高校21世纪师范类规划教材

高等数学

（上册）

杨开春
张富林　主编
赵临龙

陕西人民出版社

高校21世纪师范类规划教材

1585301

013/493

高等数学

（上册）

主　编　杨开春　张富林　赵临龙
副主编　李海龙　李军庄
参　编　韩靖寇　刁丽华　于　萍
　　　　李大可　杨花娥　胡洪萍
　　　　窦家维　王昭海　杜贵春
　　　　郝东卫　李　超　张云孝

徐州师大图书馆

23247660

陕西人民出版社

（陕）新登字 001 号

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/杨开春，张富林，赵临龙主编. —西安：陕西人民出版社，2003
高校 21 世纪师范类规划教材
ISBN 7-224-06452-1
Ⅰ.高...　Ⅱ.①杨...②张...③赵...　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 007249 号

高校 21 世纪
师范类规划教材

高等数学（上下册）

主　　编　杨开春　张富林　赵临龙
责任编辑　韩　琳
封面设计　姚　锋
版式设计　陈　涛

出版发行　陕西人民出版社
购书电话　（029）87205074　87205054　87205197
地　　址　西安北大街 131 号
邮政编码　710003
经　　销　陕西省新华书店
印　　刷　西安正华印刷科技有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　35.75
插　　页　4
字　　数　817 千字
版　　次　2003 年 7 月第 1 版　　2004 年 3 月第 2 次印刷
印　　数　5001-10000
书　　号　ISBN 7-224-06452-1/O·10
定　　价　50.00 元

高校21世纪师范类规划教材
编　委　会

编委会主任	郝　瑜　朱　玉
编委会副主任	姚书志　李晓锋
编委会委员	罗增儒　苗庆霞　黄新民
	傅志军　王玉鼎　李道尧
	杨小庆　张富林　罗文谦
	高荣发　李宗领

出版说明

这套《高校21世纪师范类规划教材》，是适应培养21世纪社会经济发展所需要的人才，必须有大量、新型、合格的人民教师的需要，由陕西人民出版社发起，陕西省教育厅和陕西人民出版社共同组织和策划，省内十余所师范院校上百位知名专家学者和骨干教师联合编写的。

全套教材第一批共15本，分别为：《普通教育学》《心理学》《大学语文》《高等数学》《大学体育与健康教育》《计算机应用基础》（文科）《计算机应用基础》（理科）《人文科学概论》《自然科学概论》《现代教育技术》《艺术欣赏》《行为科学》《大学物理学》（上下册）《大学物理实验》以及《〈普通教育学〉辅助教材》，涵盖了师范院校各专业大部分基础课程，集中体现了师范院校学科建设和教材建设的最新科研成果和未来发展趋势，是一套立足师范教育，着眼新型教师培养，追踪未来，不断更新教材内容和体系，具有长期应用价值和品牌效应的师范类新型教材。

这套教材与其他同类教材相比，主要有以下三个突出特点：

（1）注重对学生各种能力的培养。大量研究和社会现实表明，进入21世纪，随着科学技术的飞速发展，旧的产业不断融合和新型产业大量涌现，使得社会越来越重视，也越来越需要大量具有多思维能力、创新能力和动手能力的复合型、应用型人才。师范院校是教师的摇篮，教师是人才成长的工程师。没有适应这一要求的合格教师，就不可能培养出大量符合社会需要的新型人才。教材在这方面进行了有益的探索，注重加强对学生思维能力、创新能力和动手能力的培养。

（2）强调“三基”教育。“三基”教育主要是指教材的编写主要围绕“基本概念、基本理论、基本技能”这三个最基本的方面来进行。凡是专业课要深入讲述的内容，教材中均不作展开，以免与专业课冲突。

