写.第6章介绍了MATLAB软件在前5章中的应用,这部分由吴小华编写.全书由江海峰负责统稿.

本书编写过程中得到了经济学院领导的关注和支持,庄健老师对本书的编写提出了宝贵的意见,中国科学技术大学有关专家对本书的出版也给予了大力支持,在此一并表示衷心的感谢!

限于编者的水平,书中疏漏和不当之处在所难免,恳请同行、专家、学者、读者不吝赐教.

编　者

2011年9月

目　　录

第 1 章　行　列　式

本章将介绍线性代数中的两个重要工具之一——行列式.行列式在后续章节的分析中起着非常重要的作用.主要内容包括行列式的定义与计算、行列式的性质、行列式的展开定理和在线性方程组求解中的应用.

1.1　行列式的定义与相关概念

1.1.1　行列式的引出

首先给出一阶、二阶行列式及其计算结果如下：

$$|a_{11}| = a_{11} \tag{1.1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.2}$$

三阶行列式展开的结果比较复杂,其结果为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.3}$$

对于三阶行列式还可以根据沙路法进行计算,实际上更为方便的计算方法如图 1.1 所示.

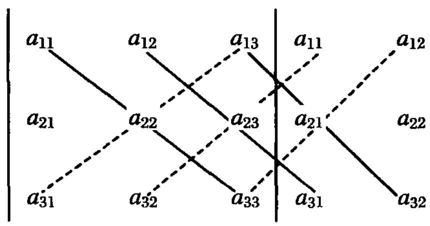

图 1.1

在图 1.1 中，我们将三阶行列式的第一列和第二列重新排在第三列的右边，这样，这些元素正好构成一个矩形，同时依次构成三个正方形，其中三条实线我们称之为三个正方形的主对角线，而三条虚线我们称之为三个正方形的副对角线．显然，三条主对角线上的九个元素构成三项，而副对角线上的九个元素也构成三项．

通过上述三个行列式，我们可以总结归纳出以下共同的特点：

(1) 从左边的外在形式看，行列式由一些量 a_{ij} 和运算符号"| |"构成，且行数等于列数；

(2) 从右边的实际内容看，行列式定义了一种特殊的运算规则；

(3) 从最终结果看，行列式的运算结果表现为一个数；

(4) 从右边含有运算的项数看，这些项的总数为 $n!$；

(5) 从右边每项所带的符号看，当行列式阶数等于或超过 2 时，显然正负项都有，而且各占一半，为 $n!/2$ 项；

(6) 从右边每项的构成来看，每项都由来自不同行和列的元素构成，也就是说，相同行或列的元素不能同时出现在同一项中；

(7) 从右边每项下标的排列来看，构成每项的各个元素的第一个下标正好按照自然数顺序排列，而第二个下标对应 n(为 2 或 3)个自然数的各种排列情形，这也解释了为什么行列式的展开项数有 $n!$ 项．

通过以上分析，我们可以很自然地把行列式从一阶、二阶、三阶推广到 n 阶的情形，n 阶行列式也自然满足上述结论．下面我们正式给出 n 阶行列式的定义．

定义 1.1 由 n^2 个数 a_{ij} 和运算符号"| |"构成的 n 行 n 列的运算记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，常记为 $D(n)=|a_{ij}|$，其中数 i 为行标，数 j 为列标，其取值均为 $1,2,\cdots,n$．

显然，把上述第(7)条的特点推广到 n 阶行列式的情形，如果不考虑其带有的符号，那么 n 阶行列式的一般项构成为 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ki_k}\cdots a_{ni_n}$，其中 $i_1,i_2,\cdots,i_k,\cdots,i_n$ 为 $1,2,\cdots,k,\cdots,n$ 组成的 n 阶排列的各种情况；而整个行列式的值是考虑符号后所有这些项的代数和．下面着重来解决各项符号确定的规则．

1.1.2 逆序与互换定理

逆序及与逆序有关的定义如下：

定义 1.2 对于一个 n 阶排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，如果有 $i_k>i_j$，且 i_k 排在 i_j 之前，则称 i_k 与 i_j 构成一个逆序.

