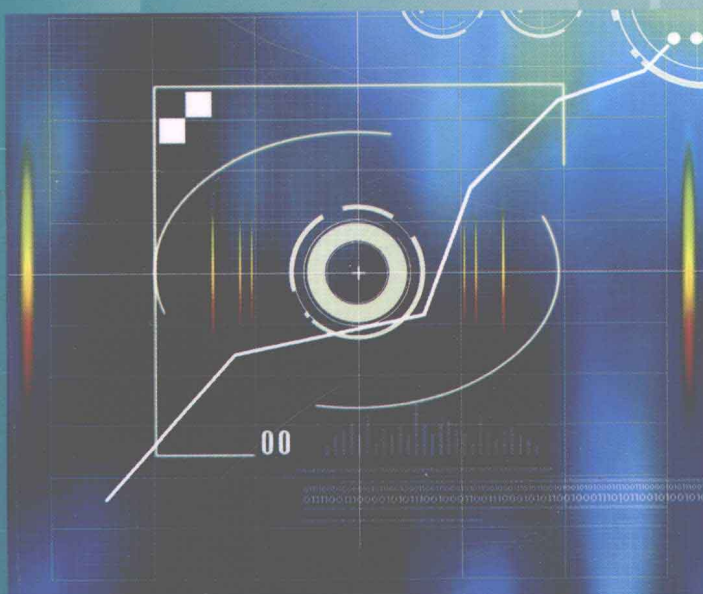




高等教育“十二五”规划教材

P 概率论 ROBABILITY 与数理统计 AND MATHEMATICAL STATISTICS

刘家春 主 编
关 明 齐丽萍 副主编



科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

刘家春 主编

关 明 齐丽萍 副主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书根据高等学校理工类专业《概率论与数理统计》课程的教学大纲进行编写,力求深入浅出,通俗易懂,突出应用. 内容包括概率论的基本概念、一维和多元随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等知识. 全书例题量大,解题详细,便于教学.

本书可作为应用型高等院校本科各专业《概率论与数理统计》课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/刘家春主编. —北京:科学出版社,2011
高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-031184-9

I. ①概… II. ①刘… III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 097503 号

策划:姜天鹏 李洪旺
责任编辑:李 瑜 张振华 / 责任校对:王万红
责任印制:吕春珉 / 封面设计:科地亚盟

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双 青 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 8 月 第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2011 年 8 月第一次印刷 印张: 17 1/2

印数: 1—5 000 字数: 330 000

定价: 29.80 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换<新欣>)

销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62135157

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-64030229; 010-64034315; 13501151303

序 言

在自然界和现实生活中,一些事物都是相互联系和不断发展的.在它们彼此的联系和发展中,根据它们是否有必然的因果联系,可以分成两大类:一类是确定性的现象,指在一定条件下,必定会导致某种确定的结果.例如,在标准大气压下,水加热到 100 摄氏度,就必然会沸腾.事物间的这种联系是属于必然性的,这种现象叫做必然现象或确定性现象.另一类是不确定性的现象.这类现象在一定条件下的结果是不确定的.例如,同一个工人在同一台机床上加工同一种零件若干个,它们的尺寸总会有一点差异.又如,在同样条件下,进行小麦品种的人工催芽试验,各颗种子的发芽情况也不尽相同,有强弱和早晚之别等.为什么在相同的情况下,会出现这种不确定的结果呢?这是因为,我们说的“相同条件”是指一些主要条件来说的,除了这些主要条件外,还会有许多次要条件和偶然因素是人们无法事先预料的.这类现象,我们无法用必然性的因果关系,对现象的结果事先做出确定的答案.事物间的这种关系是属于偶然性的,这种现象叫做偶然现象,或者叫做随机现象.

概率论与数理统计是研究随机现象内在规律性的一门数学学科.它具有严密、深刻的理论体系.同时,它又是一门应用学科,在工业、农业、军事、医学、公共事业及尖端科学等几乎所有科学技术领域得到越来越重要的应用.今天,概率论与数理统计已成为有广泛应用的、有深刻理论基础的、蓬勃发展的一个数学学科.

前 言

概率论与数理统计作为数学的一个重要分支,在许多领域中有着广泛的应用.现在,不但理工学科,而且经济学、管理学等专业,对概率统计的要求也越来越高.由于概率统计是研究随机现象内在规律的,它所用的方法不同于以往学过的数学,所以初学者往往感到比较难学.