（3）坚持“厚基础、宽口径、高素质”的编写原则。专业基础课的学习是学生进入大学生活后，从中学阶段过渡到大学阶段的门槛，是学好专业课，最终成为社会需要的人才必须经过的重要一环。能不能选用好的教材，能不能坚持正确的培养方向，直接决定着培养出的学生，能不能真正成为社会所需要的复合型、应用型人才。基于这样的认识和考虑，根据未

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

来的培养方向，在教材的编写中，我们始终贯彻“厚基础，宽口径、高素质”的编写原则，使学生通过专业基础课的学习，具有广博的知识结构和扎实的基础理论功底，从而为以后专业课的学习，打下牢固的专业基础。除此之外，教材还在内容的选取、体系的编排、设计的风格上进行了一些探索，目的是使全套教材不仅在内容，而且在形式上都有所创新、有所发展。

为了编写出一套适合师范院校特点、内容新颖、体系创新、适应21世纪师范院校教学要求的新型教材，各学科的专家、学者多次开会研讨，陕西省教育厅和陕西人民出版社的有关领导也多次与会予以指导，付出了辛勤的汗水和努力。陕西省教育厅还专门为此发文，要求各相关院校积极支持这套教材的编写，并向各院校推荐使用。各有关院校的领导和教务处也积极支持这套教材的编写工作。有关院校的领导还亲自参加有关教材的编写。在此，我们一并表示诚挚的感谢。

编写一套适应21世纪教学要求的师范类新型教材，既是师范院校广大师生的强烈愿望，也是我们追求的目标。但由于时间仓促，水平有限，书中错漏之处在所难免，敬请有关专家批评指正，以便该教材以后修订再版时予以改正。

《高校21世纪师范类规划教材》编委会

前 言

本教材是陕西省高等教育面向21世纪教学与课程改革计划资助项目成果之一.

本教材的内容是《高等数学》项目组全体成员根据国家教委关于课程与教材改革要适应于社会发展，要服务于经济建设和有利于培养人才的要求，经过深入广泛的调查、研究制定的编写大纲编写的. 本书的初稿曾作为内部教材在西安联大、渭南师院、安康师专等院校试用二年，在此基础上进一步充实了内容，修正了错误，经省教委批准纳入“高校21世纪师范类规划教材”. 可供综合类及师范类院校物理、化学、生物、地理等非数学专业和综合及师范类专科院校相应非数学类专业使用.

本书在编写过程中，着重注意了以下几个方面.

(1) 在内容选取上遵循“少而精，广而浅”的原则. 加强了理论与实际的联系；注重高等数学知识在社会经济与工程技术方面的具体应用；略去了一些较为繁杂的定理证明和冗长的理论推导，但力求保持理论与实际的一致性和系统性.

(2) 教材的编写力求打破传统习惯，对概念的引入更为朴实、简明和自然，尽可能从读者身边熟悉的问题入手；理论表述尽可能严谨，且直观说明和解释并用，并注重体现数学的思想和方法，提高学生对数学学习的兴趣.

(3) 本教材在每一章节都安排了内容丰富的例题. 这些例题的选择遵循典型性、代表性和趣味性的原则，有利于学生增强探索、研究的能力. 每章之后配有适量习题，有利于学生理解和巩固课程要求的基本概念和基本理论，掌握解决具体问题的能力.

(4) 本教材在大部分章节后附有理论应用和建立数学模型的阅读材料，并介绍了建立数学模型的一般方法. 目的在于加强学生对理论应用和建立数学模型解决实际问题的重视和提高数学建模的能力以及对学习数学的兴趣.

本教材由西安联合大学杨开春，榆林高专张富林，安康师专赵临龙主编；渭南师院李海龙，商洛师专李军庄任副主编，组织省内师范院校多位长期在教学一线工作的教授、副教授等教学骨干在深入调查研究的基础上完成的. 其中西安联大韩靖寇教授除参加编写任务外还审阅了全稿，并对整个编写过程提出了很好的意见.