定义 1.3 对于一个 n 阶排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，把所有可能的逆序个数进行加总得到的结果称为逆序总数，通常记做 $N(i_1,i_2,\cdots,i_n)$.

定义 1.4 一个 n 阶排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，其逆序总数 $N(i_1,i_2,\cdots,i_n)$若为奇数，称为奇排列，其逆序总数 $N(i_1,i_2,\cdots,i_n)$若为偶数，称为偶排列.

注意 任何一个 n 阶排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，要么是奇排列，要么是偶排列.

【例 1.1】 求排列 1,3,4,7,8,2,6,9,5 的逆序总数.

解 首先从第一个数 1 开始，它最小且排在第一位，因此逆序数为 0；对于 3 和 4 来说，它们与数 2 都构成一个逆序，与其他剩下的数不构成逆序，因此逆序数各为 1；7 分别和 2,5,6 构成逆序；8 分别和 2,5,6 也构成逆序；6,9 与 5 都构成一个逆序，因此逆序总数为 10.

【例 1.2】 求排列 $n,n-1,n-2,\cdots,2,1$ 的逆序总数，并判断排列的奇偶性.

解 显然第一个数 n 与后面的任何一个数都构成一个逆序，共有 $n-1$ 个逆序，第二个数 $n-1$ 与其后面的数构成 $n-2$ 个逆序，以此类推，得到逆序总数为 $\sum_{i=1}^{n-1} i = n(n-1)/2$. 其奇偶性的几种情况具体为

$$N = n(n-1)/2 = \begin{cases} 2k(4k-1) & (n = 4k \text{ 时}) \\ (2k-1)(4k-1) & (n = 4k-1 \text{ 时}) \\ (2k-1)(4k-3) & (n = 4k-2 \text{ 时}) \\ 2(k-1)(4k-3) & (n = 4k-3 \text{ 时}) \end{cases}$$

其中 $N=N(n,n-1,n-2,\cdots,2,1)$表示逆序总数符号. 可见第一种和第四种对应的逆序总数为偶数，表示偶排列，第二种和第三种对应的逆序总数为奇数，表示奇排列.

在总结行列式展开的特点中，我们提到了行列式每项的行标是按照自然数顺序排列的，实际上这不是绝对的，行标也可以是一个任意排列！为了讨论这种情况，我们首先给出互换的定义.

定义 1.5 对于任意一个 n 阶排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，将其中任意两个元素 i_k,i_j 调换位置，而保持其他元素不动，那么称这个操作为对 n 阶排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的一次互换.

根据这个定义，互换会改变元素的相对位置，因此必然会影响到逆序的构成情况，这里，我们只关心逆序总数的奇偶性变动，下面的定理给出了互换对排列奇偶性的影响.

定理 1.1 对一个 n 阶排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 进行一次互换，则排列的奇偶性在互换前后会发生改变.

证明 (1) 首先考虑一种比较简单的情形,设互换的对象 i_k,i_j 本身相邻,即排列的形式为 A,i_k,i_j,B,其中 A,B 表示其他元素,互换后为 A,i_j,i_k,B. 显然互换后只有 i_k,i_j 之间的位置发生改变,因此逆序数要么增加 1 要么减少 1;而它们分别与其他元素 A,B 的相对位置没有发生任何改变,因此这部分逆序总数不会发生变化,且其他元素 A,B 之间的相对位置在互换前后也没有改变,因此这部分逆序总数也没有改变,所以对于这种相邻型的互换,互换前后逆序总数会增加 1 或减少 1,因此逆序总数的奇偶性发生改变.

