Yan Yuan

燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学名师名家
概率论与数理统计
辅导讲义

清华大学 王 欢
北京大学 王德军 主编
首都师范大学 童 武

由多次参加**命题及阅卷的专家**亲自编写，内容系统、权威

严格按照最新考试大纲，深入解读，突出重点，引领复习

赠送MP3盘

考研名师童武教授

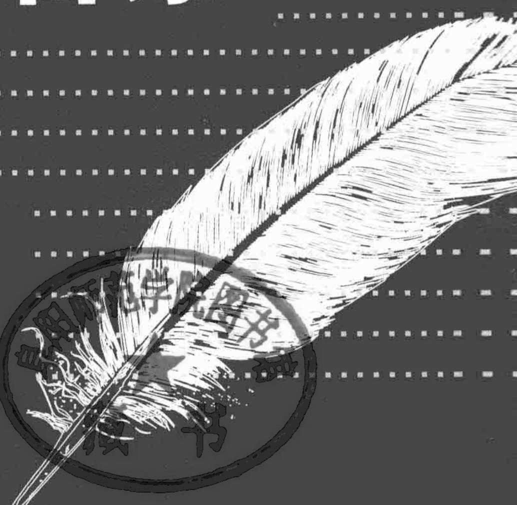
考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

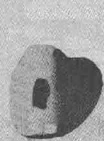
考研数学名师名家
概率论与数理统计辅导讲义



清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武
主编

由多次参加**命题及阅卷的专家**亲自编写，内容系统、权威

严格按照最新考试大纲，深入解读，突出重点，引领复习



赠送MP3盘

考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义 / 王欢,王德军,童武主编. —北京:中国石化出版社,2012.2
ISBN 978-7-5114-1394-9

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… ②王… ③童… Ⅲ.①概率论-研究生-入学考试-自学参考资料 ②数理统计-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 013208 号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街 58 号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销

787×1092 毫米 16 开本 9.25 印张 227 千字
2012 年 3 月第 1 版 2012 年 3 月第 1 次印刷
定价:25.00 元(赠送 MP3 盘)

前　　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是"常模参照"考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制订的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选1000题(理工类)》、《考研数学最新精选1000题(经济类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(理工

类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(经济类)》、《考研数学必做主观题600题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题600题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下:

1. 配合最新考试大纲,反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上,力求反映最新考试要求,紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路,全面展现题型变化,为考生全程领航和理性分析,引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练,检验自己的学习成果,及时进行查漏补缺,有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练,这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔,编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作,积累了丰富的教学辅导经验,对历年考试情况比较了解,对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序,力求达到完美,但限于时间和水平,仍可能存在不足,纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　　录

第一章　随机事件与概率

考试大纲要求

(1)了解样本空间(基本事件空间)的概念；理解随机事件的概念，掌握事件的关系与运算。

(2)理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质；会计算古典型概率和几何型概率；掌握概率的加法公式、乘法公式、减法公式、全概率公式以及贝叶斯公式。

(3)理解事件的独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算的方法；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法。

考点、重点与难点介绍

一、基本概念

1. 随机事件与样本空间

随机试验　具有下列特征的试验称为随机试验：

(1)可以在相同的条件下重复进行；

(2)试验的可能结果不止一个，但试验前能预知所有可能结果；

(3)试验前不能确定哪个结果会出现。

***n* 重独立试验**　如果随机试验在相同的条件下重复进行 n 次，且各次试验的结果相互独立，则称这样的试验为 n 重独立试验。

***n* 重伯努利试验**　在 n 重独立试验中，如果每次试验的可能结果只有两个，即 A 发生与 $\overline{A}$ 发生，则称这样的 n 重独立试验为 n 重伯努利试验。

样本空间与样本点　一个随机试验 E 的所有可能出现的结果所组成的集合称为该随机试验的样本空间，通常记做 Ω；样本空间 Ω 的每个元素(即 E 的每个可能结果)称为样本点。