在调研过程中，我们一直得到了陕西省教育厅高教处领导同志的指导和支持，并得到了西安交通大学理学院徐文雄教授的热情关心和具体指导. 这些都对我们的调研及后来的成书过程起了极大的推动作用. 此外我们还要对所有参编院校的领导及西安联大物理、化学、地理、经管等系的领导和广大师生对我们在调研及初稿试用时给予的大力支持表示衷心的感谢.

本教材约占216课时. 具体可根据不同专业教学计划的要求在第五、第六、第七、第十一、第十二章中选授相应的内容.

我们恳请读者在使用过程中能对教材中出现的缺点、错误批评指正，以使本教材不断完善.

编者

2002 年 10 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，极限概念是微积分学的理论基础. 作为讨论微积分的准备，本章着重介绍函数、极限和连续这些基本概念以及它们的一些性质.

第一节　函　数

一、常量、变量与集合

在观察自然现象或技术过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持一定的数值，这种量叫做常量；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫做变量.

例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量；而气体的温度和压力在变化，则它们是变量.

又如，在自由落体运动中，物体所经过的路程 s 和所需要的时间 t 都是变量. 这两个变量之间满足关系式

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \text{（}g\text{ 表示重力加速度），}$$

其中 g 为常量.

值得注意的是，常量与变量不是一成不变的. 如自由落体运动中的常量 g，是针对某一地点来说的. 如果对不同的地点来说，g 的值就不同，因而也就不再是常量.

通常用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、z 等表示变量. 而且，变量所取数值的全体，可用集合表示出来.

一般地，所谓集合是指具有某种特定性质的事物的全体，组成这个集合的事物称为该集合的元素，如事物 a 是集合 A 的元素记作 $a \in A$；事物 a 不是集合 A 的元素记作 $a \notin A$.

由有限个元素组成的集合，可用列举法表示出来. 例如，由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合 A 可记作

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

由无穷多个元素组成的集合，通常用如下记号表示：设 A 是具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合，就记作

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$A = \{x \mid x \text{ 所具有的特征}\}.$$

以后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合，如果没有特别声明，以后提到的数都是实数.

全体自然数的集合记作 N，全体整数的集合记作 Z，全体有理数的集合记作 Q，全体实数的集合记作 R.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x \in A$，则必有 $x \in B$，就说 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 例如 $N \subset Z \subset Q \subset R$.

如果 $A \subset B$，且 $B \subset A$，就称集合 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

不含任何元素的集合称为空集，记作 ϕ.

区间是用得较多的一类数集. 设 a、b 是两个实数，且 $a < b$.

满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的全体称为开区间，记作 (a,b).

满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的全体称为闭区间，记作 $[a,b]$.

满足不等式 $a \leqslant x < b$ 或 $a < x \leqslant b$ 的实数 x 的全体称为半开(闭) 区间，记作 $[a,b)$ 或 $(a,b]$.

以上三种情形，都称为有限区间，a 和 b 称为区间的端点，数 $b - a$ 称为区间的长度.

此外，还有无限区间. 把满足不等式 $x > a$ 或 $x \geqslant a$ 的实数 x 的全体用 $(a, +\infty)$ 或 $[a, +\infty)$ 表示，把满足不等式 $x < a$ 或 $x \leqslant a$ 的实数 x 的全体用 $(-\infty, a)$ 或 $(-\infty, a]$ 表示，实数全体用 $(-\infty, +\infty)$ 表示. 这里，$+\infty$ 和 $-\infty$ 是一个符号，分别读作正无穷大和负无穷大.

通常，将开区间、闭区间、半开(闭) 区间和无限区间统称为区间.

在今后的讨论中，有时需要考虑由某点 a 附近的所有点构成的集合. 为此，需引入邻域的概念.

满足绝对值不等式 $|x - a| < \delta$ 的全体实数称为点 a 的 δ 邻域，记作

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta),$$

或简单地写作 $U(a)$.