本书针对应用型本科教育和职业教育的特点,力求深入浅出,通俗易懂,从实际问题出发,引出基本概念,进而上升到理论,特别强调了处理各种问题的思路、方法和步骤,力求做到全面并富有启发性,以便使读者能够举一反三,触类旁通,开拓处理问题的思路,提高解决问题的能力.本书的主要内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征和极限定理,数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、单因素试验的方差分析及一元正态线性回归.同时,本书对各章课后习题都做了较详细的解答.书中有“*”的部分为选修内容.

哈尔滨工业大学陈桂林教授对本书的编写提出了宝贵意见,并进行了审核.哈尔滨华德学院竺培国教授给予了大力的支持,黑龙江外国语学院仲崇斌教授对本书提出了建设性意见,在此一并表示感谢.

本书的第1~3章由关明编写,第4、7、8章由刘家春编写,预备知识、第5~6章及答案由齐丽萍编写,杨德彬、张晓楠、于佳彤、王双参加了本书部分章节的编写及附表和答案的校对工作.全书由刘家春统稿.

由于编者水平有限,书中疏漏之处在所难免,恳请读者批评指正.

编 者

2011年4月

预 备 知 识

1. 加法原理

设完成一件事有 m 种方式,其中第一种方式有 n_1 种方法,第二种方式有 n_2 种方法,……,第 m 种方式有 n_m 种方法,无论通过哪种方法都可以完成这件事,则完成这件事的方法总数为 $n_1+n_2+\cdots+n_m$.

2. 乘法原理

设完成一件事有 m 个步骤,其中第一个步骤有 n_1 种方法,第二个步骤有 n_2 种方法,……,第 m 个步骤有 n_m 种方法;完成该件事必须通过每一步骤才算完成,则完成这件事的方法总数为 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$.

3. 排列、组合

(1) 选排列.

从 n 个不同的元素中,任意选取 r 个($0 < r \leq n$, 不许重复),然后按序作排成一列,称为从 n 个元素中取 r 个元素的一种选排列,其排列总数记为 P_n^r ,则

$$P_n^r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

特别地,当 $n=r$ 时,这种选排列称为全排列,排列数为 $P_n^n = n!$.

(2) 有重复排列.

从 n 个不同的元素中,任意选出 m 个,但每件对象均可重复选取的重复排列数为 n^m .

(3) 不同元素的组合.

从 n 个不同元素中,每次不重复地取出 r 个($r \leq n$)元素组成一组不计较组内各元素的次序,叫做从 n 个不同元素中取出 r 个元素的一个组合,其组合数为

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots(2)(1)}$$

性质 1. $C_n^r = C_n^{n-r}$ (剩余公式)

2. $C_n^0 = C_n^n = 1$

(4) 有重复的组合.

从 n 个不同元素中, 每次取 r 个为一组, 各组的对象可以任意重复, 则此种组合称为取的重复组合, 其重复组合数以符号 H_n^r 表示, 且

$$H_n^r = C_{n+r-1}^r$$

4. 二项式公式

对任意正整数 n 及非负整数 r ,

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^r x^{n-r} y^r + \cdots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n \\ &= \sum_{r=0}^n C_n^r x^{n-r} y^r\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}2^n &= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n \\ (1+x)^n &= C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \cdots + C_n^r x^r + \cdots + C_n^n x^n\end{aligned}$$

目 录

第 1 章 随机事件及其概率	1
1.1 随机事件	1
1.1.1 随机试验	1
1.1.2 随机事件	1
1.1.3 样本空间	2
1.1.4 事件的关系和运算	3
1.2 随机事件的概率	7
1.2.1 概率的公理化定义	7
1.2.2 概率的性质	8
1.3 古典概率	10
1.3.1 古典概率的定义	10
1.3.2 古典概率的计算举例	11
1.4 几何概率与统计概率	14
1.4.1 几何概率	14
1.4.2 统计概率	15
1.5 条件概率	16
1.5.1 条件概率的概念	16
1.5.2 乘法公式	18
1.5.3 全概率公式和贝叶斯公式	19
1.6 事件的独立性	21
1.6.1 两个事件的独立性	21
1.6.2 多个事件的独立性	22
1.6.3 相互独立性的性质	23
1.6.4 贝努里概型	24
习题 1	27
第 2 章 随机变量及其分布	30
2.1 随机变量的概念	30
2.2 离散型随机变量及其概率分布	32