基本事件与随机事件　由一个样本点组成的单点集称为基本事件；随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的随机事件，通常用 A，B，C 等表示。

必然事件与不可能事件　样本空间 Ω 是自身的子集，包含所有样本点，在每次试验中总是发生的，称为必然事件；空集 $\emptyset$ 不包含任何样本点，作为样本空间的子集在每次试验中都不发生，称为不可能事件。

完备事件组　设 A_1，A_2，…，A_n 为一事件组。若满足：

$A_iA_j=\emptyset(i\neq j)$，$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，则称事件组 A_1，A_2，…，A_n 是样本空间 Ω 的一个完备事件组(或 Ω 的一个部分)。

2. 事件之间的关系

包含关系 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A 或称事件 A 包含于事件 B，记做 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

相等关系 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记做 $A=B$.

事件的和(并) 事件 A 与 B 的和(并)是一个事件 C，它表示事件 A 与事件 B 中至少有一个发生，记为 $C=A\cup B$ 或 $C=A+B$.

类似地，“n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生”这一事件称为事件 A_1，A_2，…，A_n 的和，记做 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1+A_2+\cdots+A_n$.

“可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…中至少有一个发生”这一事件称为可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…的和，记做 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

事件的积(交) 事件 A 与事件 B 的积(交)是一个事件 C，它表示事件 A 与事件 B 同时发生，记为 $C=A\cap B$ 或 $C=AB$.

类似的“n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生”这一事件称为事件 A_1，A_2，…，A_n 的积，记做 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 A_1，A_2，$\cdots A_n$.

“可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…同时发生”这一事件称为可列个事件 A_1，A_2，…，A_n，…的积，记做 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

事件的差 “事件 A 发生且事件 B 不发生”这一事件称为事件 A 与 B 的差，记为 $A-B$.

互斥事件(互不相容事件) 若两个事件 A，B 不可能同时发生，即 $AB=\emptyset$，则称 A，B 为两个互斥事件.

对立事件 若事件 A，B 有且仅有一个发生. 即 $A\cup B=\Omega$，且 $AB=\emptyset$，则称 A，B 为相互对立事件或互逆事件，记为 $A=\bar{B}$ 或 $B=\bar{A}$.

相互独立 对于事件 A 与 B，若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A 与 B 相互独立；对于 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，若满足对任意 $k(1<k\leqslant n)$ 及任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，都有 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$，则称 A_1，A_2，…，A_n 相互独立.

两两独立 对于 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，若满足

$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)(i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则称 A_1，A_2，…，A_n 两两独立.

3. 事件的概率

概率的公理化定义 设 E 是一个随机试验，Ω 为它的样本空间，以 E 中所有的随机事件组成的集合为定义域，定义一个函数 $P(A)$，且 $P(A)$ 满足以下三个公理，则称函数 $P(A)$ 为事件 A 的概率：

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 若事件 A_1，A_2，…，A_i，…中，$A_i\cap A_j=\emptyset(i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots)$，则有 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_i\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_i)+\cdots$.

概率的统计定义 在一组恒定不变的条件下，将某一试验重复进行 n 次，事件 A 发生的次数为 μ，如果事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\dfrac{\mu}{n}$ 随时着 n 的增大总在某一固定的数值 P 附近摆

动，则称 P 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)=P$.

概率的古典定义 若试验 E 具有下列特性：

(1)(有限性)试验的样本空间只含有有限个样本点；

(2)(等可能性)每个基本事件发生的可能性相同，则称试验 E 为古典概型，并定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

概率的几何定义 若试验的样本空间 Ω 是一个几何区域(直线上的区间、平面上的区域或空间中的区域)，并且每个样本点落在 Ω 中任意度量(浓度、面积或体积)相同的子域内是等可能的，则称试验为几何概型，并定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 的几何度量}}{\text{样本空间 }\Omega\text{ 的几何度量}}$$

条件概率 设随机试验 E 的样本空间为 Ω，A，B 为随机试验 E 的事件，若 $P(B)\neq 0$，则称 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率.

