

常州大学大学数学部 编

DAXUE SHUXUE LIANXI YU CESHI

大学数学

练习与测试



苏州大学出版社

SOOCHOW UNIVERSITY PRESS

大学数学练习与测试

常州大学大学数学部 编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学练习与测试/常州大学大学数学部编. —
苏州:苏州大学出版社,2011.8
ISBN 978-7-81137-748-4

I. ①大… II. ①常… III. ①高等数学-高等学校-
习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 156951 号

大学数学练习与测试
常州大学大学数学部 编
责任编辑 李 娟

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市十梓街1号 邮编:215006)

宜兴市盛世文化印刷有限公司印装
(地址:宜兴市万石镇南漕河滨路58号 邮编:214217)

开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 14.75 字数 367 千

2011 年 8 月第 1 版 2011 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81137-748-4 定价:24.00 元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-65225020
苏州大学出版社网址 <http://www.sudapress.com>

前 言

要学好高等数学,总离不开解题,学生通过解题可以加深对所学课程内容的理解,灵活地掌握运算方法和提高自己的解题技巧,培养分析问题、解决问题的能力.因此,如何帮助学生提高解题能力是当前高等数学课程教学改革的一项重要任务.本书是编者依据教育部最新制定的本科《高等数学课程教学基本要求》,并结合多年的教学实践编写而成的.在编写过程中,力求叙述清晰、选题贴切、深入浅出,对重点内容列举了大量有代表性的习题.全书内容包括:一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数.

全书共分三个部分.第一部分是同步练习,针对高等数学的每一个知识点,编者在每一节中配备了一定量的基本练习题和提高题,每一章最后配备一套测试题;第二部分是20套综合练习,可帮助学生系统地复习所学知识,提高解题能力;第三部分是6套模拟测试卷,可帮助学生迅速而全面地检测对所学内容的掌握情况.编者将本书编成学生的作业本的形式,这样的编写形式有两方面的特点:一是比较规范,便于任课老师批改;二是减轻了学生抄作业题的负担,同时也便于作业本的保留.书末提供了同步练习和综合练习的参考答案.

本书是编者对教学环节——批改作业的一个改革尝试,是大家共同努力的结晶.希望本书的出版,能对本校的高等数学的教学改革起到积极的作用.参加本书编写的人员有:徐明华、赵志新、石澄贤、费忠华、王福利、张洪波、郭淑娟、黄清龙、李博、康慧燕、童凯郁、陈芳芳、邹定宇、元春梅、余亚娟、王峰、刘佳、周桦等,由赵志新、徐明华、石澄贤负责本书的统稿.

由于编者水平有限,错误在所难免,敬请读者批评指正.

编 者

2011年8月

目 录

第一部分 同步练习

第一章 函数、极限与连续	1
第二章 导数与微分	13
第三章 中值定理与导数的应用	23
第四章 不定积分	39
第五章 定积分	49
第六章 定积分的应用	63
第七章 微分方程	71
第八章 空间解析几何与向量代数	87
第九章 多元函数微分学	99
第十章 重积分	115
第十一章 曲线积分与曲面积分	133
第十二章 无穷级数	147

第二部分 综合练习

练习一	161
练习二	162
练习三	163
练习四	165
练习五	166
练习六	167
练习七	169

练习八 170

练习九 171

练习十 173

练习十一 174

练习十二 176

练习十三 177

练习十四 179

练习十五 180

练习十六 181

练习十七 183

练习十八 184

练习十九 186

练习二十 187

第三部分 模拟测试

测试卷一 189

测试卷二 190

测试卷三 192

测试卷四 193

测试卷五 194

测试卷六 196

参考答案 198

第一部分 同步练习

第一章 函数、极限与连续

练习 1-1

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \arccos \frac{2x-1}{7} + \frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}};$$

$$(2) y = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}.$$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{x^2}, & x > 1, \\ 2x, & x \leq 1 \end{cases}$ 和 $\varphi(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0, \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

3. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求 $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域.

院(系)_____ 班级_____ 学号_____ 姓名_____

4. 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 的表达式及其定义域.

5. 证明: 定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的任意函数可表示为一个奇函数和一个偶函数的和.

6. 设 $f(x) = \frac{x}{1-x}$, 求 $f[f(x)]$ 及其定义域.