2.2.1 离散型随机变量及其概率分布	32
2.2.2 几种重要的离散型分布	34
2.3 随机变量的分布函数	36
2.3.1 分布函数的概念	36
2.3.2 分布函数的基本性质	37
2.3.3 离散型随机变量的分布函数	38
2.4 连续型随机变量	39
2.4.1 连续型随机变量及其概率密度的定义	39
2.4.2 概率密度的性质	39
2.4.3 常用的连续型分布	41
2.5 随机变量函数的分布	47
2.5.1 随机变量的函数	47
2.5.2 离散型随机变量函数的分布	48
2.5.3 连续型随机变量函数的分布	49
习题 2	54
第 3 章 多维随机变量	57
3.1 二维随机变量及联合分布	57
3.1.1 二维随机变量	57
3.1.2 联合分布函数的概念	57
3.1.3 n 维随机变量	58
3.1.4 联合分布函数的基本性质	58
3.1.5 边缘分布函数	58
3.2 二维离散型随机变量	60
3.2.1 二维离散型随机变量的定义	60
3.2.2 边缘分布列	61
3.3 二维连续型随机变量	62
3.3.1 二维连续型随机变量及其概率密度	62
3.3.2 概率密度的性质	63
3.3.3 边缘概率密度	63
3.3.4 两个重要的二维连续型分布	65
* 3.4 条件分布	67
3.4.1 二维离散随机变量的条件分布列	67
3.4.2 二维连续型随机变量的条件概率密度	69
3.5 随机变量的独立性	71
3.6 二维随机变量函数的分布	74

3.6.1 二维离散型随机变量函数的分布	74
3.6.2 连续型随机变量和的密度	75
3.6.3 分布函数法	77
3.6.4 $M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布	79
习题 3	80
第 4 章 随机变量的数字特征和极限定理	83
4.1 数学期望	83
4.1.1 离散型随机变量的数学期望	83
4.1.2 连续型随机变量的数学期望	85
4.1.3 随机变量函数的数学期望	87
4.1.4 数学期望的性质	89
4.2 方差	90
4.2.1 方差的概念	91
4.2.2 方差的性质	91
4.2.3 常用分布的方差	92
4.3 协方差和相关系数	95
4.3.1 协方差的定义	95
4.3.2 协方差的性质	96
4.3.3 相关系数的定义	98
4.3.4 相关系数的性质	98
4.4 矩、协方差矩阵	101
4.4.1 矩	101
* 4.4.2 协方差矩阵	102
4.5 大数定理及中心极限定理	102
4.5.1 大数定理	102
4.5.2 中心极限定理	105
习题 4	107
第 5 章 数理统计的基本概念	110
5.1 总体和样本	110
5.1.1 数理统计的基本问题	110
5.1.2 总体	111
5.1.3 样本	111
5.2 直方图和经验分布函数	113
5.3 χ^2, t 和 F 分布	117
5.3.1 χ^2 分布	117

5.3.2	t 分布	118
5.3.3	F 分布	118
5.4	统计量及抽样分布	119
5.4.1	统计量	119
5.4.2	抽样分布——统计量的分布	120
习题 5		122
第 6 章	参数估计	124
6.1	点估计	124
6.1.1	求估计量的方法	124
6.1.2	鉴定估计量的标准	129
6.2	区间估计	133
6.2.1	区间估计的概念	133
6.2.2	单个正态总体参数的区间估计	134
6.2.3	两个正态总体参数的区间估计	136
6.2.4	大样本区间估计	139
习题 6		140
第 7 章	假设检验	144
7.1	假设检验的基本概念	144
7.1.1	假设检验的问题	144
7.1.2	假设检验的概念	144
7.1.3	参数假设检验的一般步骤	145
7.2	单个正态总体参数的显著性检验	145
7.2.1	u 检验	145
7.2.2	t 检验	147
7.2.3	χ^2 检验	148
7.3	两个正态总体参数的显著性检验	149
7.3.1	t 检验	149
7.3.2	F 检验	150
7.4	非参数假设检验	152
7.4.1	χ^2 统计量	153
7.4.2	分布函数的拟合优度检验	154
习题 7		157
第 8 章	单因素试验的方差分析及一元正态线性回归	160
8.1	单因素试验的方差分析	160
8.1.1	问题的提出	160

目 录

8.1.2 数学模型	161
8.1.3 平方和分解	161
8.2 一元正态线性回归	168
8.2.1 一元正态线性回归的数学模型	168
8.2.2 未知参数的估计	170
8.2.3 估计量 a 和 b 的性质	173
8.2.4 回归方程的显著性检验	175
8.2.5 利用回归方程进行预测和控制	179
8.2.6 一元非线性回归	183
习题 8	185
参考文献	188
参考答案	189
附表 1 泊松分布累计概率值表	247
附表 2 标准正态分布函数值表	248
附表 3 χ 分布表	249
附表 4 t 分布表	252
附表 5 F 分布表	254
附表 6 相关系数检验表	263

第 1 章 随机事件及其概率

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验

概率论是一门研究随机现象内在规律性的数学学科. 为了研究随机现象, 就要对客观事物进行观察和试验, 我们把这种观察和试验统称为试验. 概率论中所研究的试验具有下列特点:

- (1) 可以在相同的条件下重复进行;
- (2) 试验的可能结果不止一个, 并且在试验前能明确知道所有可能的结果;
- (3) 试验前无法预知哪一个结果出现.