满足不等式 $0 < |x - a| < \delta$ 的全体实数称为点 a 的空心 δ 邻域，记作

$$U^0(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\},$$

或简单地写作 $U^0(a)$.

注意　点 a 的空心邻域与点 a 的邻域差别在于点 a 的空心邻域不包含点 a.

二、函数概念

定义　**给定两个实数集 D 和 M，若有一个对应法则 f，使 D 内每一个数 x，都有惟一的一个数 $y \in M$ 与它相对应，则称 f 是定义在数集 D 上的函数，记作**

$$f: D \longrightarrow M$$
$$x \longmapsto y.$$

数集 D 称为函数 f 的定义域. 对于 D 中每一个数 x 根据法则 f 所对应的 M 中的数 y，称为 f 在点 x 的函数值，记为 $f(x)$. 全体函数值的集合

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\} \subseteq M$$

称为函数f的值域. 习惯上,我们称函数关系中的x为自变量,y为因变量.

几点说明:

(1) 定义中的实数集M通常以实数的集合R来代替,于是定义域D和对应法则f就成为确定函数的两个主要因素,所以,我们也常用

$$y = f(x), x \in D$$

表示一个函数.

(2) 我们在中学里已经知道,表示函数最主要的方法是公式法,即用数学运算式子来表示函数. 这时,函数的定义域常取使运算式子有意义的自变量取值的全体,通常称为存在域. 例如,$y = \sqrt{x}$的定义域为使$\sqrt{x}$有意义的x的全体,即$x \geqslant 0$.

(3) 在我们的函数定义中,对于x的每一个值,只能有惟一的y值与之对应,这种函数称为单值函数. 若对于x的每个值,有不止一个y值与之对应,则称为多值函数. 在本书范围内,只讨论单值函数.

通常,函数有三种表示法.

用数学式子表示函数的方法称为解析法. 例如$y = c$和$y = \sqrt{x-1}$都是用解析法表示的函数. 解析法便于数学上的分析和运算,高等数学中所涉及的函数大多用此法表示.

用坐标平面上的图形表示函数的方法称为图示法. 用图示法表示函数的优点是直观性强,函数的变化情况一目了然.

用表格表示函数关系的方法称为列表法. 例如,通常使用的三角函数表就是用列表法表示的函数. 列表法的优点是有现成的函数值数据,便于查找.

用解析法表示的函数可以由一个数学式子给出,例如$y = \sin x$,也可以在其定义域的各个不相交的子集或子区间上,分别用不同的解析表达式表示,这类函数称为分段函数. 例如绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, x \geqslant 0, \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

和符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

都是分段函数.

注意　分段函数在其整个定义域上是一个函数,而不是几个函数,其定义域为各个不相交的子集或子区间的并集.

例1　已知分段函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x, -1 \leqslant x < 0, \\ 1, x = 0, \\ x^2 + 2, 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

(1) 求其定义域并作图;(2) 求函数值$f(-\frac{1}{2})$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$.

解　(1) 由函数的表达式可知,该函数的定义域为三个子集$[-1,0)$, $\{0\}$, $(0,1]$的

并集，即
$$D=[-1,0)\cup\{0\}\cup(0,1]=[-1,1].$$
按函数在定义域各子集上的相应表达式分段作图，则该函数的图形如图 1—1 所示.

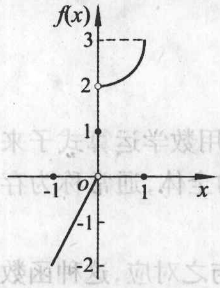


图 1—1

$$(2)\because -\frac{1}{2}\in[-1,0),$$
$$\therefore f(-\frac{1}{2})=2\times(-\frac{1}{2})=-1;$$
$$\because 0\in\{0\},$$
$$\therefore f(0)=1,$$
$$\because \frac{1}{2}\in(0,1],$$
$$\therefore f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2+2=\frac{9}{4}.$$

例 2 求函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域.