7. 每台收音机的售价为 90 元, 成本为 60 元, 厂方为鼓励销售商大量采购, 决定凡是订购超过 100 台的, 每超过 1 台, 每台收音机的售价就降价 1 分, 但最低售价为每台 75 元. (1) 将每台收音机的实际售价 p (元) 表示为订购量 x (台) 的函数; (2) 将厂方所获的利润 P (元) 表示成订购量 x 的函数; (3) 若某销售商订购了 1000 台收音机, 问厂方可获多少利润?

练习 1-2

1. 用数列极限的定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+3}{3n+1} = \frac{5}{3}$.

2. 用函数极限的定义证明:

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x}{6x} = \frac{1}{6}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x+1) = 5$.

3. 讨论 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{|x-2|}$ 的极限是否存在.

练习 1-3

1. 变量 $y=e^{\frac{1}{x-1}}$ 在什么变化过程中是无穷大,在什么变化过程中是无穷小?

2. 函数 $f(x)=x\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界? 当 $x \rightarrow \infty$ 时,这个函数是否为无穷大? 为什么?

3. 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列结论正确的是 ()

- A. 若 $\{x_n\}$ 发散, 则 $\{y_n\}$ 必发散
- B. 若 $\{x_n\}$ 无界, 则 $\{y_n\}$ 必有界
- C. 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小
- D. 若 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

习题 1-4

1. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^{30} (3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{2^{n+1} + 3^n};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right);$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}.$$

2. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 求 a, b 的值.

习题 1-5

1. 利用夹逼定理求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right)$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin 3x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{x-3} \right)^x$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

3. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n \sin \frac{1}{a^n}$, 其中 $a > 0, n$ 为正整数.

练习 1-6

1. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sqrt{2+x^2}(e^{x^3} - 1)};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x^2}{(e^{\sin x} - 1)x^3}.$$

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $\alpha = \tan x^2$ 与 $\beta = 1 - \sqrt{1 - 2x^2}$ 的关系是 ()

- A. β 与 α 是等价无穷小量
- B. β 与 α 是同阶非等价无穷小量
- C. β 是比 α 较高阶的无穷小量
- D. β 是比 α 较低阶的无穷小量

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2) = o(x \sin x^n)$, $x \sin x^n = o(e^{x^2} - 1)$, 求自然数 n .

院(系)_____ 班级_____ 学号_____ 姓名_____

练习 1-7

1. 指出下列函数的间断点,并说明类型.如果是可去间断点,则补充或改变函数的定义使得函数在该点连续.

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)};$$

$$(2) f(x) = \frac{x}{\tan x};$$

$$(3) f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}.$$

2. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}} x$ 的连续性,若有间断点,请判别其类型.

练习 1-8

1. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(1+x)};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\lg(100+x)}{a^x + \arcsin x} \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x});$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)^{\sqrt{2}}.$$

2. 设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b 满足()

A. $a < 0, b < 0$

B. $a > 0, b > 0$

C. $a \leq 0, b > 0$

D. $a \geq 0, b < 0$

3. 设 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x + 1} = l$, 试求 a 和 l 的值.

练习 1-9

1. 设 $f(x) = e^x - 2$, 求证: 在区间 $(0, 2)$ 内至少有一点 x_0 , 使得 $e^{x_0} - 2 = x_0$.

2. 证明: 方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

3. 证明: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 则在 $[x_1, x_2]$ 上必有一点 ξ , 使得
$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且恒为正. 证明: 对于任意 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 必存在一点 $\xi \in [x_1, x_2]$, 使得
$$f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}.$$

自我测试一

一、填空题(每空 4 分,共 32 分)

1. 设 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}} + \ln(x-2)$, 则 $f(x+a) + f(x-a)$ ($0 < a < \frac{1}{2}$) 的定义域是 _____.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] =$ _____.

3. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + 5}{3n - 2} = 2$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 1) \sin \frac{1}{2^n + 1} =$ _____.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \arctan n}{\sqrt{n^3 + 1}} =$ _____.

6. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ 的可去间断点为 _____, 补充定义 _____,

则 $f(x)$ 在该点连续.

二、综合题(共 68 分)

7. 求下列极限(每题 7 分,共 35 分):

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2 + 3};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}};$$