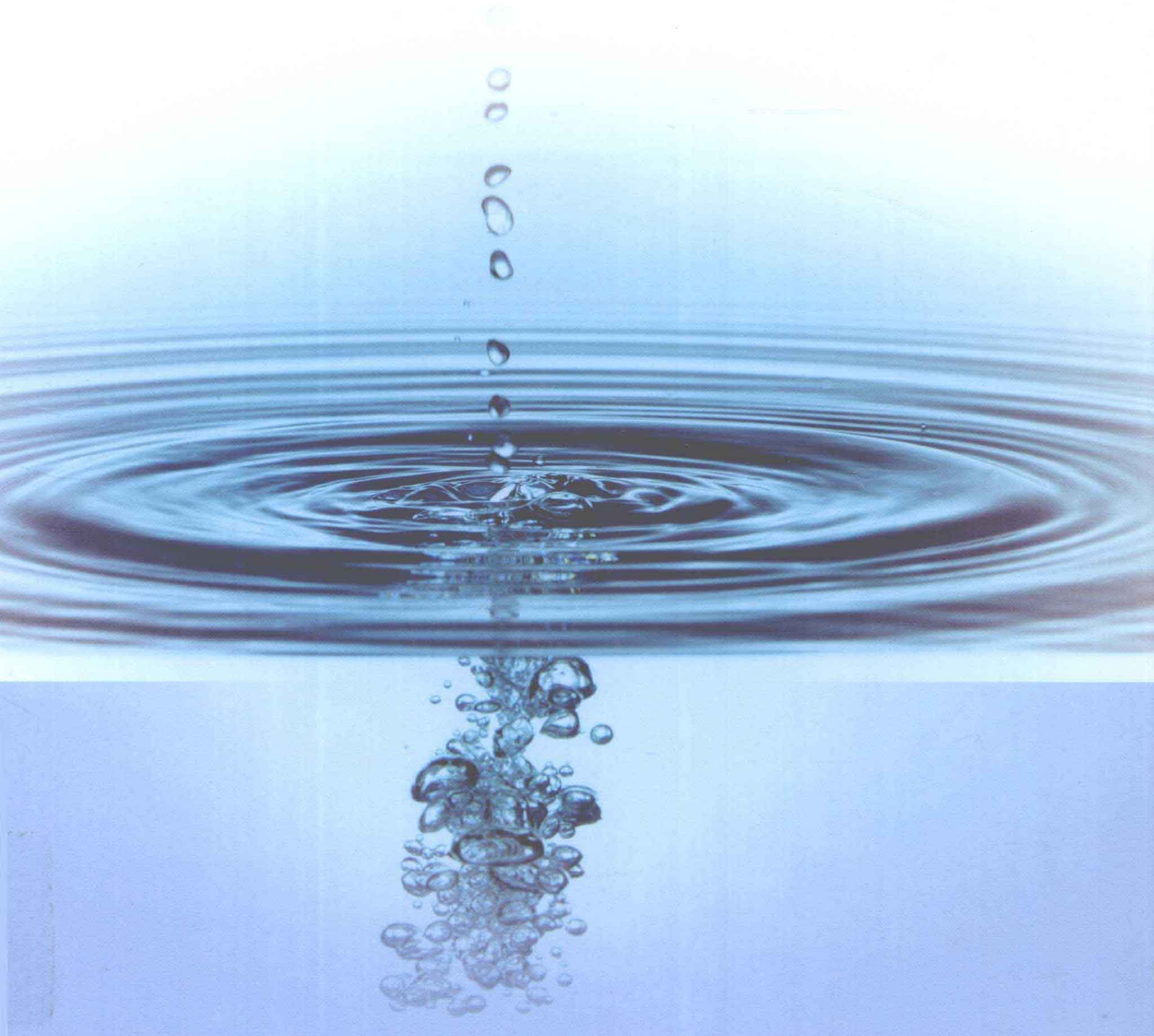
近岸水波的解析理论

余锡平 著



科 学 出 版 社

近岸水波的解析理论

余锡平　著

北　京

内 容 简 介

本书将散见于各类文献中的近岸水波典型现象的诸多解析解进行甄选、分类、归纳和整理，自成体系，对微幅波运动、浅水波运动、高阶非线性波运动、结构物引起的波的反射和相应的透射、平面上结构物引起波的绕射、半封闭水域内水体的共振以及地形变化引起水波在平面上的折射等，进行了全面的描述。

