高等代数考研选讲

于增海 编著

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\cdots,E_{nn}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{pmatrix}.$$

国防工业出版社
National Defense Industry Press

高等代数考研选讲

于增海　编著

国防工业出版社

·北京·

前　言

编者自1980年起开始从事高等代数教学与研究，特别是2000年以后又从事高等代数考研辅导，多年的教学生涯积累了丰富的教学经验，收集了大量有价值的考研资料，历经两年，编写完成本书。

本书有下列特点：

◆ 在基础知识概述中，不仅系统概括了基础知识，并适当补充了一些考研需要的定理、方法。例如在第2章补充了行列式的3个降阶公式；第4章给出了列满秩矩阵；第9章补充了向量到子空间内射影的求法等。显然，没有这些补充有些问题处理起来难度会有所增加，甚至无法解决。

◆ 将题目进行了分类，给出了一些常见的题型。例如第2章给出了范德蒙行列式、三对角线形行列式、循环行列式、加边行列式等。

◆ 对每一题型讲解了常用的解题方法，例如第4章4.1节讲解了求方阵幂的5种常用方法：归纳法、和分解法、积分解法、对角化法、零化多项式法。并用18个典型例题加以说明。

◆ 对许多解题方法给出典型例题。其中许多题目都选自考研试题，特别是选解了2005年以后的考研试题，这些题目不仅有名牌大学的试题，而且较多的是一般高校的一些优秀题目。

本书可作为“高等代数选讲”课程的教材，也可以作为“高等代数”、“线性代数”课程的教学参考书。

本书的编写和出版得到商丘师范学院、数学与信息科学学院领导和同事的大力支持，在此谨表衷心的感谢！

由于编者水平所限，不妥之处在所难免，恳请读者批评、赐教，如有任何批评、赐教，请发至：yuzenghaisq@163.com.

编　者

目　录

第1章 多项式

1.1 多项式的运算

一 基础知识概述

多项式的加法、减法、乘法定义如常，数域 P 上关于文字 x 的多项式的全体记为 $P[x]$，$P[x]$关于多项式的加法，乘法构成环，称为一元多项式环. $P[x]$关于多项式加法，数乘多项式构成数域 P 上的线性空间，这个线性空间是无限维的.

定理 1(次数定理) 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，$f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$，则

(1) 如果 $f(x)+g(x)\neq 0$，则

$$\partial(f(x)+g(x))\leqslant \max(\partial(f(x)),\partial(g(x)));$$

(2) $$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x)).$$

定义 1 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，若存在 $h(x)\in P[x]$，使

$$f(x)=g(x)h(x), \tag{1-1}$$

则称 $g(x)$整除 $f(x)$，记为 $g(x)\mid f(x)$，否则就称 $g(x)$不能整除 $f(x)$，记为 $g(x)\nmid f(x)$.

整除有以下性质：

性质 1 若 $g(x)\mid f(x)$，$f(x)\mid g(x)$，则存在非零常数 c，使得 $f(x)=cg(x)$.

性质 2 (整除的传递性)若 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)\Rightarrow f(x)\mid h(x)$.

性质 3 若 $f(x)\mid g_i(x)$，$i=1,2,\cdots,r$，$\forall u_i(x)\in P[x]$，有

$$f(x)\mid (g_1(x)u_1(x)+g_2(x)u_2(x)+\cdots+g_r(x)u_r(x)).$$

定理 2(带余除法定理) 设 $f(x),g(x)$是 $P[x]$中任意两个多项式，且 $g(x)\neq 0$，那么 $P[x]$中存在唯一一对多项式 $q(x),r(x)$，使

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x) \tag{1-2}$$

成立，其中 $r(x)=0$ 或$\partial(r(x))<\partial(g(x))$. 称 $q(x)$为 $g(x)$除 $f(x)$的商式，$r(x)$为 $g(x)$除 $f(x)$的余式.

推论 2.1 $\forall f(x),g(x)\in P[x]$，$g(x)\neq 0$，那么 $g(x)\mid f(x)\Leftrightarrow g(x)$除 $f(x)$的余式 $r(x)$为零.

性质 4 多项式的整除性与数域的扩张无关.

性质 5 设 $f(x),g(x)$是复数域上的多项式，则 $g(x)\mid f(x)$的充要条件是 $g(x)$的根都是 $f(x)$的根(重根按重数计算).

性质 6 设 $f(x),g(x)$是数域 P 上的多项式，其分解式为

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),\ g(x)=bp_1^{t_1}(x)p_2^{t_2}(x)\cdots p_s^{t_s}(x). \tag{1-3}$$

其中 a,b 分别为 $f(x),g(x)$的首项系数；$r_i,t_i\in N$，$p_i(x)(i=1,2,\cdots,s)$是首一互不相同的不

可约多项式，则

$$g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow t_i \leqslant r_i, i=1,2,\cdots,s.$$

式(1-3)可以称为准标准分解式.

二 题型与方法

证明多项式的整除性是本节的主要题型，下面给出一些常用的方法.

方法 1 定义法

要证 $g(x) \mid f(x)$，需要构造 $h(x)$，使 $f(x)=g(x)h(x)$. 若 $f(x)$ 是具体的多项式，常常将 $f(x)$ 分解因式，只需分解出因式 $g(x)$.

方法 2 用带余除法定理证明

要证 $g(x) \mid f(x)$，只要证 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为 0. 在整数环中带余除法定理也成立，要证整数 n 整除 m，只要证 n 除 m 余数为 0.

方法 3 准标准分解式法

要证 $g(x) \mid f(x)$，只要证它们的准标准分解式中同一个不可约因式的方幂前者不大于后者.