解 因为 $4-x^2\geqslant 0$ 的解集为 $|x|\leqslant 2$，即 $x\in[-2,2]$；$x-1>0$ 的解集为 $x>1$，即 $x\in(1,+\infty)$. 所以，函数 $f(x)$ 的定义域为：
$$D=[-2,2]\cap(1,+\infty)=(1,2].$$

例 3 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\lg(x^2-1)-1}$ 的定义域.

解 因为 $2-x\geqslant 0$ 的解集为 $(-\infty,2]$；

$x^2-1>0$ 的解集为 $|x|>1$；

由 $\lg(x^2-1)-1\neq 0$ 可知，$x^2-1\neq 10$，即 $x\neq\pm\sqrt{11}$，所以，该函数的定义域为上述各解集的交集，即
$$D=(-\infty,-\sqrt{11})\cup(-\sqrt{11},-1)\cup(1,2].$$

例 4 如图 1—2，有一标准的渐开线齿轮，齿轮的齿廓线的基圆半径是 r，求齿廓线 AB 所在渐开线中的变量 x 和 y 的关系式.

解 如图 1—2，以圆心 O 为坐标原点，直线 OA 为 x 轴建立坐标系.

所谓渐开线，就是过圆 O 上一点 T 作圆的切线 TB，使 $TB=\overset{\frown}{TA}$，则点 B 的轨迹为渐开线.

此时，设 $\angle TOA=\theta$，则 $\overset{\frown}{TA}=\theta r$，即 $TB=\theta r$.

由 $OB^2=OT^2+TB^2$，得点 $B(x,y)$ 的轨迹方程：
$$x^2+y^2=r^2+r^2\theta^2.$$

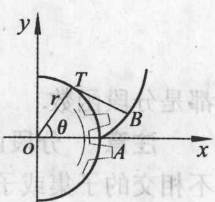


图 1—2

于是，变量 y 是关于自变量 x 和 θ 的二元函数，而且具有隐函数形式.

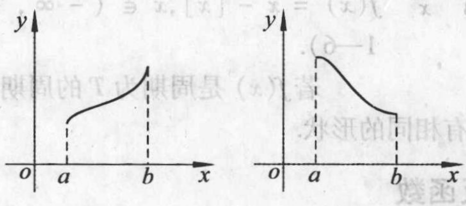
三、函数的基本特性

定义 **设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，对于任意的 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，**

若$f(x_1) \leqslant f(x_2)$（$f(x_1) \geqslant f(x_2)$），则称函数$f(x)$ 在D上单调增加（单调减少）.

若$f(x_1) < f(x_2)$（$f(x_1) > f(x_2)$），则称函数$f(x)$ 在D上严格单调增加（严格单调减少）.

单调增加与单调减少的函数统称为单调函数，使函数$f(x)$ 单调的区间称为单调区间. 如图 1—3(a) 与(b) 所示的函数，在所给区间上分别为单调增加函数与单调减少函数.



(a)　　(b)

图 1—3

例如 $y = x^3$ 与 $y = e^x$ 是$(-\infty, +\infty)$上的单调增加函数，$y = \dfrac{1}{x}$ 是$(0, +\infty)$上的单调减少函数，而 $y = x^2$ 在$(-\infty, 0]$上单调减少，在$[0, +\infty)$上单调增加.

例 5　$y = [x]$ 表示不超过数 x 的最大整数，此函数在$(-\infty, +\infty)$上是递增函数，因为对于$x_1, x_2 \in D$，当$x_1 < x_2$时，有$[x_1] \leqslant [x_2]$，其图像如图 1—4 所示.