本书可供近岸海洋物理和港口、海岸与近海工程专业的本科生及研究生用于提高理论水平、加强专业基础，也可作为相关领域研究人员的入门参考书。

图书在版编目(CIP)数据

近岸水波的解析理论/余锡平著. —北京：科学出版社, 2012
ISBN 978-7-03-033712-2
Ⅰ. ①近… Ⅱ. ①余… Ⅲ. ①近海－水波－理论研究 Ⅳ. ①TV139.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 036579 号

责任编辑：沈 建／责任校对：张怡君
责任印制：赵 博／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京通州皇家印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 3 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2012 年 3 月第一次印刷 印张：16 1/4
字数：319 000

定价：80.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

没有人知道，古今中外有过多少文人墨客讴歌近岸水波奇特的魅力；同样也没有人知道，古今中外有过多少仁人志士研究近岸水波深奥的机理。近岸水波问题之所以能引发如此多研究者的兴趣，无疑是因为它具有高深的科学探索价值，同时也是因为它具有广泛的实际应用背景。

水波理论的研究者遍布各行各业，其中有数学家、物理学家、地学家、工程学家。水波理论的研究成果浩瀚如海，专著不胜枚举，其中不乏名著。这些著作中，有的关注水波理论的基础，有的关注水波理论的应用，有的关注水波理论的诸多方向，有的关注水波理论的某一专题，有的关注水波理论的历史演绎，有的关注水波理论的前沿进展。尽管如此，我们却很难找到一部从理论上深入系统地阐述近岸水波中最为常见却又极为重要的诸现象的入门著作。

我自 1997 年在东京大学土木工程系任教时开始，就有著书近岸水波解析理论和近岸水波计算方法的念头，1999 年回国后在指导研究生开展研究工作的过程中，更加坚定了这一想法。无奈到清华大学任教之前，工作频繁调动，未得心静；到了清华大学任教之后不久又被任命为水利系主任，杂务缠身，2006 年以后更是需要将主要精力投入钱正英院士主持的关于江苏沿海地区综合发展战略研究和关于浙江沿海及海岛开发战略研究两项中国工程院重大咨询项目，执笔进度一直缓慢。2011 年恰逢母校建校百年，作为在校工作的教师，感觉多少肩负着一点继往开来的责任，于是年初下定决心，将近岸水波的解析理论付梓，以为校庆纪念。

本书得以完成，首先要感谢把我指引到海岸工程学科领域的恩师林秉南院士和时任清华大学水利系系主任董曾南教授，也要感谢包括东京大学土木工程系堀川清司教授、渡辺晃教授、磯部雅彦教授以及英年早逝的香港大学章梓雄教授等长期鼓励我从事水波理论研究工作的各位尊敬的导师。近些年来因为参与中国工程院咨询项目的缘故，受雷志栋院士和杨诗秀教授的影响较大，二位前辈学者的敬业精神也起到了鞭策我加快写作的作用。我以前的学生、现在日本东京大学任教的刘海江博士、在美国普林斯顿大学攻读博士学位的李丹同学、在美国麻省理工大学攻读博士学位的袁兢同学等在我收集资料的过程中给予的热情帮助，也是本书得以完成的重要因素；我指导的博士研究生刘煜同学通读了书稿并校核了大部分公式的推导过程、描画了大部分结果例示图；牛小静博士负责了出版过程中和出版社的联络，更为重要的是，她替我分担了许多课题组的日常事务，使我能有更多的时间用于完成书稿，在此一并致谢。我还需感谢老伴在生活上的照顾以及阳光少年余衡