方法 4 根法

要证 $g(x) \mid f(x)$，只要证在复数域中 $g(x)$ 的根都是 $f(x)$ 的根(重根按重数计算).

例 1.1 设有理多项式

$f(x)=(x+1)^{k+n}+2x(x+1)^{k+n-1}+(2x)^2(x+1)^{k+n-2}+\cdots+(2x)^k(x+1)^n$，

这里 k,n 都是非负整数，证明：

$$x^{k+1} \mid (x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}.$$

分析 将 $(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}$ 分解因式，分解出因式 x^{k+1}.

证明 因为

$$\begin{aligned}
&(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}\\
&=(2x-(x+1))[(x+1)^k+2x(x+1)^{k-1}+\cdots+(2x)^k](x+1)^n+(x+1)^{k+n+1}\\
&=[(2x)^{k+1}-(x+1)^{k+1}](x+1)^n+(x+1)^{k+n+1}\\
&=(2x)^{k+1}(x+1)^n,
\end{aligned}$$

所以 $x^{k+1} \mid (x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}$.

例 1.2 (陕西师范大学 2003 年，20 分)证明：多项式 $g(x)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$ 能整除多项式 $f(x)=1+x^4+x^8+\cdots+x^{4n}$ 的充分必要条件是 n 为偶数.

证明 由已知得

$$g(x)=\frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2}, \quad f(x)=\frac{1-(x^4)^{n+1}}{1-x^4},$$

于是

$$\begin{aligned}
g(x) \mid f(x) &\Leftrightarrow \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2} \,\Big|\, \frac{1-(x^4)^{n+1}}{1-x^4} \Leftrightarrow (1+x^2)(1-(x^2)^{n+1}) \mid (1-(x^4)^{n+1})\\
&\Leftrightarrow 1+x^2 \mid 1+(x^{n+1})^2 \Leftrightarrow 1+x^2 \text{ 的根 } \pm \mathrm{i} \text{ 都是 } 1+(x^{n+1})^2 \text{ 的根}\\
&\Leftrightarrow 1+(-1)^{n+1}=0 \Leftrightarrow n \text{ 为偶数}.
\end{aligned}$$

例 1.3 设 m 为正整数，则 $g^m(x) \mid f^m(x)$ 的充要条件为 $g(x) \mid f(x)$.

证明 充分性是显然的，下证必要性.

设

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),g(x)=bp_1^{t_1}(x)p_2^{t_2}(x)\cdots p_s^{t_s}(x),$$

这里 r_i,t_i 是自然数，$i=1,2,\cdots,s$，$p_1(x),\cdots,p_s(x)$是互不相同的首一不可约多项式，$a,b\in P$.
于是

$$\begin{aligned}g^m(x)\mid f^m(x)&\Rightarrow r_im\geqslant t_im,i=1,2,\cdots,s\\&\Rightarrow r_i\geqslant t_i,i=1,2,\cdots,s\Rightarrow g(x)\mid f(x).\end{aligned}$$

例 1.4 x^d-1 整除 x^n-1 必要且只要 d 整除 n.

分析 前一个整除——x^d-1 整除 x^n-1——指的是多项式的整除，后一整除——d 整除 n——指的是整数的整除. 在多项式环与整数环中带余除法定理都成立.

证明 充分性. 由 d 整除 n，存在正整数 k，使 $n=kd$，于是

$$x^n-1=x^{kd}-1=(x^d-1)(x^{d(k-1)}+\cdots+1),$$

故 $x^d-1\mid x^n-1$.

必要性 由整数的带余除法定理，设

$$n=dq+r,$$

这里整数 $r=0$，或者 $0<r<d$，只要证明 $r=0$ 即可. 若 $0<r<d$，则

$$\begin{aligned}x^n-1&=x^{dq+r}-1=x^{dq}x^r-x^r+x^r-1\\&=x^r(x^{dq}-1)+(x^r-1),\end{aligned}$$

由充分性知 $x^d-1\mid x^{dq}-1$，由已知 $x^d-1\mid x^n-1$，则 $x^d-1\mid x^r-1$，于是$\partial(x^d-1)\leqslant\partial(x^r-1)$，故 $d\leqslant r$，矛盾.

例 1.5 证明：对于任意正整数 n，均有 $x^2+x+1\mid x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$.

分析 只要证明 x^2+x+1 的根都是后一多项式的根.

证明 设 α 为 x^2+x+1 的根，则 $\alpha^2+\alpha+1=0$，且 $\alpha^3=1,\alpha\neq1$. 因为

$$\begin{aligned}\alpha^{n+2}+(\alpha+1)^{2n+1}&=\alpha^{n+2}+(-\alpha^2)^{2n+1}=\alpha^{n+2}+(-1)^{2n+1}\alpha^{4n+2}\\&=\alpha^{n+2}-\alpha^{3n}\alpha^{n+2}=\alpha^{n+2}-\alpha^{n+2}=0,\end{aligned}$$

所以 α 是 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$的根. 注意到 x^2+x+1 无重根，则 x^2+x+1 的根都是 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$的根，故

$$x^2+x+1\mid x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}.$$

例 1.6 设 $f(x)=x^{3m}-x^{3n+1}+x^{3p+2}$，$g(x)=x^2-x+1$，其中 m,n,p 是非负整数，则 $g(x)\mid f(x)$的充要条件是 m,n,p 具有相同的奇偶性.