二、重要性质与公式

1. 事件的四则运算

加法与乘法运算 事件的加法与乘法具有如下运算律：

(1)交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3)分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，$A\cup(BC)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

减法运算 $A-B=A\bar{B}$.

对偶律 关于对立运算，加法与乘法可以互相转化：

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B};\ \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}.$$

推广 $\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i$；$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i$；$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i$；$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i$.

2. 对立事件的性质

性质 1 对立事件有如下性质：

(1)$A\cup\bar{A}=\Omega$(必然事件)； (2)$A\cap\bar{A}=\varnothing$(不可能事件)； (3)$\bar{\bar{A}}=A$.

注：两个互为对立的事件，一定是互斥事件；反之，互斥事件不一定是对立事件.

3. 概率的基本性质

性质 2(有限可加性) 设 n 个随机事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 3(加法公式) 设 A，B 为任意两个随机事件，则有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质 4 对于任意的随机事件 A，有 $P(A)=1-P(\bar{A})$.

性质 5 设 $A\subset B$，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，且 $P(A)\leqslant P(B)$.

4. 相互独立的性质

性质6 (1)当$P(A)>0$时，A与B相互独立$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$；

(2)当$P(B)>0$时，A与B相互独立$\Leftrightarrow P(A|B)=P(A)$.

性质7 A与B相互独立$\Leftrightarrow A$与$\bar{B}$相互独立$\Leftrightarrow \bar{A}$与B相互独立$\Leftrightarrow \bar{A}$与$\bar{B}$相互独立.

5. 概率的计算公式

(1)和事件的概率公式(加法公式)：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

一般地，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

特别地，若A_1，A_2，…，A_n两两互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(2)差事件的概率公式(减法公式)：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

特别地，若$B\subset A$，则$P(A-B)=P(A)-P(B)$.

(3)积事件的概率公式(乘法公式)：

$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$，$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$

一般地，有$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$.

特别地，若A_1，A_2，…，A_n相互独立，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

注：n个事件相互独立，则n个事件必两两独立；反之，若n个事件两两独立，它们不一定相互独立，相互独立要满足$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$个事件乘积的概率等于相应事件概率的乘积的等式，而$n$个事件两两独立只需要满足$C_n^2$个这类的等式.

(4)条件概率公式：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

注(i)关于概率的一些重要结论都适用于条件概率，如

$P(A|B)=1-P(\bar{A}|B)$，$P((A_1\cup A_2)|B)=P(A_1|B)+P(A_2+B)-P(A_1A_2|B)$.

(ii)$P(AB)$表示A，B都发生的随机事件(积事件)的概率，而$P(A|B)$表示在B发生的条件下事件A发生的条件概率，计算$P(AB)$的样本空间是既包含A又包含B的必然事件Ω，而计算$P(A|B)$的样本空间为事件B.

(5)n重伯努利试验的概率公式：设p为一次伯努利试验中A出现的概率，$A_k=\{n$重伯努利试验中A出现k次$\}$，则

$$P(A_k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

(6)全概率公式：设A_1，A_2，…，A_n是样本空间Ω的一个完备事件组，并且$P(A_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，B为任意一个事件，则$P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$.

(7)贝叶斯公式：设A_1，A_2，…，A_n是样本空间Ω的一个完备事件组，并且$P(A_i)>0$

$(i=1, 2, \cdots, n)$，B 为任意一个事件($P(B)\neq 0$)，则

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B \mid A_j)}(i=1, 2, \cdots, n)$$

典型例题精解

例 1　关于独立性，下列说法中错误的是(　　).

(A)若 A_1，A_2，A_3 相互独立，则其中任意两个事件相互独立

(B)若 A_1，A_2，A_3 相互独立，则其中任意两个事件的对立事件也相互独立

(C)若 A_1，A_2，A_3 相互独立，则 A_1，$+A_2$ 与 A_3 相互独立

(D)若 A_1，A_2，A_3 中任意两个相互独立，A_1，A_2，A_3 相互独立

【答案】　D

【解析】　用排除法.