给予的精神上的轻松和愉快。书中不少资料来源于美国土木工程师协会水道、港口、海岸及海洋工程专业委员会公开的国际海岸工程会议 (ICCE) 论文集、日本土木学会海岸工程专业委员会公开的海岸工程会议论文集、日本港湾及空港研究所公开的研究报告、京都大学防灾技术研究所公开的研究报告等，我向这些单位为公开这些贵重资料所做的努力表示敬意。我还要特别感谢国家自然科学基金委员会杰出青年科学基金项目 (项目编号：50025925) 以及教育部长江学者奖励计划的支持，没有这些支持，我的研究经历可能不会如现在这般顺利。我也感谢水沙科学与水利水电工程国家重点实验室自主研究项目 (项目编号：2011-KY-1) 对本书出版的资助。

希望本书能对有志于近岸海洋动力学以及海岸工程学专业的本科生高年级同学和研究生低年级同学提高理论水平、加强专业基础有些帮助。书中涉及的数学表述较多，虽经反复核对，估计仍然难免错误，恳请读者批评指正。

余锡平

2011 年 7 月于清华园

目　　录

第二篇　二维水波

第1章 引 论

在物理学中，我们把存在于液体和气体之间的稳定交界面称作自由液面。因此，水动力学和流体力学中一般把水体和大气的交界面称为*自由水面*。自然界中的水体通常都带有自由水面。如果考虑问题的尺度远小于地球的半径，自由水面在静止和没有其他外部干扰的情况下可近似地被看作是一个平面，换句话说，水平状态通常可以被看成是自由水面在重力作用下的平衡状态。当自由表面因受某种干扰偏离了其平衡状态时，作用于水体的重力就会使自由表面具备回复到其平衡状态的趋势，而且，这种趋势随着自由表面偏离其平衡状态幅度的增大而加强。当作用于水体的外部干扰因环境变化而消失或者其强度被减弱时，自由水面就会因重力和惯性力的联合作用，在其平衡位置附近做起伏运动。如果水体的周边条件合适，这种起伏运动就会向特定的方向乃至所有方向传播。自由水面上扰动向某些方向或向四周传播的现象就是*水波*。

广义上的水波指的是自由水面的几何形状随时间变化的过程。在相当普遍的情况下，这种变化过程表现为自由水面上的扰动以一定的速度向四周传播，相应的波动有时也称为*行波*。在某些特殊情况下，自由水面随时间的变化过程也可能表现为其在某一平衡位置附近做周期性运动，这样的波动称为*驻波*。

水波是自然界中普遍存在的一种现象。海洋上的滚滚浪涛，湖泊中的漾漾涟漪，江河内的浩浩洪流，都是水波的例子。认识水波现象在很大程度上是人类认识自然的必然要求，探讨水波现象的基本规律也因此成为流体力学、海洋物理学、河流及海岸动力学等诸多学科领域的重要使命。

实际问题中的水波千姿百态，变化无穷。为了研究上方便起见，常常从各种角度对水波进行分类。根据自由水面的几何形状，可以区分*规则波*和*不规则波*。规则波指的是这样的一类波：它以一定的速度传播，其几何形状在传播过程中保持不变。由于这一特征，规则波有时也称为*守恒波*。不规则波中，描述其过程的参数在时间上和空间上均具有随机性并满足一定统计规律的，又称为*随机波*。也可以根据传播形式对水波进行分类。受地形作用传播方向不断发生变化的波称为*折射波*，在岸壁或建筑物的所用下传播方向被折反的波称为*反射波*，绕过固体建筑物的波则称为*绕射波*。水波也可以根据扰动力进行分类。因风而起的水面波称为*风波*，台风造成的水面波称为*风暴潮*，船舶运动引起的水面波称为*行船波*，海洋中由于地震造成的水面波称为*海啸*，起因于天体引力的水面波称为*潮汐*。水波还可以根据回复力进行分类。重力为主要回复力的水面波称为*重力波*，表面张力为主要回复力的水面