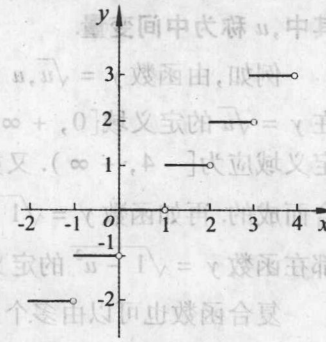


图 1—4

定义　**设函数$f(x)$ 在集合D上有定义，如果存在正数M，使得对任意的$x \in D$，都有$|f(x)| \leqslant M$，则称函数$f(x)$ 在D上有界，否则称$f(x)$ 在D上无界.**

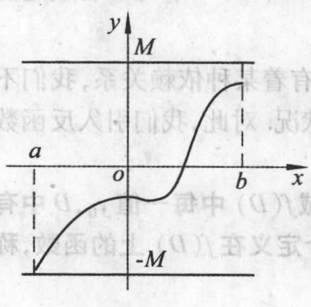


图 1—5

有界函数的图形如图 1—5 所示. 由图可知，曲线 $y = f(x)$ 夹在两条直线 $y = M$ 和 $y = -M$ 之间. 例如三角函数 $\sin x, \cos x$ 对于$(-\infty, +\infty)$上的任意 x 都有 $|\sin x| \leqslant 1$，$|\cos x| \leqslant 1$，因此函数 $\sin x, \cos x$ 在整个数轴上有界.

又如，$y = \dfrac{1}{x}$ 在它的定义域内是无界函数，但在$(1, +\infty)$上是有 界函数，因为在$(1, +\infty)$上有

$$\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1.$$

定义　**设函数$f(x)$ 的定义域D在数轴上关于原点对称，如果对任意的$x \in D$，恒有$f(-x) = f(x)$，则称函数$f(x)$ 为偶函数；$f(-x) = -f(x)$，则称函数$f(x)$ 为奇函数.**

由定义可知：函数 $y = x^3$ 和 $y = \sin x$ 都是奇函数，奇函数的图形关于原点对称；函数 $y = x^2$ 和 $y = \cos x$ 都是偶函数，偶函数的图形关于 y 轴对称；函数 $y = \sin x + x^2$ 既不是奇函数也不是偶函数.

定义 设函数$f(x)$在集合D上有定义，若存在一个常数$T\neq 0$，使得对于任意$x\in D$，必有$x\pm T\in D$，并且使$f(x\pm T)=f(x)$，则称$f(x)$为周期函数，其中T称为函数$f(x)$的周期，周期函数的周期通常是指它的最小正周期.

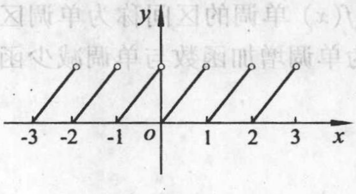


图 1—6

例如，三角函数$\sin x$和$\cos x$是R上的周期函数，周期均为2π；$\tan x$是周期为π的周期函数$(x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2})$. 函数$f(x)=x-[x]，x\in(-\infty,+\infty)$的周期为1(见图1—6).

若$f(x)$是周期为T的周期函数，则在长度为T的两个相邻区间上，函数图形有相同的形状.

四、复合函数与反函数

定义 设$y=f(u)$，而$u=\varphi(x)$，且函数$\varphi(x)$的值域包含在函数$f(u)$的定义域内，那么y通过u的联系也是自变量x的函数，我们称y为x的复合函数，记作$y=f[\varphi(x)]$. 其中，u称为中间变量.

例如，由函数$y=\sqrt{u}，u=x+4$可以构成复合函数$y=\sqrt{x+4}$，为了使u的值域包含在$y=\sqrt{u}$的定义域$[0,+\infty)$内，必须有$x\in[-4,+\infty)$，所以复合函数$y=\sqrt{x+4}$的定义域应为$[-4,+\infty)$. 又如，复合函数$y=\ln(x^2+1)$是由函数$y=\ln u，u=x^2+1$复合而成的. 再如函数$y=\sqrt{1-u^2}，u=x^2+2$是无法复合的，因为对应于任何x值，u的值都在函数$y=\sqrt{1-u^2}$的定义域之外.