证明 由 $g(x)$的两个根为 $\omega_1=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\omega_2=\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，则

$$\omega_1^3=\omega_2^3=-1,\omega_1+\omega_2=1,\omega_1^2+\omega_2^2=-1. \tag{1-4}$$

充分性. 当 m,n,p 同为偶数时，有

$$f(\omega_i)=(-1)^m-(-1)^n\omega_i+(-1)^p\omega_i^2=1-\omega_i+\omega_i^2=g(\omega_i)=0,$$

这里 $i=1,2$，于是 $g(x)$的根都是 $f(x)$的根，注意到 $g(x)$无重根，故 $g(x)\mid f(x)$.

当 m,n,p 同为奇数时，类似可证.

必要性. 由 $g(x)\mid f(x)$，则 ω_1,ω_2 都是 $f(x)$的根，于是

$$f(\omega_1)=(-1)^m-(-1)^n\omega_1+(-1)^p\omega_1^2=0,$$
$$f(\omega_2)=(-1)^m-(-1)^n\omega_2+(-1)^p\omega_2^2=0,$$

因而

$$0=2(-1)^m-(-1)^n(\omega_1+\omega_2)+(-1)^p(\omega_1^2+\omega_2^2)$$
$$\overset{(1-4)}{=\!=}2(-1)^m-(-1)^n-(-1)^p=0,$$

即 $2(-1)^m=(-1)^n+(-1)^p$，故 m,n,p 具有相同的奇偶性.

例 1.7 若$(s,n+1)=1$，则 $f(x)=x^{sn}+x^{n(s-1)}+\cdots+x^s+1$ 可被 $g(x)=x^n+\cdots+x+1$ 整除.

证明 设 α 是 $g(x)$的根，则 $\alpha\neq1,\alpha^{n+1}=1$. 注意到 $g(x)$无重根，故只需证 $f(\alpha)=0$，则结论成立.

先证 $\alpha^s-1\neq0$. 若 $\alpha^s=1$，由$(s,n+1)=1$，则存在整数 u,v 使，$su+(n+1)v=1$，于是

$$\alpha=\alpha^{su+(n+1)v}=\alpha^{su}\alpha^{(n+1)v}=(\alpha^s)^u=1,$$

这与 $\alpha\neq1$ 矛盾，故 $\alpha^s-1\neq0$. 由此可知

$$f(\alpha)=\alpha^{sn}+\alpha^{n(s-1)}+\cdots+\alpha^s+1=\frac{(\alpha^s)^{n+1}-1}{\alpha^s-1}=0.$$

例 1.8 设

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},g(x)=(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_m)^{k_m},$$

这里 $k_i>1,a_i\in R,i=1,2,\cdots,m$，证明：$g(x)\nmid f(x)$.

证明 反证法. 若 $g(x)\mid f(x)$，则 $f(x)$有重因式$(x-a_i)$，于是 $f(x)$有重根 a_i，这与 $f(x)$无重根矛盾.

例 1.9 （南京大学 2007 年，10 分）设 n 为正整数，$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$都是多项式，并且

$$x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x+1\mid f_1(x^{n+1})+xf_2(x^{n+1})+\cdots+x^{n-1}f_n(x^{n+1}),$$

证明：$(x-1)^n\mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$.

证明 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是不为 1 的所有 $n+1$ 次单位根，则

$$x-\varepsilon_i\mid x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x+1\mid f_1(x^{n+1})+xf_2(x^{n+1})+\cdots+x^{n-1}f_n(x^{n+1}),$$

这里 $i=1,2,\cdots,n$，于是

$$f_1(1)+\varepsilon_if_2(1)+\cdots+\varepsilon_i^{n-1}f_n(1)=0,i=1,2,\cdots,n. \qquad (1-5)$$

是以 $f_1(1),f_2(1),\cdots,f_n(1)$为未知量的齐次线性方程组. 由(1-5)的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&\varepsilon_1&\varepsilon_1^2&\cdots&\varepsilon_1^{n-1}\\1&\varepsilon_2&\varepsilon_2^2&\cdots&\varepsilon_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\varepsilon_n&\varepsilon_n^2&\cdots&\varepsilon_n^{n-1}\end{vmatrix}\neq0,$$

则(1-5)只有零解，即 $f_1(1)=f_2(1)=\cdots=f_n(1)=0$，因而 $x-1\mid f_i(x),i=1,2,\cdots,n$，故

$$(x-1)^n\mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x).$$

例 1.10 （西北大学 2003 年，15 分）设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)(n\geqslant 2)$ 为多项式，且满足

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\mid f_1(x^n)+xf_2(x^n)+\cdots+x^{n-1}f_n(x^n), \tag{1-6}$$

证明：存在某一常数 c 使得 $(x-1)^n\left|\prod_{i=1}^{n}(f_i(x)-c)\right.$.

证明 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 是不为 1 的所有 n 次单位根，由(1-6)知 $\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是 $f_1(x^n)+xf_2(x^n)+\cdots+x^{n-1}f_n(x^n)$ 的根，得齐次线性方程组

$$\begin{cases}f_1(1)+\varepsilon_1 f_2(1)+\cdots+\varepsilon_1^{n-1}f_n(1)=0,\\ f_1(1)+\varepsilon_2 f_2(1)+\cdots+\varepsilon_2^{n-1}f_n(1)=0,\\ \qquad\vdots\\ f_1(1)+\varepsilon_{n-1}f_2(1)+\cdots+\varepsilon_{n-1}^{n-1}f_n(1)=0.\end{cases} \tag{1-7}$$

设 $f_1(1)=c$，注意到

$$c+c\,\varepsilon_i+\cdots+c\,\varepsilon_i^{n-1}=c(1+\varepsilon_i+\cdots+\varepsilon_i^{n-1})=0, i=1,2,\cdots,n-1, \tag{1-8}$$