波称为*表面张力波*。

*水波理论*是研究水波的传播及其变形规律的科学。水波理论是流体力学的一个分支，它的基础就是流体运动所普遍遵循的力学原理，描述水波运动的基本方程也就是水动力学的基本方程，即以质量守恒原理为基础的*连续方程*，以动量守恒原理或者说是 Newton 第二定律为基础的*运动方程*，以及以能量守恒原理或者说是热力学第一定律为基础的*能量方程*。自由水面边界条件的处理在水波理论中具有特殊的重要性。在数学上，严格的水波问题是一个带有可动边界的不确定域上的非线性偏微分方程定解问题，一般条件下求解难度大。于是，有必要通过引入各种假设，在各种特定条件下使物理问题的数学表述得以简化，以至求解可能，从而得到水波运动的一些近似规律。

实际上，众多的前辈学者在各种简化条件下，针对各种形式的水波运动及变形情况，求得了许多具有重要意义的*解析解*，或称为*理论解*，并基于这些解揭示了诸多重要的物理现象，解决了众多重要的科学与工程问题。本书的主要目的就是把散见于各类文献的许多解析解进行甄选、分类、归纳和整理，形成一个体系，以便从理论上对近岸水波动力过程的若干典型现象，包括微幅波运动、浅水波运动、高阶非线性波运动、结构物引起的波的反射和相应的透射、平面上结构物引起波的绕射、半封闭水域内水体的共振以及地形变化引起水波在平面上的折射等，给出一个比较全面的描述。同时，我们还力求表明所涉及的解析解能够在一定程度上得到物理模型试验结果的验证。

水波理论在各类工程实践中有着广泛的应用。在海岸及近海工程中，准确估计作用在建筑物上的波浪力是合理设计建筑物的前提，也是保证建筑物安全的需要；在港口工程中，波浪条件不仅是港址选择以及港工建筑物布置和设计的重要依据，也在很大程度上决定了港口施工和运行的环境；在船舶工程中，无论是确定船体的稳定性，还是探讨行船阻力，水波的影响都不可忽视；在海洋环境工程中，水波是海域内物质和能量输移扩散的重要外力，因此也是决定海洋环境质量的重要因素；在水利工程中，正确预报洪水波的演进过程是防洪减灾决策的基础。本书在选择解析解的过程中也尽可能地体现这些工程领域的背景。

第一篇

一 维 水 波

第 2 章　一维水波的描述

2.1　一维水波的基本方程

水波运动的基本方程就是带有自由水面的不可压缩流体运动的基本方程。在研究水波运动时，一般认为黏性对流场的作用同惯性相比可以忽略不计。也就是说，在水波理论中通常可将水假设为非黏性流体，或称为理想流体。这样，在考虑如图 2-1 所示的一维水波引起的立面二维流动时，若将坐标原点置于静止水面上，同时选取波的传播方向为 x 轴正方向，垂直向上方向为 y 轴正方向，则描述水体运动的*连续方程*和*运动方程*可以写作

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0 \tag{2.3}$$

其中，u 和 v 分别是水平方向和垂直方向的流速分量；p 是*动水压强*(即*总压强减去静水压强*$p_0=-\rho gy$)；ρ 是水的密度；g 是重力加速度；x 和 y 分别是水平坐标和垂直坐标；t 是时间。运动方程 (2.2) 和 (2.3) 也称作Euler *方程*。利用连续方程 (2.1)，运动方程 (2.2) 和 (2.3) 还可以写成如下的*守恒形式*:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial uu}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial uv}{\partial x}+\frac{\partial vv}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0 \tag{2.5}$$

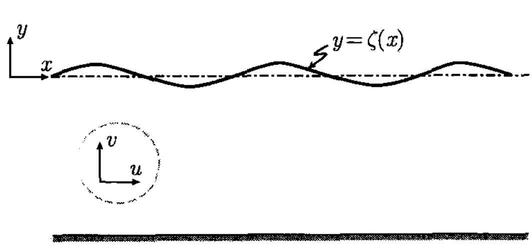


图 2-1　波动场的示意图

理想流体的流动在大多数情况下都可以被认为是*无旋*的。对于二维流动，这一假设可写作

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.6}$$

这样，就可以定义*速度势* ϕ，使得

$$u=\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{2.7}$$

$$v=\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{2.8}$$

于是，连续方程 (2.1) 可被转化为关于速度势的 Laplace 方程：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=0 \tag{2.9}$$