①$\because$ A_1，A_2，A_3 相互独立，$\therefore$ $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_i)$　$(i\neq j)$

$\therefore$ A_i 与 A_j 相互独立，$i=1, 2, 3$　$j=1, 2, 3$

故排除 A.

②$\because$ A_1，A_2，A_3 相互独立，则$\bar{A}_1$，$\bar{A}_2$，$\bar{A}_3$ 与相互独立，故$\bar{A}_i$ 与$\bar{A}_j$ 相互独立　$(i\neq j)$

故排除 B.

③$\because$ $P[(A_1+A_2)+A_3]=P[A_1A_3+A_2A_3]$

$=P(A_1A_3)+P(A_2A_3)-P(A_1A_2A_3)$

$=P(A_1)P(A_3)+P(A_2)P(A_3)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

$=[P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)]P(A_3)$

$=P(A_1+A_2)P(A_3)$

$\therefore$　A_1+A_2 与 A_3 相互独立，故排除 C.

例 2　如果 $P(AB)=0$，则下列结论中成立的是(　　).

(A)A 与 B 互斥　　(B)AB 为不可能事件

(C)$P(A)=0$，$P(B)=0$　　(D)AB 未必是不可能事件

【答案】　D

【解析】　设 X、Y 是相互独立服从于 $N(1, \sigma^2)$ 的两随机变量，事件 A 表示“$X=1$”，B 表示“$Y\leqslant 1$”，则 $P(AB)=P(A)P(B)=0\times\frac{1}{2}=0$，满足题设条件. 但 $AB=\{X=1$ 且 $Y\leqslant 1\}$ 不是不可能事件. 故应选 D.

例 3　已知事件 A、B，且 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，$P(A \mid B)+P(\bar{A} \mid \bar{B})=1$，则(　　).

(A)A 与 B 互不相容　　(B)A 与 B 相互对立

(C)A 与 B 不相互独立　　(D)A 与 B 相互独立

【答案】　D

【解析】　$\because$ $P(A \mid B)+P(\bar{A} \mid \bar{B})=P(A \mid B)+1-P(A \mid \bar{B})=1$

$\therefore P(A \mid B)-P(A \mid \bar{B})=0$

又 $P(A \mid B)=P(AB)/P(B)\quad P(A \mid \bar{B})=P(A\bar{B})/P(\bar{B})$

$\therefore P(AB)/P(B)=P(\bar{A}B)/P(\bar{B})\quad P(AB)[1-P(B)]=P(B)P(A\bar{B})$

故 $P(AB)=P(B)[P(A\bar{B})+P(AB)]=P(B)P[A(\bar{B}+B)]=P(B)P(A)$

例 4 甲袋中有 5 只白球，5 只红球，15 只黑球，乙袋中有 10 只白球，5 只红球，10 只黑球，从两袋中各取一球，则两球颜色相同的概率为________.

【答案】 $\frac{9}{25}$

【解析】 设 A_i：从甲袋取出的球的颜色依次为白、红、黑

B_i：从乙袋中取出的球的颜色依次为白、红、黑$(i=1,2,3)$

C：“取出的球颜色相同”

则 $C=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3$

故 $P(C)=P(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)=P(A_1B_1)+P(A_2B_2)+P(A_3B_3)$

$=P(A_1)P(B_1)+P(A_2)P(B_2)+P(A_3)P(B_3)$

$=\frac{5}{25}\cdot\frac{10}{25}+\frac{5}{25}\cdot\frac{5}{25}+\frac{15}{25}\cdot\frac{10}{25}=\frac{9}{25}$

例 5 X，Y 相互独立，同服从 $U(0,2)$，即$(0,2)$上的均匀分布，$Z=\min(X,Y)$，则 $P(0<Z<1)=$________.