我们把具有上述特点的试验称为**随机试验**, 简称为**试验**, 记为 E . 例如, 观察某射手对固定目标进行射击; 抛一枚硬币三次, 观察出现正面的次数; 记录某市 120 急救电话一昼夜接到的呼叫次数等均为随机试验.

1.1.2 随机事件

在随机试验中可能发生也可能不发生的结果称为**随机事件**, 简称为**事件**, 常用字 $A, B, \dots$ 表示.

例如, 抛一枚均匀硬币, “正面朝上”是一个随机事件, 将其记作 A , 简写为

$$A = \text{“正面朝上”}$$

同样地, 有

$$B = \text{“正面朝下”}$$

1. 基本事件与复合事件

随机试验的每一个可能结果, 它是最基本的不能再分的事件称为**基本事件**(或**样本点**), 记为 e .

例如, 掷一枚骰子这一试验, 出现“1 点”, “2 点”, “3 点”, “4 点”, “5 点”, “6 点”, 都是基本事件, 可分别用

$$e_i = \text{“出现 } i \text{ 点”} \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

表示.

在一个试验中,由两个或两个以上基本事件复合而成的事件称为**复合事件**.

例如,掷一枚骰子这一试验,出现偶数点是一复合事件,它是由出现“2点”,“4点”,“6点”,这三个基本事件复合而成的复合事件,当且仅当上述三个基本事件中的一个发生它才发生,可用 $e_2 + e_4 + e_6$ 表示.

2. 必然事件

在一定条件下必然会发生的事件称之为必然事件,记为 S (或 Ω).

3. 不可能事件

在一定条件下必定不会发生的事件称为不可能事件,记为 $\emptyset$.

为讨论方便,必然事件、不可能事件作为极端情况都视为随机事件.

1.1.3 样本空间

试验 E 的所有基本事件构成的集合,称为 E 的样本空间,记为 S (或 Ω).

例如,从标号为 $1, 2, \dots, 10$ 的十个完全相同的球中任取一个为一个随机试验,记 e_i = “取得 i 号球”($i=1, 2, \dots, 10$),则其样本空间

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_{10}\}$$

它的子集 $\{e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ 表示“取到的号码大于 5”这一事件, $\{e_1, e_3, e_5, e_7, e_9\}$ 表示“取到奇数号球”这一事件,……可见,样本空间的某个子集就是一个事件,今后我们称样本空间的某个子集为**随机事件**.

空集 $\emptyset$ 不包含任何基本事件,在每次试验中都不会发生,称为**不可能事件**.

全集 S 作为自身的子集,包含所有的基本事件,在每次试验中必然发生,称为**必然事件**.

例 1.1 同时掷两枚骰子,试写出该试验的样本空间和事件 A = “点数之和等于 10”, B = “点数之和大于 8”.

解 样本空间为

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

$$A = \{(4,6), (5,5), (6,4)\}$$

$$B = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (4,6), (5,5), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6)\}$$

1.1.4 事件的关系和运算

1. 事件的关系和运算

(1) 事件的包含和相等.

设有事件 A 及 B , 如果 A 发生, 则 B 必然发生, 则称 B 包含 A , 或 A 包含于 B , 如图 1.1 所示, 记为

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A$$

如果事件 A 包含事件 B , 同时事件 B 也包含事件 A , 则称事件 A 与 B 相等, 记为

$$A = B$$

特别地, 对任一个事件 A , 有

$$\emptyset \subset A \subset S$$

如图 1.2 所示.

(2) 事件的和(并).