运动方程 (2.2) 和 (2.3) 则可被积分一次给出 Bernoulli 方程：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{p}{\rho}=0 \tag{2.10}$$

在方程 (2.10) 中，取积分常数为 0。这样做是恰当的，因为即使积分常数不为 0，也可以通过重新定义速度势 ϕ 使得积分常数为 0。重新定义的速度势不过是在原速度势上加入一个仅与时间有关的函数。考虑到速度势通常是待求变量，而且在速度势中加上一个仅与时间有关的函数对速度场和压强场均无影响，取积分常数为 0 不会使 (2.10) 式失去普遍性 (Stoker, 1957)。

引入速度势之后，水波问题的数学提法可以极大地简化。因为这样做之后，水波问题就无需联立求解连续方程和运动方程。取而代之的是求解关于速度势的 Laplace 方程。求得速度势之后，再利用速度势的定义确定速度场、利用 Bernoulli 方程确定压强是很容易做到的。Laplace 方程是最常见的数学物理方程之一，它的性质相对来说比较简单，有效的求解方法也比较多。

下面讨论水波问题中速度势的边界约束条件。在底面附近，不透水性要求法向速度分量为 0。因此，*底面边界条件*可写作

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}=0 \qquad [y=-h] \tag{2.11}$$

其中，n 代表底面法向；h 是当地水深，一般情况下可以是随 x 变化的函数，但规则波的形成往往要求 h 为一常数。在自由水面上，水面的连续条件，即自由水面上的水质点在任何时刻都不离开自由水面，给出一个运动学关系：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{\partial \phi}{\partial y}=0 \qquad [y=\zeta] \tag{2.12}$$

称为**自由水面运动学条件**，其中，ζ 表示自由水面偏离静止水位的垂直位移，即自由水面相对于静止水位的高程，称为**自由水面高程**。在忽略水的表面张力的前提下，自由水面附近的压强等于作用于水面上的大气压。依据这一物理事实，利用 Bernoulli 方程即可导出以下**自由水面动力学条件**：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right]+g\zeta=0 \qquad [y=\zeta] \tag{2.13}$$

不透水底面边界条件 (2.11)、自由水面运动学条件 (2.12) 和动力学条件 (2.13) 适用于绝大多数水波现象，通常构成水波定解问题的核心组成部分。

Luke (1967) 的研究表明，速度势满足 Laplace 方程 (2.9)，动水压强满足 Bernoulli 方程 (2.10)，自由水面边界条件和底面边界条件分别满足条件 (2.12)、(2.13) 和 (2.11) 的水波定解问题等价于以下Hamilton **变分原理**：

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\mathcal{L}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0 \tag{2.14}$$

其中，δ 表示变分；$[t_1,t_2]$ 是现象的时间范围；$[x_1,x_2]$ 是所考虑的空间范围；Lagrange **函数**$\mathcal{L}$ 定义如下：

$$\mathcal{L}=\int_{-h}^{\zeta}\left\{\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right]+gy\right\}\mathrm{d}y \tag{2.15}$$

Zakharov (1968)、Broer (1974) 和 Miles (1977) 的研究表明，水波定解问题 (2.9)、(2.10)、(2.12)、(2.13) 和 (2.11) 也等价于以下Hamilton **正则方程组**：

$$\rho\frac{\partial \zeta}{\partial t}=\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\varphi} \tag{2.16}$$

$$\rho\frac{\partial \varphi}{\partial t}=-\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\zeta} \tag{2.17}$$

其中，自由水面高程 ζ 和自由水面位置处的速度势函数 $\varphi=\phi[t,x,\zeta(t,x)]$ 是相应的**对偶变量**，Hamilton **函数**$\mathcal{H}$ 定义如下：

$$\mathcal{H}=\frac{\rho}{2}\int\left\{\int_{-h}^{\zeta}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}y+g\zeta^2\right\}\mathrm{d}x \tag{2.18}$$

也可以引入**流函数**ψ 来描述水波作用下的水体运动。流函数是通过以下关系式定义的:

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{2.19}$$

$$v=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.20}$$

显然，流函数的引入使得连续方程 (2.1) 得以自动满足。只要将方程 (2.19) 和 (2.20) 代入流体运动的无旋性条件 (2.6) 就很容易地知道，流函数和速度势一样，也满足 Laplace 方程：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \tag{2.21}$$

用流函数来描述水波作用下水体运动的一个不便之处是，在一般条件下，压强和流函数之间没有一个类似于 Bernoulli 方程那样的简单关系。因此，自由水面动力学条件也就无法简单地用流函数来表示。但是，如果能够将所考虑的问题通过坐标变换转化为一个定常问题，则情况就变得完全不同。利用流函数会使问题的数学提法得到显著的简化。

流函数有几个重要的性质。首先，在流场内，流函数等于常数的任意曲线总对应于一条流线。也就是说，该曲线上任意一点处的切线方向和流速方向一致。其次，在二维流动问题中，通过两条流线间的流量是一常量，其值等于这两条流线所对应的流函数值之差。此外，等流函数线 (流线) 与等速度势线 (等势线) 是两个相互正交的曲线族。

流函数的这几个性质都可以很容易地得到证明。假设在曲线 $y(x)$ 上流函数是一个常数。那么，沿着这条曲线就有

$$\mathrm{d}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y=0 \tag{2.22}$$

考虑到流函数的定义，式 (2.22) 又可写为

$$-v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y=0 \tag{2.23}$$

也就是说，沿着曲线 $y(x)$ 有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v}{u} \tag{2.24}$$

这表明曲线上任意一点的切线方向与该点处的流速方向一致，即流函数等于常数的任意曲线总对应于一条流线。

如图 2-2 所示，假设流场中有两条流线，它们所对应的流函数值分别为 ψ_1 和 ψ_2。通过这两条流线之间任意断面 AB 的流量可以按下式计算：

$$q=\int_A^B \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=\int_A^B(u\mathrm{d}y-v\mathrm{d}x) \tag{2.25}$$

其中，$\boldsymbol{u}$ 是 AB 上任意点处的流速向量；$\boldsymbol{n}$ 是该点处 AB 曲线的单位法向量。利用流函数的定义，可以从式 (2.25) 推导出

$$q=\int_A^B\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x\right)=\int_A^B\mathrm{d}\psi=\psi_B-\psi_A=\psi_2-\psi_1 \tag{2.26}$$

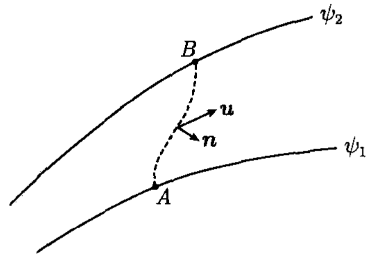


图 2-2　通过两条流线间的流量与流函数的关系

这说明通过 AB 间的流量就是过 A、B 两点的流线所对应的流函数值之差。

证明流线与等势线的正交性只需要证明流线与等势线在交点处斜率之积等于 -1 即可。假设流场内的任意一条流线为 $y_s(x)$，任意一条等势线为 $y_p(x)$。由于 $y_s(x)$ 上任意一点的切线方向与该点的流速方向一致，有

$$\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}x}=\frac{v}{u} \tag{2.27}$$

另一方面，沿着 $y_p(x)$ 有以下关系式成立：

$$\mathrm{d}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y=0 \tag{2.28}$$

代入速度势的定义即有

$$u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}y=0 \tag{2.29}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y_p}{\mathrm{d}x}=-\frac{u}{v} \tag{2.30}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y_p}{\mathrm{d}x}=-1 \tag{2.31}$$

这说明 $y_s(x)$ 和 $y_p(x)$ 是正交的。

考虑到

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{2.32}$$

$$v=\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2.33}$$

可以看出，速度势和流函数之间满足 Cauchy-Riemann 条件。也就是说，在复平面 $\mathfrak{z}=x+iy$ 上，以 ϕ 为实部、ψ 为虚部的复变函数

$$\mathcal{F}=\phi+i\psi \tag{2.34}$$