将(1-7)的第 i 个方程减去(1-8)的第 i 个等式得齐次线性方程组

$$\begin{cases}\varepsilon_1(f_2(1)-c)+\cdots+\varepsilon_1^{n-1}(f_n(1)-c)=0,\\ \varepsilon_2(f_2(1)-c)+\cdots+\varepsilon_2^{n-1}(f_n(1)-c)=0,\\ \qquad\vdots\\ \varepsilon_{n-1}(f_2(1)-c)+\cdots+\varepsilon_{n-1}^{n-1}(f_n(1)-c)=0.\end{cases} \tag{1-9}$$

由(1-9)的系数行列式不为 0，知其只有零解，于是 $f_2(1)-c=\cdots=f_n(1)-c=0$. 注意到 $f_1(1)-c=0$，则 $x-1\mid f_i(x)-c, i=1,2,\cdots,n$，故 $(x-1)^n\left|\prod_{i=1}^{n}(f_i(x)-c)\right.$.

最后再看几个与多项式计算有关的题目.

例 1.11 证明：多项式

$$f(x)=(x^{50}-x^{49}+x^{48}-\cdots+x^2-x+1)(x^{50}+x^{49}+x^{48}+\cdots+x^2+x+1),$$

无奇数次项，即奇数次项的系数全为 0.

证明 因为

$$f(-x)=(x^{50}+x^{49}+\cdots+x^2+x+1)(x^{50}-x^{49}+\cdots+x^2-x+1)=f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶函数，故 $f(x)$ 的奇数次项的系数全为 0.

例 1.12 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{n-1}(x)$ 是 $n-1$ 个多项式，证明：若

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}\mid f_1(x^n)+xf_2(x^n)+\cdots+x^{n-2}f_{n-1}(x^n), \tag{1-10}$$

则 $f_i(x)$ 的所有项系数之和为 $0, i=1,2,\cdots,n-1$.

分析 只需证明 $f_i(1)=0$.

证明 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 是不为 1 的所有 n 次单位根，由(1-10)知 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 是多项式

$$f_1(x^n)+xf_2(x^n)+\cdots+x^{n-2}f_{n-1}(x^n)$$

的根，于是

$$f_1(1)+\varepsilon_i f_2(1)+\cdots+\varepsilon_i^{n-2}f_{n-1}(1)=0 \tag{1-11}$$

$i=1,2,\cdots,n-1$. 将(1-11)看做以 $f_1(1),f_2(1),\cdots,f_{n-1}(1)$ 为未知量的齐次线性方程组，其

系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \cdots & \varepsilon_1^{n-2} \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon_{n-1} & \varepsilon_{n-1}^2 & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

故(1－11)只有零解，于是 $f_i(1)=0$，即 $f_i(x)$的所有项系数之和为 0，$i=1,2,\cdots,n-1$.

例 1.13 设 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$均为实系数多项式，证明：若

$$f^2(x) = xg^2(x) + x^2h(x), \tag{1-12}$$

则 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

证明 若 $f(x)\neq 0$，由 $f(x)$是实系数多项式，则 $f^2(x)$是首项系数为正的偶次多项式，由(1－12)知

$$\partial(x(g^2(x)+h^2(x))) = 1+\partial(g^2(x)+h^2(x)) = \text{偶数},$$

从而$\partial(g^2(x)+h^2(x))$是奇数，这与 $g^2(x)+h^2(x)$是首项系数为正的和偶次多项式矛盾. 故 $f(x)=0$.

由(1－12)知 $g^2(x)+h^2(x)=0$，于是 $g^2(x)=-h^2(x)$. 若 $g(x)\neq 0$，则 $g^2(x)$的首项系数为正和，$-h^2(x)$的首项系数为负，矛盾，故 $g(x)=0$，进而 $h(x)=0$.

思考题 若 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$是复系数多项式，由式(1－12)成立可否得到 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

例 1.14 设 $f(x)$，$g(x)$为任意两个非零多项式，且$\partial(g(x))\geqslant 1$，证明：

$$f(x) = r_m(x)g^m(x)+\cdots+r_1(x)g(x)+r_0(x), \tag{1-13}$$

其中 $r_0(x)$，$r_1(x)$，$\cdots$，$r_m(x)$或为 0，或为次数小于 $g(x)$的多项式，但 $r_m(x)\neq 0$，上述表示是唯一的.

分析 式(1－13)是将多项式表示成 $x-x_0$ 的方幂之和的推广，用其计算方法证之.

证明 先证存在性. 由带余除法定理，可设

$$f(x) = g(x)q_1(x)+r_0(x), \tag{1-14}$$

这里 $r_0(x)=0$，或$\partial(r_0(x))<\partial(g(x))$. 若$\partial(q_1(x))\geqslant\partial(g(x))$，继续用带余除法，并如此进行下去，经有限步，得

$$\begin{gathered} q_1(x) = g(x)q_2(x)+r_1(x), \\ \vdots \\ q_{m-1}(x) = g(x)q_m(x)+r_{m-1}(x), \end{gathered}$$

这里 $r_0(x)$，$r_1(x)$，$\cdots$，$r_m(x)$为余式，$q_m(x)\neq 0$，$\partial(q_m(x))<\partial(g(x))$. 将以上各式代入(1－14)，得

$$\begin{aligned} f(x) &= g^2(x)q_2(x)+r_1(x)g(x)+r_0(x) \\ &\ \ \vdots \\ &= q_m(x)g^m(x)+\cdots+r_1(x)g(x)+r_0(x), \end{aligned}$$

记 $q_m(x)=r_m(x)$，则存在性得证.