【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】 实际上 $P\{\min(\bar{x},\bar{y})>1\}=P\{\bar{x}>1,\bar{y}>1\}$

$P\{0<Z<1\}=F_Z(1)-F_Z(0)=F_Z(1)$

$F_Z(1)=P\{Z\leqslant 1\}=1-P\{Z>1\}$

$=1-P\{\min(X,Y)>1\}$

$=1-P\{X>1,\ >1\}=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

例 6 设 X 表示在 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，又 $P(A)=\frac{1}{2}$，且 $E[X(X-1)]=5$，则 $n=$________.

【答案】 5

【解析】 由题设

$X\sim B(n,1/2)$，则 $E(X)=n/2$，$D(X)=n/4$. 因为

$E[X(X-1)]=E(X^2)-E(X)=D(X)+E^2(X)-E(X)=5$

所以 $\frac{n}{4}+\left(\frac{n}{2}\right)^2-\frac{n}{2}=5$

故 $n=5$

例 7 若 A、B 相互独立，则下列各式一定成立的是(　　).

(A) $P(\overline{A+B})=P(A)P(B)$　　　　(B) $P(\overline{A+B})=1-P(A)-P(B)$

(C)$P(\overline{A+B})=P(\bar{A})-P(\bar{B})$　　(D)$P(\overline{A+B})=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A})P(\bar{B})$

【答案】 C

【解析】 $\because A$、B 相互独立，则 $\bar{A}$，$\bar{B}$ 也相互独立

$\therefore P(\overline{A+B})=P(\bar{A}\cdot\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})$

例 8 事件 A、B 互不相容，其概率均不为 0，则下列结论中肯定成立的是(　　).

(A)$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 互不相容　　(B)$\bar{A}$ 与 B 互不相容

(C)$P(B\mid A)=0$　　(D)$P(B\mid \bar{A})=0$

【答案】 C

【解析】 $\because P(B\mid A)=\dfrac{P(ab)}{P(A)}$ 而 A，B 互不相容

$\therefore P(AB)=0 \quad P(B\mid A)=0$

例 9 设 A，B，C 是三个两两相互独立的事件，且 $P(ABC)=0$，$0<P(C)<1$，则一定有(　　).

(A)$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

(B)$P(A+B\mid \bar{C})=P(A)+P(B)$

(C)$P(A+B\mid C)=P(A)+P(B)$

(D)$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$

【答案】 C

【解析】 $P(A+B\mid C)=\dfrac{P[(A+B)\cdot C]}{P(C)}$

$$=\frac{P(AC+BC)}{P(C)}=\frac{P(AC)+P(BC)-P(ABC)}{P(C)}$$

$$=\frac{P(AC)+P(BC)-0}{P(C)}=\frac{P(A)P(C)+P(B)P(C)}{P(C)}$$

$$=P(A)+P(B)$$

例 10 袋中有 5 个球，每个球是白色或黑色为等可能的。现从中取 4 次球(每个球被取到的可能性相等)，每次取出 1 个，取后放回，若取出的 4 个球的颜色为 1 白 3 黑，求袋中有 2 个白球的概率。

【解析】 设 A：“取 4 次球，出现 1 次白球 3 次黑球”，H_i：“袋中恰有 i 个白球”($i=0$，1，…，5)

由古典概型得　$P(H_0)=\dfrac{1}{2^5}$　$P(H_1)=\dfrac{5}{32}$　$P(H_2)=\dfrac{10}{32}$

$P(H_3)=\dfrac{10}{32}$　$P(H_4)=\dfrac{5}{32}$　$P(H_5)=\dfrac{1}{32}$

又由贝努利公式得　$P(A\mid H_0)=0$　$P(A\mid H_1)=C_4^1(\dfrac{1}{5})(\dfrac{4}{5})^3$

$P(A\mid H_2)=C_4^1(\dfrac{2}{5})(\dfrac{3}{5})^3$　$P(A\mid H_3)=C_4^1(\dfrac{3}{5})(\dfrac{2}{5})^3$