(2) 其次考虑 i_k,i_j 不相邻的情形,不失一般性,假设它们中间有 s 个元素,形式为

$$A,i_k,i_{k+1},i_{k+2},\cdots,i_{k+s-1},i_{k+s},i_j,B$$

则此时一步互换对调 i_k,i_j,可以等价地通过若干步相邻项两两互换来实现. 首先将 i_k 与 i_{k+1} 互换,得到

$$A,i_{k+1},i_k,i_{k+2},\cdots,i_{k+s-1},i_{k+s},i_j,B$$

再将 i_k 与 i_{k+2} 互换,以此类推,当进行 $s+1$ 次相邻互换后便得到如下的结果:

$$A,i_{k+1},i_{k+2},\cdots,i_{k+s-1},i_{k+s},i_j,i_k,B$$

再反过来将 i_j 与前面的 i_{k+s} 等元素进行相邻互换,当进行 s 次互换以后得到如下结果:

$$A,i_j,i_{k+1},i_{k+2},\cdots,i_{k+s-1},i_{k+s},i_k,B$$

这也是一次互换 i_k,i_j 的最终结果. 因此总共进行了 $2s+1$ 次的相邻互换. 根据(1)的结论,每进行一次这种相邻互换就改变逆序总数的奇偶性,由于 $2s+1$ 为奇数,从而逆序总数的奇偶性进行了奇数次改变,从而也会改变原来的奇偶性. 于是我们有如下推论:

推论 一个 n 阶排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 进行奇数次互换,则排列的奇偶性在互换前后会发生改变;若进行偶数次互换,则排列的奇偶性在互换前后不会发生改变.

1.1.3 正负号的决定与行列式的定义展开式

为了讨论 n 阶行列式展开后为什么有一半的项数带有正号,一半带有负号,首先要证明如下的定理:

定理 1.2 对于任意的 n 阶排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$,其奇偶排列的个数各占一半,都为 $n!/2$ 个.

证明 不妨设 n 阶排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中奇排列数为 p,偶排列数为 q,则有 $p+q=n!$. 如果对 p 个奇排列各进行一次互换,则 p 个奇排列都转换为偶排列,并且这些偶排列都被 q 个偶排列所包含,因此有 $p\leqslant q$ 成立;另一方面,可以对 q 个偶排列各进行一次互换,则 q 个偶排列都转换为奇排列,并且这些奇排列都被

p 个奇排列所包含,因此有 $q \leqslant p$ 成立.综上所述,必有 $p=q=n!/2$ 成立.

下面我们以定理的形式给出行列式各项所带正负号的约定.

定理 1.3 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

按照定义展开后,其通项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_kj_k}\cdots a_{i_nj_n}$ 的正负号由其行标和列标分别构成排列的逆序总数的和的奇偶性确定,若为奇数,则为负号,若为偶数,则为正号,即通项的正负号为 $(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_k,\cdots,i_n)+N(j_1,j_2,\cdots,j_k,\cdots,j_n)}$.

推论 1 当通项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_kj_k}\cdots a_{i_nj_n}$ 经过适当互换位置使行标按照自然数顺序排列,即将通项变换为 $a_{1l_1}a_{2l_2}\cdots a_{kl_k}\cdots a_{nl_n}$,那么其正负号完全由列标构成排列的奇偶性决定,即正负号为 $(-1)^{N(l_1,l_2,\cdots,l_k,\cdots,l_n)}$.

证明 由定理 1.3 可以知道,通项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_kj_k}\cdots a_{i_nj_n}$ 的正负号是由 $(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_k,\cdots,i_n)+N(j_1,j_2,\cdots,j_k,\cdots,j_n)}$ 来决定的.不失一般性,不妨设 $i_k=1$,互换 $a_{i_1j_1}$ 与 $a_{i_kj_k}$ 的位置,则互换后的通项为 $a_{i_kj_k}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_1j_1}\cdots a_{i_nj_n}$,显然该通项值的大小没有变化,而正负号由 $(-1)^{N(i_k,i_2,\cdots,i_1,\cdots,i_n)+N(j_k,j_2,\cdots,j_1,\cdots,j_n)}$ 来决定.因为

$$(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_k,\cdots,i_n)+N(j_1,j_2,\cdots,j_k,\cdots,j_n)} = (-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_k,\cdots,i_n)}(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_k,\cdots,j_n)}$$

$$(-1)^{N(i_k,i_2,\cdots,i_1,\cdots,i_n)+N(j_k,j_2,\cdots,j_1,\cdots,j_n)} = (-1)^{N(i_k,i_2,\cdots,i_1,\cdots,i_n)}(-1)^{N(j_k,j_2,\cdots,j_1,\cdots,j_n)}$$