如果还有

$$f(x)=r'_n(x)g^n(x)+\cdots+r'_1(x)g(x)+r'_0(x), \tag{1-15}$$

(1－13)－(1－15)立得 $g(x)\mid r_0(x)-r'_0(x)$，故 $r_0(x)=r'_0(x)$. 重复上面的过程，如此进行下去，得

$$r_1(x)=r'_1(x),\cdots,r_m(x)=r'_m(x),m=n.$$

唯一性得证.

例 1.15 求多项式 $f(x)$，使得

$$x^2+1\mid f(x),x^3+x^2+1\mid f(x)+1.$$

解 由整除的定义知存在多项式 $g(x),h(x)$，使得

$$f(x)=(x^2+1)g(x), \tag{1-16}$$

$$f(x)+1=(x^3+x^2+1)h(x). \tag{1-17}$$

由(1－16)知 $\pm\mathrm{i}$ 是 $f(x)$ 的根，分别代入(1－17)，得

$$1=(\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^2+1)h(\mathrm{i})=-\mathrm{i}h(\mathrm{i})\Rightarrow h(\mathrm{i})=\mathrm{i},$$

$$1=((-\mathrm{i})^3+(-\mathrm{i})^2+1)h(-\mathrm{i})=\mathrm{i}h(-\mathrm{i})\Rightarrow h(-\mathrm{i})=-\mathrm{i}.$$

取 $h(x)=x$，由(1－17)，得

$$f(x)=x^4+x^3+x-1=(x^2+1)(x^2+x-1),$$

故 $f(x)=x^4+x^3+x-1$ 为所求.

例 1.16 求一个次数最低的实多项式，使其被 x^2+1 除余式为 $x+1$，被 x^3+x^2+1 除余式为 x^2-1.

解 设 $f(x)$ 为所求，由带余除法定理知，存在多项式 $g(x),h(x)$，使得

$$f(x)=(x^2+1)g(x)+(x+1)=(x^3+x^2+1)h(x)+(x^2-1). \tag{1-18}$$

显然 $\partial(f(x))\geqslant 2$，令 $h(x)=ax+b\in R[x]$，取 $x=\mathrm{i}$ 代入(1－18)，得

$$-a+3+\mathrm{i}(b+1)=0,$$

于是 $a=3,b=-1$. 直接验证可知

$$f(x)=(x^3+x^2+1)(3x-1)+(x^2-1)=3x^4+2x^3+3x-2$$

为所求.

例 1.17 （中国科学院 2005 年，20 分）试求 7 次多项式 $f(x)$，使 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^4$ 整除，而 $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^4$ 整除.

解 由 $(x-1)^4\mid f(x)+1$，则 1 至少是 $f(x)+1$ 的 4 重根，于是 1 至少是 $f'(x)$ 的 3 重根，那么 $(x-1)^3\mid f'(x)$. 同样可得 $(x+1)^3\mid f'(x)$，由 $((x-1)^3,(x+1)^3)=1$，则 $(x-1)^3(x+1)^3\mid f'(x)$. 由 $f'(x)$ 是 6 次多项式，可设

$$f'(x)=a(x-1)^3(x+1)^3=a(x^6-3x^4+3x^2-1),$$

令

$$f(x)=a\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x\right)+b.$$

由 $f(1)=-1,f(-1)=1$，得

$$a\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{5}\right)+b=-1,a\left(-\frac{1}{7}+\frac{3}{5}\right)+b=1,$$

解之得 $a=\frac{35}{16}$，$b=0$，因而

$$f(x)=\frac{5}{16}x^7-\frac{21}{16}x^5+\frac{35}{16}x^3-\frac{35}{16}x.$$

例 1.18 （广西师范大学 2007 年，15 分）试求一个 3 次多项式 $f(x)$，使 $f(x)+1$ 能被 x^2 整除，而 $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^2$ 整除.

参考答案： $f(x)=4x^3+6x^2-1$.

1.2 最大公因式与最小公倍式

一 基础知识概述

1. 最大公因式

定义 1 设 $f(x)$、$g(x)$，$d(x)\in P[x]$，如果

(1) $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$；

(2) 若 $\varphi(x)\mid f(x)$，$\varphi(x)\mid g(x)$，则 $\varphi(x)\mid d(x)$，

则称 $d(x)$ 为 $f(x)$、$g(x)$ 的最大公因式.

我们用 $(f(x),g(x))$ 表示 $f(x)$、$g(x)$ 的首一的最大公因式.

定理 1（最大公因式定理） $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$，$g(x)$ 都有最大公因式，且 $f(x)$，$g(x)$ 任意一个最大公因式 $d(x)$ 都可以表成 $f(x)$，$g(x)$ 的一个组合，即存在 $u(x)$，$v(x)\in P[x]$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x).$$

命题 1 若 $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的公因式，且存在多项式 $u(x)$，$v(x)\in P[x]$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x),$$

则 $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的最大公因式.

定义 2 称多项式 $f(x)$，$g(x)$ 互素，如果 $(f(x),g(x))=1$，即 $f(x)$，$g(x)$ 只有平凡公因式.

定理 2 $P[x]$ 中多项式 $f(x)$，$g(x)$ 互素 $\Leftrightarrow \exists\, u(x)$，$v(x)\in P[x]$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

多项式的互素具有以下三个性质：

性质 1 若 $(f(x),g(x))=1$，且 $f(x)\mid g(x)h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$.

性质 2 如果 $f_1(x)\mid g(x)$，$f_2(x)\mid g(x)$，且 $(f_1(x),f_2(x))=1$，则 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.

性质 3 设 $(f(x),g(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$，则 $(f(x),g(x)h(x))=1$.

命题 2 数域的扩张不影响最大公因式和互素.