$P(A\mid H_4)=C_4^1(\frac{4}{5})(\frac{1}{5})^3 \quad P(A\mid H_5)=0$

$$\therefore P(A)=\sum_{i=0}^{5}P(H_i)P(A\mid H_i)$$
$$=\frac{5}{32}C_4^1(\frac{1}{5})(\frac{4}{5})^3+\frac{10}{32}C_4^1(\frac{2}{5})(\frac{3}{5})^3+\frac{10}{32}C_4^1(\frac{3}{5})(\frac{2}{5})^3+\frac{5}{32}C_4^1(\frac{4}{5})(\frac{1}{5})^3$$
$$=\frac{1}{5^3}(8+\frac{27}{2}+6+\frac{1}{2})=\frac{28}{125}$$

根据贝叶斯公式可得所求概率为

$$P(H_2\mid A)=\frac{P(H_2)P(A\mid H_2)}{P(A)}=\frac{(1/5^3)(27/2)}{28/125}=\frac{27}{56}$$

例 11 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取的两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格的概率为________.

【答案】 0.2

【解析】 设 A:“所取的两件产品中至少有一件是不合格品”，B:“所取的两件都是不合格品”

$\because P(A)=1-P(\bar{A})=1-(C_6^2/C_{10}^2)=\frac{2}{3}$，$P(B)=C_4^2/C_{10}^2=\frac{2}{15}$

$\therefore P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{1}{5}$

例 12 设 A、B 为两随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(A\mid B)=\frac{1}{3}$，$P(B\mid A)=\frac{1}{6}$，则 $P(\bar{A}\bar{B})=$________.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 $\because P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{3} \quad \therefore P(B)=3P(AB)$

$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{6} \quad \therefore P(AB)=\frac{1}{6}P(A)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

$\therefore P(B)=3P(AB)=3\times\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$

$$P(\bar{A}\bar{B})=1-P(\overline{\bar{A}\bar{B}})=1-P(A+B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$
$$=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{3}$$

例 13 若事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则下列结论正确的是________.

(A) $P(C)=P(AB)$　　(B) $P(C)=P(A\cup B)$

(C) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$　　(D) $P(C)\leqslant P(A)+P(B-1)$

【答案】 C

【解析】 弄清 $C=AB+\overline{AB}C$，再逐一验证

$C=AB+\overline{AB}C$

则 $P(C)=P(A+B)+P(\overline{AB}C)$

由于 $P(\overline{AB}C)\geqslant 0$，故 $P(C)\geqslant P(AB)$

又因为 $P(A)=P(AB)+P(AB)$，

$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$

$P(AB)+P(\bar{A}B)+P(\bar{A}B)=1-P(\overline{AB})$

可得：$P(AB)=P(A)+P(B)+P(\overline{AB})-1\geqslant P(A)+P(B)-1$

故选(C).

例 14 袋中有一个白球和一个黑球，从袋中随机地摸出一个球，如果取出的是白球，则把此白球放回袋中，并且再加进一个白球，然后从中摸一球，如果还是白球，则仍将此白球放回袋中并且再加进一个白球，如此进行，直到取出黑球为止，求第 n 次取出黑球的概率.

【解析】 设 $A_i=\{$第 i 次取到白球$\}(i=1,2,\cdots,n)$，则所求的概率为

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}\bar{A}_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_{n-1}\mid A_1A_2\cdots A_{n-2})P(\bar{A}_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

例 15 $m+n$ 个人排队买电影票，票价为 5 元，这些人中有 m 个人仅持有 5 元的纸币，其余 n 个人$(n\leqslant m)$仅持有 10 元的纸币，如果每个人只买一张电影票，并且售票处开始售票时，无零钱可找，求在买票过程中没有一个人等候找钱的概率.