由于行标和列标排列的奇偶性在互换前后同时发生变化,因此有

$$(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_k,\cdots,i_n)+N(j_1,j_2,\cdots,j_k,\cdots,j_n)} = (-1)^{N(i_k,i_2,\cdots,i_1,\cdots,i_n)+N(j_k,j_2,\cdots,j_1,\cdots,j_n)}$$

这表明互换前后没有改变通项符号.类似可以找到行标为 2 的元素,再将它与 $a_{i_2j_2}$ 互换,以此类推,最终必然将行标按照自然数顺序排列,此时该项的正负号完全由列标排列逆序总数的奇偶性决定.以后我们通常都是将行列式按定义展开后行标依自然数顺序排列.这样我们又有如下推论:

推论 2 当 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

展开后,其计算公式为

$$D = \sum_{l_1,l_2,\cdots,l_k,\cdots,l_n} (-1)^{N(l_1,l_2,\cdots,l_k,\cdots,l_n)} a_{1l_1}a_{2l_2}\cdots a_{kl_k}\cdots a_{nl_n} \tag{1.4}$$

这里的求和是对由自然数 $1,2,\cdots,n$ 构成的 n 阶排列 $l_1,l_2,\cdots,l_k,\cdots,l_n$ 所有 $n!$ 种可能求和,这个通项公式在下节的行列式性质证明过程中将起着重要作用.

1.1.4 利用行列式的定义计算行列式

由行列式的定义展开式(1.4)可知,如果按照这种方法来计算行列式,当行列式的阶数 n 较大时,展开的项数将很大,计算将十分烦琐,但对于一些特殊的行列式,仍然可以使用定义来计算,特别是 a_{ij} 中含有很多零元素时,计算结果将大为简化.

【例 1.3】 证明:如果 n 阶行列式中为零的元素多于 n^2-n 个,则该行列式必定为零.

证明 由于 n 阶行列式中所有元素总数为 n^2 个,而为零的元素又多于 n^2-n 个,那么非零元素必定少于 n 个,这意味着式(1.4)所示的通项中至少有一个零元素存在,因此通项为零,所以行列式必为零.

定义 1.6 n 阶行列式的以下两种结构:

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

分别称为下三角行列式和上三角行列式.特别地,主对角线以外的元素都为零时,称之为对角行列式,结构为

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【例 1.4】 计算上三角行列式 D_1 的值.

解 按照行列式的定义,如果遵从行标按照自然数顺序来排列,则在第一行取值时,显然非零的取值为第一列的元素 a_{11},由于第一列的其他元素不可能再出现在该项中,所以删除第一行第一列,类似地,在第二行取值时,非零的取值为第二列的元素 a_{22},再删除第二行第二列,以此类推,直到最后一行时,可取的非零元素为第 n 列的 a_{nn}.因此该行列式按照定义展开后,非零的只有一项,为 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,显然该项行标、列标逆序总数都为零,因此符号为正号,故有 $D_1=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

仿照这种分析,有 $D_2=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,$D_3=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 成立.另外还存在三个与上述三个行列式结构相似的行列式,分别为

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix},\quad D_5=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_6 = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

【例 1.5】 计算下三角行列式 D_5 的值.

解 采用类似例 1.4 的分析方法,第一行非零的元素为 a_{1n},删除第 n 列元素,第二行非零的元素为 a_{2n-1},再删除第 $n-1$ 列元素.一直下去,第 n 行的非零元素为a_{n1}.因此该行列式按照定义展开后,非零的只有一项,为 $a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$,显然该项列标逆序总数为 $n(n-1)/2$,故有 $D_5=(-1)^{n(n-1)/2}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$.

同样有 $D_4=D_6=(-1)^{n(n-1)/2}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$成立.