2. 最小公倍式

定义 3 多项式 $m(x)$ 称为多项式 $f(x)$，$g(x)$ 的一个最小公倍式，如果

(1) $f(x)\mid m(x)$，$g(x)\mid m(x)$；

(2) $f(x)$，$g(x)$ 的任何一个倍式都是 $m(x)$ 的倍式.

我们用 $[f(x),g(x)]$ 表示 $f(x)$、$g(x)$ 的首一的最小公倍式.

定理 3 如果 $f(x)$，$g(x)$ 都是首项系数为 1 的多项式，那么

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}.$$

证明 显然$\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$是 $f(x),g(x)$的公倍式. 设 $\varphi(x)$是 $f(x),g(x)$的任一公倍式,即 $f(x)\mid\varphi(x),g(x)\mid\varphi(x)$,记$(f(x),g(x))=d(x)$,则可设

$$f(x)=f_1(x)d(x),g(x)=g_1(x)d(x),\qquad(1-19)$$

这里$(f_1(x),g_1(x))=1$. 由 $f(x)\mid\varphi(x)$,则存在多项式 $h(x)$,使

$$\varphi(x)=f(x)h(x),\qquad(1-20)$$

于是

$$\begin{aligned}g(x)\mid\varphi(x)&\xrightarrow{(1-19),(1-20)}g_1(x)d(x)\mid f_1(x)d(x)h(x)\\&\xrightarrow{d(x)\neq0}g_1(x)\mid f_1(x)h(x)\xrightarrow{(f_1,g_1)=1}g_1(x)\mid h(x),\end{aligned}$$

故存在多项式 $q(x)$使得 $h(x)=g_1(x)q(x)$. 代入式(1-20)得

$$\varphi(x)=f(x)g_1(x)q(x)\overset{(1-19)}{=\!=}\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}q(x),$$

于是

$$\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}\Bigg|\varphi(x),$$

故$\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$是 $f(x),g(x)$的最小公倍式. 注意到 $f(x),g(x)$都是首项系数为 1 的多项式,因而

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}.$$

二 题型与方法

题型 1 求具体多项式的最大公因式

首选的方法是辗转相除法,这种方法总能求出最大公因式. 其次可用因式分解的方法,因为没有一般的方法进行因式分解,所以此法不能保证求出最大公因式.

题型 2 证明最大公因式的方法

(1) 定义法:要证 $d(x)$是 $f(x),g(x)$的最大公因式,只要证 $d(x)$具有"一大二公"的性质,"公"指 $d(x)$是公因式;"大"指以被整除为大时,$d(x)$是公因式中最大的. 实际应用时,常把"大"换为 $d(x)$是 $f(x),g(x)$的"组合",即应用命题 2.

(2) 准标准分解式法:若

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),g(x)=bp_1^{t_1}(x)p_2^{t_2}(x)\cdots p_s^{t_s}(x),$$

其中 $r_i,t_i\in N,i=1,2,\cdots,s,p_1(x),\cdots,p_s(x)$是首一的互不相同的不可约多项式,记 $k_i=\min\{r_i,t_i\}$,则

$$(f(x),g(x))=p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x).$$

(3) 利用最大公因式的一些性质和最大公因式的等式.

例 1.19 证明:

$$(f(x)h(x),g(x)h(x)) = (f(x),g(x))h(x), \tag{1-21}$$

其中 $h(x)$ 是首一多项式.

证明 设 $d(x)=(f(x),g(x))$，则 $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$，于是 $dh\mid fh$，$dh\mid gh$，故 dh 是 fh，gh 的公因式.

由 $d(x)=(f(x),g(x))$，则存在多项式 $u(x)$，$v(x)$，使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x),$$

于是

$$u(x)h(x)f(x)+v(x)h(x)g(x)=d(x)h(x),$$

即 $d(x)h(x)$ 是 $f(x)h(x)$，$g(x)h(x)$ 的组合，故 $d(x)h(x)$ 是 $f(x)h(x)$，$g(x)h(x)$ 的最大公因式，注意到 $h(x)$ 是首一多项式，从而式(1-21)成立.

例 1.20 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$，$g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，且 $ad-bc\neq 0$，证明：

$$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x)).$$

分析 由 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$，$g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，解出 $f(x)$，$g(x)$.

证明 由 $ad-bc\neq 0$，解方程组

$$\begin{cases} f_1(x)=af(x)+bg(x), \\ g_1(x)=cf(x)+dg(x), \end{cases} \tag{1-22}$$

得

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{ad-bc}(df_1(x)-bg_1(x)), \\ g(x)=\dfrac{1}{ad-bc}(-cf_1(x)+ag_1(x)), \end{cases} \tag{1-23}$$

由(1-22)知 $f(x)$，$g(x)$ 的公因式都是 $f_1(x)$，$g_1(x)$ 的公因式，由(1-23)知 $f_1(x)$，$g_1(x)$ 的公因式都是 $f(x)$，$g(x)$ 的公因式，故

$$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x)).$$

注 希望认真体会这种解方程组的方法.

例 1.21 设 $f(x),g(x)\in Q[x]$，且 $(f(x),g(x))=1$，又

$$\varphi(x)=(x^3-1)f(x)+(x^3-x^2+x-1)g(x),$$
$$\psi(x)=(x^2-1)f(x)+(x^2-x)g(x),$$

则 $(\varphi(x),\psi(x))=x-1$.

分析 欲证 $(\varphi(x),\psi(x))=x-1$，只要证 $\left(\dfrac{\varphi(x)}{x-1},\dfrac{\psi(x)}{x-1}\right)=1$.