复合函数也可以由多个函数相继进行有限次复合而成. 例如，$y=\sin u$、$u=\sqrt{v}$以及$v=1-x^2$可以复合成函数$y=\sin\sqrt{1-x^2}$，变量u、v都是中间变量；反之，有些复杂的函数也可以看成是由若干个简单函数复合而成. 例如，函数$y=\ln(1+\sqrt{x^2+1})$可以看成是由函数$y=\ln u，u=1+\sqrt{v}，v=x^2+1$复合而成的.

自变量与因变量的关系往往是相对的，设变量x和变量y有着某种依赖关系，我们不仅要研究y随x而变化的状况，有时也要研究x随y而变化的状况. 对此，我们引入反函数概念.

定义 设$y=f(x)$是定义在D上的一个函数，若对于值域$f(D)$中每一值y_0，D中有且仅有一个值x_0，使得$f(x_0)=y_0$，则按此对应法则能得到一个定义在$f(D)$上的函数，称这个函数为f的反函数，记作

$$f^{-1}:f(D)\longrightarrow D$$

$$y\longmapsto x,$$

或

$$x=f^{-1}(y),y\in f(D).$$

由定义可知，$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$的定义域为$y=f(x)$的值域，值域为$y=f(x)$的定义域. $y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$互为反函数.

反函数的实质在于它所表示的对应规律，用什么字母来表示反函数中的自变量与因变量是无关紧要的. 习惯上把自变量记作x，因变量记作y，则反函数$x=f^{-1}(y)$也可记作

$$y = f^{-1}(x).$$

这里 $y = f^{-1}(x), x \in f(D)$ 和 $x = f^{-1}(y), y \in f(D)$ 是同一个函数，因为它们的定义域都是 $f(D)$，对应法则都是 f^{-1}，只是所用变量的记号不同而已.

例如，下列函数

(1) $y = ax + b, (a \neq 0)$；

(2) $y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$；

(3) $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的反函数分别是

$$y = \frac{x-b}{a}; y = \log_a x; y = \arcsin x, x \in [-1, 1].$$

最后，由定义还可看出，**严格单调函数必有反函数**.

五、初等函数

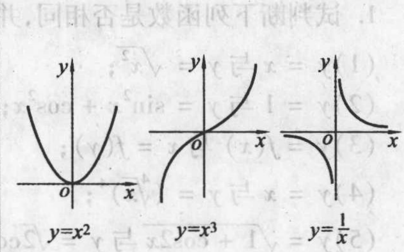
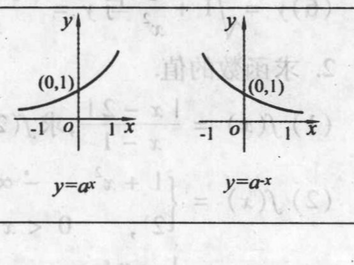
常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数统称为基本初等函数. 关于它们的图形和简单性质，在中学里已作过详细介绍. 为了便于研究函数的性质，我们将基本初等函数的图形和基本情况归纳成表，便于读者查阅.

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而得到的函数统称为初等函数. 例如 $y = \sin(5 - e^{x+1}), y = x^2 + \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ 等都是初等函数.

初等函数是高等数学的主要研究对象.

注意，分段函数一般不是初等函数. 但是，由于分段函数在其定义域的各个子区间上都是由初等函数表示，故我们仍可通过初等函数来研究它们.

基本初等函数表

类别	名　称	解析式	定义域	值　域	
幂函数	二次抛物线	$y = x^2$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	
	三次抛物线	$y = x^3$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	
	抛物线	$y = \sqrt{x}$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	
	等轴双曲线	$y = \frac{1}{x}$	$x \neq 0$	$y \neq 0$	
	无理数幂	$y = x^\alpha$　$\alpha > 0$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	
		$\alpha < 0$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	
	指数函数	$y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com