【解析】 设 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 是持有 10 元纸币的观众，而 b_1，b_2，$\cdots$，b_m 是持有 5 元纸币的观众，下标号码分别表示他们排队的先后次序；设事件

$A_k=\{$第 k 个持有 10 元纸币的观众 ak 不需要等候找钱$\}(k=1,2,\cdots,n)$

首先，观众 a_1 与 m 个特有 5 元纸币的观众 b_1，b_2，$\cdots$，b_n 共 $m+1$ 个人排队时，不应排在第一个位置(因为 a_1 至少应排在 b_1 的后面，否则他就要等候找钱)，所以 $P(A_1)=\frac{m}{m+1}$.

在事件 A_1 发生的条件下，观众 a_2 与除 b_1 外的其余 $m-1$ 个持有 5 元纸币的观众共 m 人排队时，不应排在第一个位置，所以 $P(A_2\mid A_1)=\frac{m-1}{m}$.

同理可知：

$$P(A_3\mid A_1A_2)=\frac{m-2}{m-1},$$
$$\vdots$$
$$P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})=\frac{m-n+1}{m-n+2}.$$

于是，n 个持有 10 元纸币的观众不需要等候找钱的概率为

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n+1})$$
$$=\frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-2}{m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{m-n+1}{m-n+2}=\frac{m-n+1}{m+1}$$

例 16 在每次试验中事件 A 发生的概率都是 $p(0<p<1)$，现进行 n 次重复独立试验，

问：事件 A 至少发生一次的概率是多少？为使 n 次独立重复试验中 A 至少出现一次的概率不小于 p_1，问：n 至少是多少？

【解析】 设 $A_k=\{n$ 次独立重复试验中事件 A 出现 k 次$\}(k=0,1,2,\cdots,n)$，则

$P(A_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,\cdots,n)$，且 A 至少出现一次的概率是 $1-P(A_0)=1-(1-p)^n$.

为使 $1-P(A_0)$ 不小于 p_1，则要 $1-(1-p)^n\geqslant p_1$，即 $1-p_1\geqslant(1-p)^n$，两边取对数，得 $\ln(1-p_1)\geqslant n\ln(1-p)$，从而 $n\geqslant\dfrac{\ln(1-p_1)}{\ln(1-p)}$.

例 17 甲、乙两个乒乓球运动员进行单打比赛，如果每赛一局甲胜的概率为 0.6，乙胜的概率为 0.4. 比赛既可采用三局两胜制，也可采用五局三胜制，问：采用哪种赛制对甲更有利？

【解析】 (1)采用三局两胜制，设 $A=\{$甲胜$\}$，$A_1=\{$甲净胜两局$\}$，$A_2=\{$前两局甲、乙各胜一局，第三局甲胜$\}$，则 $A=A_1+A_2$.

而 $P(A_1)=0.6^2=0.36$，$P(A_2)=(0.6^2\times0.4)\times2=0.288$，且 A_1 与 A_2 互斥，所以，有 $P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=0.36+0.288=0.648$

(2)采用五局三胜制，设 $B=\{$甲胜$\}$，$B_1=\{$前三局甲胜$\}$，$B_2=\{$前三局中甲胜两局，乙胜一局，第四局甲胜$\}$，$B_3=\{$前四局中甲、乙各胜两局，第五局甲胜$\}$，则 B_1，B_2，B_3 互不相容，且 $B=B_1+B_2+B_3$. 由题设知：

$$P(B_1)=0.6^3=0.216,$$
$$P(B_2)=C_3^2\times0.6^2\times0.4\times0.6=0.259,$$
$$P(B_3)=C_4^2\times0.6^2\times0.4^2\times0.6=0.207,$$

所以，甲胜的概率为

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B_1+B_2+B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)\\&=0.216+0.259+0.207=0.682\end{aligned}$$

由于 $P(B)=0.682>P(A)=0.648$，所以采用五局三胜制时甲胜的概率要大于采用三局两胜制时甲胜的概率. 也就是说，采五局三胜制时对甲更有利.

例 18 甲、乙、丙三门高射炮向同一架飞机射击，甲、乙、丙炮射中飞机的概率分别是 0.4，0.5，0.7. 设若只有一门炮射中，飞机坠毁的概率为 0.2；若有两门炮射中，飞机坠毁的概率为 0.6；若三门炮都射中，飞机必坠毁. 试求飞机坠毁的概率.