证明 易知 $x-1\mid\varphi(x)$，$x-1\mid\psi(x)$，于是得

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{x-1}=(x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x), \\ \dfrac{\psi(x)}{x-1}=(x+1)f(x)+xg(x), \end{cases} \tag{1-24}$$

因为

$$\begin{vmatrix} x^2+x+1 & x^2+1 \\ x+1 & x \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

由克莱姆法则知存在多项式 $u_1(x), u_2(x), v_1(x), v_2(x)$，使得

$$\begin{cases} f(x) = u_1(x)\dfrac{\varphi(x)}{x-1} + v_1(x)\dfrac{\psi(x)}{x-1}, \\ g(x) = u_2(x)\dfrac{\varphi(x)}{x-1} + v_2(x)\dfrac{\psi(x)}{x-1}, \end{cases} \tag{1-25}$$

由(1-24)和(1-25)知

$$(f(x), g(x)) = \left(\frac{\varphi(x)}{x-1}, \frac{\psi(x)}{x-1}\right) = 1,$$

故 $(\varphi(x), \psi(x)) = x-1$.

例 1.22 (1) 证明：只要 $\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}, \dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数都大于零，就可以选择适合

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x)) \tag{1-26}$$

的 $u(x)$ 与 $v(x)$，使

$$\partial(u(x)) < \partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right), \partial(v(x)) < \partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right). \tag{1-27}$$

(2) 上述 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是唯一的.

证明 (1) 对于 $d(x) = (f(x), g(x))$，存在多项式 $u_1(x), v_1(x)$

$$u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x) = d(x), \tag{1-28}$$

于是

$$u_1(x)\frac{f(x)}{d(x)} + v_1(x)\frac{g(x)}{d(x)} = 1. \tag{1-29}$$

作带余除法

$$u_1(x) = p(x)\frac{g(x)}{d(x)} + u(x), v_1(x) = q(x)\frac{f(x)}{d(x)} + v(x), \tag{1-30}$$

其中 $u(x), v(x)$ 是余式. 若 $u(x)=0$，则

$$\frac{g(x)}{d(x)} \Big| u_1(x) \xRightarrow{(1-29)} \frac{g(x)}{d(x)} \Big| 1,$$

这与 $\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数大于 0 矛盾，故 $u(x) \neq 0$. 同理 $v(x) \neq 0$，故(1-27)成立. 将(1-30)代入(1-28)，整理，得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) + \frac{f(x)g(x)}{d(x)}(p(x) + q(x)) = d(x),$$

比较两端的次数知 $\dfrac{fg}{d}(p+q) = 0$，故 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$.

(2) 若还存在 $u_0(x), v_0(x)$ 满足(1-27)，且 $u_0(x)f(x) + v_0(x)g(x) = (f(x), g(x))$，于是

$$u_0(x)\frac{f(x)}{d(x)} + v_0(x)\frac{g(x)}{d(x)} = 1, \tag{1-31}$$

(1 - 31)－(1 - 26)/$d(x)$，得

$$(u(x)-u_0(x))\frac{f(x)}{d(x)}+(v(x)-v_0(x))\frac{g(x)}{d(x)}=0.$$

则

$$\frac{f(x)}{d(x)}\left|(v(x)-v_0(x))\frac{g(x)}{d(x)}\Rightarrow\frac{f(x)}{d(x)}\right|(v(x)-v_0(x))\Rightarrow v(x)=v_0(x),$$

类似可证 $u(x)=u_0(x)$，唯一性成立.

例 1.23 设 $f(x)$，$g(x)$为不全为零的多项式，

$$M=\{u(x)f(x)+v(x)g(x)\mid u(x),v(x)\in P[x]\},$$

证明：M 中次数最低的多项式都是 $f(x)$，$g(x)$的最大公因式.

证明 设 $h(x)$是 M 中次数最低的多项式，则存在 $u(x)$，$v(x)$使得

$$h(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).\tag{1 - 32}$$

设 $d(x)=(f,g)$，则 $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$，由(1 - 32)知 $d(x)\mid h(x)$，故$\partial(d(x))\leqslant\partial(h(x))$. 注意到 $d(x)\in M$，$h(x)$是 M 中次数最低的多项式，则$\partial(d(x))=\partial(h(x))$，存在非零常数 c 使得 $h(x)=cd(x)$，故 $h(x)$是 $f(x)$，$g(x)$的最大公因式.

注：进一步可得"M 中次数最低的多项式全体恰好是 $f(x)$，$g(x)$的最大公因式的集合". 其证明留给读者.

例 1.24 (兰州大学 2008 年，20 分)设 P 是一个数域，$P[x]$是 P 上的一元多项式环. 称 $P[x]$的非空子集 I 为 $P[x]$的理想，如果对任意 $f(x)$，$g(x)\in I$，$h(x)\in P[x]$，有

$$f(x)\pm g(x)\in I,h(x)f(x)\in I.$$

证明：

(1) 对于 $P[x]$中任意理想 I，存在 $d_I(x)\in I$，使得对于任意 $f(x)\in I$，有 $d_I(x)\mid f(x)$.

(2) 对任意 $f(x)$，$g(x)\in P[x]$，

$$J=\{u(x)f(x)+v(x)g(x)\mid u(x),v(x)\in P[x]\}$$

是 $P[x]$的理想，且 $d_J(x)$是 $f(x)$，$g(x)$的最大公因式.

分析 关键是构造 $d_I(x)$，由$d_I(x)\mid f(x)$，知 $d_I(x)$是 I 中次数最低的多项式.