A 与 B 两个事件中至少有一个发生, 称这一事件为事件 A 与事件 B 的和(或并), 如图 1.3 所示, 记作

$$A \cup B \quad \text{或} \quad A + B$$

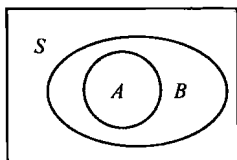


图 1.1

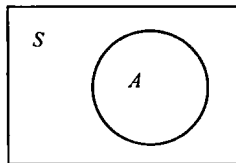


图 1.2

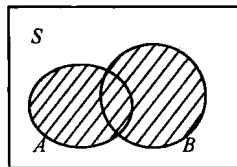


图 1.3

类似地, 可定义 n 个事件及可列无限个事件的和. 若 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生, 则称这一事件为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和, 记为

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n \quad \text{或} \quad \bigcup_{i=1}^n A_i$$

若可列无限个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 中至少有一个发生, 则称这一事件为 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和, 记为

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots \quad \text{或} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

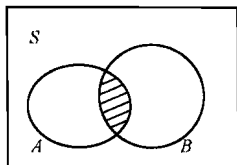


图 1.4

(3) 事件的积(交).

两事件 A 与 B 同时发生, 称这一事件为事件 A 与事件 B 的积或交, 如图 1.4 所示, 记为

$$A \cap B \quad \text{或} \quad AB$$

类似地, 可定义 n 个事件及可列无限个事件的积.

若 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生, 则称这一事件为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积, 记为

$$A_1 A_2 \cdots A_n \quad \text{或} \quad \bigcap_{i=1}^n A_i$$

若可列无限个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 同时发生, 则称这一事件为 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的积, 记为

$$A_1 A_2 \cdots A_n \cdots \quad \text{或} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

(4) 事件的差.

事件 A 发生而事件 B 不发生, 称这一事件为事件 A 与事件 B 的差, 如图 1.5 所示, 记为

$$A - B \quad \text{或} \quad A\bar{B}$$

这时, 各部分的表示如图 1.6 所示.

特别地, 对任一个事件 A , 有

$$A - A = \emptyset, \quad A - \emptyset = A$$

(5) 互不相容(互斥)事件.

若两事件 A 与 B 不能同时发生, 则称事件 A 与事件 B 是互不相容的或互斥的, 如图 1.7 所示, 记为

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{或} \quad AB = \emptyset$$

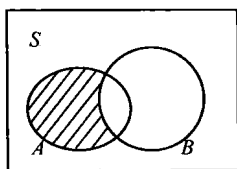


图 1.5

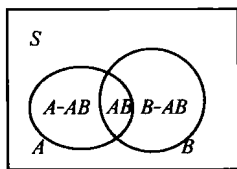


图 1.6

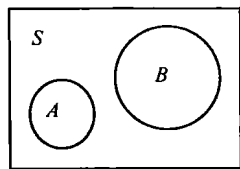


图 1.7

类似地, 若 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 任意两个事件是互不相容的, 即满足

$$\text{当 } i \neq j \text{ 时, } A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

则称这 n 个事件是互不相容的, 或这 n 个事件是两两互不相容的.

(6) 对立(逆)事件.

事件 A 不发生的事件称为 A 的对立(或逆)事件, 如图 1.8 所示, 记作 $\bar{A}$, 由定义可知

$$\overline{(\bar{A})} = A$$

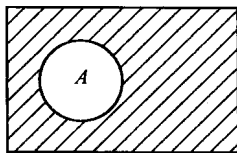


图 1.8

在一次试验中, A 和 $\bar{A}$ 不会同时发生, 且 A 与 $\bar{A}$ 至少有一个发生, 因此 A 和 $\bar{A}$ 满足

$$A + \bar{A} = S, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad \bar{A} = S - A$$

人们注意到, 随机试验的所有基本事件都是两两互斥的, 因为每次试验只能出现一个结果, 任何两个不同结果都不能同时出现, 但基本事件彼此未必互为逆事件, 例如, 在掷一骰子的试验中, “掷出 3 点”与“掷出 4 点”是互斥事件, 但不是互逆事件, 因为不掷出 3 点还可能掷出 2 点, 5 点, 1 点, 6 点来, 因此, 互斥未必互逆, 但互逆必定互斥.

2. 事件的运算规律

事件间的关系及运算与集合的关系及运算是一致的, 为了方便, 给出下列对照表 1.1:

表 1.1

记 号	概 率 论	集 合 论
S	样本空间, 必然事件	全集
$\emptyset$	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	事件	子集
$\bar{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A \subset B$	事件 A 发生导致 B 发生	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的和集
AB	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB = \emptyset$	事件 A 和事件 B 互不相容	A 与 B 没有相同的元素

根据集合的运算性质, 可推得事件的运算性质如下:

- (1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
- (2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- (3) 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- (4) 对偶律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$, $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$.

例 1.2 在管理系学生中任选一名学生, 令事件 A 表示选出的是男生, 事件 B