【解析】 设 $B=\{$飞机坠毁$\}$，$A_i=\{$有 i 门炮射中飞机$\}i=(0,1,2,3)$，则 A_0，A_1，A_2，A_3 构成完备事件组，且三门高射炮各自射击飞机射中与否相互独立. 按加法公式及乘法公式. 得

$$P(A_0)=(1-0.4)\times(1-0.5)\times(1-0.7)=0.09,$$

$$\begin{aligned}P(A_1)&=0.4\times(1-0.5)\times(1-0.7)+(1-0.4)\times0.5\times(1-0.7)\\&\quad+(1-0.4)\times(1-0.5)\times0.7=0.36,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A_2)&=0.4\times0.5\times(1-0.7)+0.4\times(1-0.5)\times0.7\\&\quad+(1-0.4)\times0.5\times0.7=0.41,\end{aligned}$$

$$P(A_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14,$$

再由题意知 $P(B\mid A_0)=0$，$P(B\mid A_1)=0.2$，$P(B\mid A_2)=0.6$，$P(B\mid A_3)=1$，故利用全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)$$
$$=0.09\times0+0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1=0.458$$

例 19　盒中有 12 个乒乓球，其中有 3 个旧球和 9 个新球. 第一次比赛时从中任取 3 个来用，赛完后仍放回盒中；第二次比赛时再从盒中任取 3 个.

(1)求第二次取出的球都是新球的概率；

(2)若已知第二次取出的球都是新球，求第一次取出的球都是新球的概率.

【解析】　两次取球，每次都可能出现四种情况，即取出新球个数可能为 $i=0$，1，2，3. 设 $A_i=\{$第一次取出 i 个新球$\}$，$B_i=\{$第二次取出 i 个新球$\}(i=1,2,3)$.

(1)第一次取球的结果对第二次取球的结果有影响，而所求的是 B_3 发生的概率，这需要考虑第一次取球的各种结果出现条件下的各条件概率，并使用全概率公式. 由题意知 A_0，A_1，A_2，A_3 是完备事件组，而

$$P(A_i)=\frac{C_9^iC_3^{3-i}}{C_{12}^3},\ P(B_3\mid A_i)=\frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3}(i=0,1,2,3),$$

所以，由全概率公式得

$$P(B_3)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B_3\mid A_i)=\sum_{i=0}^{3}\left(\frac{C_9^iC_3^i}{C_{12}^3}\times\frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3}\right)$$
$$=\frac{1}{(C_{12}^3)^2}\sum_{i=0}^{3}C_9^iC_3^{3-i}C_{9-i}^3=\frac{9!}{(C_{12}^3)^2}\sum_{i=0}^{3}\frac{1}{(i!)^2(3-i)!\ (6-i)!}$$
$$=\frac{441}{3025}\approx0.146$$

(2)由贝叶斯公式得

$$P(A_3\mid B_3)=\frac{P(A_3)P(B_3\mid A_3)}{P(B_3)}=\left(\frac{C_9^3C_3^0C_6^3}{(C_{12}^3)^2}\right)/P(B_3)=\frac{5}{21}\approx0.238$$

例 20　假设有两箱同种零件，第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品. 现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后随机取两个零件(取出的零件均不放回). 试求：

(1)先取出的零件是一等品的概率 p；

(2)在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的概率 q.

【解析】　设 $B_i=\{$被挑出的是第 i 箱$\}(i=1,2)$，$A_j=\{$第 j 次取出的零件是一等品$\}(j=1,2)$，则由题设知

$$P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2},\ P(A_1\mid B_1)=\frac{1}{5},\ P(A_1\mid B_2)=\frac{3}{5}$$

(1)由全概率公式有

$$p=P(A_1)=P(B_1)P(A_1\mid B_1)+P(B_2)P(A_1\mid B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

(2)由条件概率的定义及全概率公式得