显然,利用行列式的定义计算行列式的范围非常小,只对那些含有很多零元素的行列式有效,对于一般的行列式需要使用其他方法进行计算,这包括使用行列式的性质和行列式的展开定理,下一节将介绍行列式的运算性质.

1.2 行列式的性质

从行列式定义展开式(1.4)可以看出,行列式展开后表现为一系列项的代数和,而每项均为来自不同行不同列的 n 个元素的乘积,因此行列式最终表现为数的四则混合运算,而数的四则混合运算具有一些运算性质,这些运算性质使得行列式在展开之前也有一些相应的性质.本节将讨论这些性质,以便简化行列式的计算.

1.2.1 行列式的转置与取值的不变性

定义 1.7 将行列式 $D=|a_{ij}|$ 的行与列互相交换所得到的行列式称为D 的转置行列式,记为 D^{T} 或者 D'.

D^{T} 的结构为

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 1.4 行列式 $D=|a_{ij}|$ 与其转置行列式D^{T} 具有相同的值.

证明 根据式(1.4)有

$$D=\sum_{l_1,l_2,\cdots,l_k,\cdots,l_n}(-1)^{N(l_1,l_2,\cdots,l_k,\cdots,l_n)}a_{1l_1}a_{2l_2}\cdots a_{kl_k}\cdots a_{nl_n}$$

其中通项 $a_{1l_1}a_{2l_2}\cdots a_{kl_k}\cdots a_{nl_n}$ 在其转置行列式 D^{T} 中变为 $a_{l_11}a_{l_22}\cdots a_{l_kk}\cdots a_{l_nn}$，而其正负号仍由 $(-1)^{N(l_1,l_2,\cdots,l_k,\cdots,l_n)}$ 来确定，因此有

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{l_1,l_2,\cdots,l_k,\cdots,l_n}(-1)^{N(l_1,l_2,\cdots,l_k,\cdots,l_n)}a_{l_11}a_{l_22}\cdots a_{l_kk}\cdots a_{l_nn}$$

D 与 D^{T} 两者具有相同的通项，只不过前者是行标按照自然数顺序排列，在列标中选取元素；而后者是将列标按照自然数顺序排列，在行标中选取元素，因此两者是相等的，正负号也完全相同. 于是有如下推论：

推论 行列式行的性质与列的性质相同.

这个推论表明，对行进行什么样的操作，也可以对列进行同样的操作. 以后我们通常只对行性质进行证明，而省略对列性质的证明.

1.2.2 行列式换行(列)与取值的变号性

定义 1.8 将行列式 $D=|a_{ij}|$ 的任意两行(列)进行互换，称为行列式的换行(列).

对行列式进行换行操作时，其列标保持不变，不妨将 D 的第 i 行和第 k 行进行交换，得到的行列式记为 $D(k,i)$，结构为

$$D(k,i)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-2} & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn-2} & a_{kn-1} & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in-2} & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn-2} & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为明确起见，将原先的行列式记为 $D(i,k)$.

定理 1.5 将行列式 $D(i,k)$ 换行变为 $D(k,i)$ 后，有 $D(i,k)=-D(k,i)$.

证明 根据式(1.4)有

$$D(i,k)=\sum_{l_1,l_2,\cdots,l_i,\cdots,l_k,\cdots,l_n}(-1)^{N(1,2,\cdots,i,\cdots,k,\cdots,n)+N(l_1,l_2,\cdots,l_i,\cdots,l_k,\cdots,l_n)}\times a_{1l_1}a_{2l_2}\cdots a_{il_i}\cdots a_{kl_k}\cdots a_{nl_n}$$

而

$$D(k,i)=\sum_{l_1,l_2,\cdots,l_i,\cdots,l_k,\cdots,l_n}(-1)^{N(1,2,\cdots,k,\cdots,i,\cdots,n)+N(l_1,l_2,\cdots,l_i,\cdots,l_k,\cdots,l_n)}\times a_{1l_1}a_{2l_2}\cdots a_{kl_i}\cdots a_{il_k}\cdots a_{nl_n}$$