证明 (1) 若 $I=\{0\}$，取 $d_I(x)=0$，则结论成立. 若 $I\neq\{0\}$，取 I 中次数最低的首一多项式为 $d_I(x)$. $\forall f(x)\in I$，作带余除法

$$f(x)=d_I(x)q(x)+r(x),$$

这里 $r(x)$是余式. 只要证 $r(x)=0$，则 $d_I(x)\mid f(x)$. 不然，$\partial(r(x))<\partial(d_I(x))$，由 $d_I(x)\in I$，则 $f(x)-d_I(x)q(x)=r(x)\in I$，这与 $d_I(x)$的取法矛盾，故 $r(x)=0$.

(2) $\forall s(x)$，$t(x)\in J$，$\exists u_1(x)$，$u_2(x)$，$v_1(x)$，$v_2(x)\in P[x]$，使得

$$s(x)=u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x),t(x)=u_2(x)f(x)+v_2(x)g(x)$$

于是

$$s(x)\pm t(x)=(u_1(x)\pm u_2(x))f(x)+(v_1(x)\pm v_2(x))g(x)\in J.$$

$\forall h(x)\in P[x]$，有

$$h(x)s(x)=h(x)u_1(x)f(x)+h(x)v_1(x)g(x)\in J,$$

故 J 是 $P[x]$的理想.

由(1)，J 中存在 $d_J(x)$，$\forall h(x)\in J$，有 $d_J(x)\mid h(x)$. 显然 $f(x),g(x)\in J$，于是 $d_J(x)$是 $f(x)$，$g(x)$的公因式. 由 J 的定义知 $d_J(x)$是 $f(x)$，$g(x)$的组合，故 $d_J(x)$是 $f(x)$，$g(x)$的最大公因式.

例 1.25 设 $f(x)$，$g(x)$是两个不全为零的多项式，$\forall n\in \mathbf{N}$，证明：

$$(f(x),g(x))^n=(f^n(x),g^n(x)).$$

证明 若 $f(x)$，$g(x)$中有一个为常数，结论显然成立.

若 $f(x)$，$g(x)$的次数均大于 0，设

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),g(x)=ap_1^{t_1}(x)p_2^{t_2}(x)\cdots p_s^{t_s}(x),$$

这里 a,b 是非零数，$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_s(x)$是首一互不相同的不可约多项式，$r_1,\cdots,r_s,t_1,\cdots,t_s\in\mathbf{N}$. 记 $k_i=\min\{r_i,t_i\}$，$i=1,2,\cdots,s$，则

$$(f(x),g(x))^n=(p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x))^n=p_1^{nk_1}(x)p_2^{nk_2}(x)\cdots p_s^{nk_s}(x),$$

注意到 $\min\{nr_i,nt_i\}=nk_i$，则

$$(f(x)^n,g(x)^n)=p_1^{nk_1}(x)p_2^{nk_2}(x)\cdots p_s^{nk_s}(x)=(f(x),g(x))^n.$$

例 1.26 设 $f(x)$，$g(x)$为不全为零的多项式，证明：存在自然数 N，使当 $n_1,n_2>N$ 时，有

$$(f^{n_1}(x),g(x))=(f^{n_2}(x),g(x)).$$

证明 若$(f(x),g(x))=1$，取 $N=1$，则结论成立. 若

$$(f(x),g(x))=p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)=d(x)\neq 1,$$

这里 $p_1(x),\cdots,p_s(x)$是首一互不相同的不可约多项式，$r_1,\cdots,r_s$ 是正整数，设

$$f(x)=p_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x)f_1(x),g(x)=p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)g_1(x),$$

这里 $l_i\geqslant r_i,k_i\geqslant r_i,(p_i(x),f_1(x))=(p_i(x),g_1(x))=(f_1,g_1)=1,i=1,2,\cdots,s$. 取 $N=\max\{k_1,\cdots,k_s\}$，当 $n_1,n_2>N$ 时，则 $n_jl_i>k_i,j=1,2,i=1,2,\cdots,s$，则

$$(f^{n_1}(x),g(x))=(f^{n_2}(x),g(x))=p_1^{k_1}(x)\cdots p_s^{k_s}(x).$$

例 1.27 设 $f(x)$是一个多项式，用$\overline{f(x)}$表示把 $f(x)$的系数分别换成它们的共轭复数后得到的多项式，证明：

(1) 若 $g(x)\mid f(x)$，则$\overline{g(x)}\mid\overline{f(x)}$.

(2) 若 $d(x)=(f(x),\overline{f}(x))$，则 $d(x)$是实系数多项式.

证明 易知共轭多项式具有以下性质：

$$\overline{\overline{f(x)}}=f(x),\overline{f(x)+g(x)}=\overline{f(x)}+\overline{g(x)},\overline{f(x)\cdot g(x)}=\overline{f(x)}\cdot\overline{g(x)}.$$

(1) 若 $g(x)\mid f(x)$，则存在多项式 $h(x)$，使得 $f(x)=g(x)h(x)$，于是

$$\overline{f(x)}=\overline{g(x)h(x)}=\overline{g(x)}\,\overline{h(x)},$$

故$\overline{g(x)}\mid\overline{f(x)}$.

(2) 由 $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid\overline{f(x)}$，则$\overline{d(x)}\mid\overline{f(x)}$，$\overline{d(x)}\mid\overline{\overline{f(x)}}=f(x)$，于是$\overline{d(x)}\mid d(x)$. 注意到 $d(x)$，$\overline{d(x)}$，都是首一多项式，故 $d(x)=\overline{d(x)}$，于是 $d(x)$是实系数多项式.

题型 3 证明多项式的互素

要证 $f(x)$，$g(x)$互素，只要证 1 是 $f(x)$，$g(x)$的最大公因式，这样题型 2 中的方法都可以拿来用，下面把证明多项式互素的方法概述如下：